ベイジアンVARモデルとその日本経済への応用

メタデータ	言語: jpn 出版者: 明治大学政治経済研究所 公開日: 2022-05-30 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 加藤, 久和 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/22481

ベイジアンVARモデルと
その日本経済への応用

加　藤　久　和

《論文要旨》

VARモデルはマクロ経済の動学的な状況を描写し，外部からのショックの影響の計量化や予測等に用いられるなど，マクロ計量分析に欠かせないツールとなっている。しかしながらVARモデルは，自由度の視点から多変数かつ長期のラグ変数を扱うには限界があり，また共和分関係を有しない単位根過程にしたがうマクロ経済変数の処理にも課題があった。こうした課題に対応可能なモデルとして提案されているのがベイジアンVAR（BVAR）モデルである。

本稿はなぜBVARモデルが必要とされるのか，という視点を出発点として，BVARモデルの考え方や推定の方法などを紹介する。次いで，これまでのマクロモデルに関する考え方の整理を行い，マクロ経済を描写するVARモデルを構築するマクロ経済変数を選択した。選択した変数はGDP成長率，消費者物価上昇率，失業率，M2増加率，利子率及び対ドルベースの為替レートであり，各変数に関する単位根検定等も行った。なお，各変数の期種は四半期であり，サンプル期間はコロナ禍の期間を除くという意味で，1994年第1四半期から2020年第1四半期までした。

BVARモデルの推定では，ミネソタ事前分布を採用し，MCMCを用いてBVARモデルの各係数を求め，その推定結果からインパルス応答関数の計算やサンプル外への前方予測を行った。インパルス応答関数の計算では，GDPのショックは失業率を低下させ，消費者物価上昇率を高めるが，利子率にはほとんど影響していない。為替レートのショック（円安方向）は消費者物価上昇率に正のインパクトを与えるものの，しかし失業率や利子率にはあまり影響を与えない，ことなどが示された。

時系列データの分析には多変量時系列モデルの利用が不可欠である。ベイズ的な考え方の進展やMCMCの操作性の改善などがさらに進めば，今後はBVARモデルが多変量時系列分析の中核を担っていくことになるだろうと考える。

キーワード：ベイズ推論，ベイジアンVARモデル，ミネソタ事前分布，日本経済

はじめに

ベクトル自己回帰モデル（Vector Autoregression Model, VAR モデル）は，Sims（1980）以降，マクロ経済の動学的な状況を描写し，外部からのショックの計量化や予測等に用いられるなど，マクロ計量分析に欠かせないツールとなっている。また，マクロ経済変数の時系列的性質を踏まえ，共和分をもつ複数のマクロ経済変数を対象としたベクトル誤差修正モデルなども一般化しており，さらには構造型 VAR モデルの利用なども進んでいる。

しかしながら VAR モデルはその構造上，自由度の視点から多変数かつ長期のラグ変数を扱うには限界があり，また共和分関係を有しない単位根過程にしたがうマクロ経済変数の処理にも課題があった。こうした課題に対応可能なモデルとして提案されているのがベイジアン VAR モデル（Bayesian VAR model，BVAR モデル）である。

近年，ベイズ統計学的な方法によるデータ処理が普及し，また事後分布を求める MCMC も R などによる利用が容易になってきたが，このことは経済の時系列分析にも様々な恩恵をもたらしている。そのひとつが BVAR モデルである。本稿はなぜ BVAR モデルが必要とされるのか，という視点を出発点として，BVAR モデルの考え方や推定の方法などを紹介する。その後，日本経済を描写するためのマクロ経済変数を選び，その時系列的特性を示した後に，BVAR モデルを推定し，インパルス応答関数と予測の結果を紹介する。

日本においても過去に川崎（1991）や Kasuya and Tanemura（2000）など，すでに BVAR モデルを用いたすぐれた洞察や実証分析がある。しかし近年では BVAR モデルに焦点を充てた研究も少なく，この 10 年ほどで BVAR モデルを取り巻く状況も変わってきている。本稿ではこうした点を

考慮して，日本経済を題材とした BVAR モデルの実証分析を試みるものである。

1. VAR モデルの意義と課題

1.1 VAR モデルの概要

1970～80 年代まで全盛を極めたマクロ計量経済モデルは，その定式化の恣意性や経済理論からの基礎の欠如などが指摘されてきた。とりわけ，Sims（1980）によるシムズ批判や Lucas（1962）によるルーカス批判などが有名である（詳細については加藤（2014）参照)。このような状況を背景として VAR モデルが誕生したわけであるが，同時にマクロ経済変数に関するデータ生成過程の研究（単位根の有無等）も進み，グレンジャーらによる共和分の概念なども登場した。その後，ミクロ経済学的基礎を持つ DSGE モデル（動学的確率的一般均衡モデル）が台頭し，マクロ経済学の主流を占めるようになった。

このように大別すれば三つのマクロ経済を描写するモデルが存在するが，DSGE モデルが全盛であるとはいうものの，それぞれのモデルには固有のメリットが存在している。DSGE モデルは理論に忠実であるものの，しかし現実データへの適応可能性には課題が残る。シムズ批判などで経済分析の主流から離れた感のあるマクロ計量モデルであるものの，Blanchard（2008）などでは現実経済の描写や仮想的な政策シミュレーションに適しているという評価も根強い。そして VAR モデルであるが，これは統計学的なモデルであり現実データを記述し，変数相互間の関係を示すツールとして有用なものである。また，変数間の同時点間の制約を取り入れた構造型 VAR モデルも一般化し，経済変数間の明示的な依存関係を取り扱うようになっている。

やや入門的な内容となるが，以下では VAR モデルの概要について少し述べておきたい。いま，p 次の VAR モデルを $VAR(p)$ と表わすとすると，(1)式のように示せる。

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t \quad (1)$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_t \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$$

ここで $\boldsymbol{y}_t$ は $M \times 1$ ベクトル，$\boldsymbol{a}_0$ は切片，$\boldsymbol{A}_j(j=1, \cdots, p)$ は $M \times M$ 係数行列，$\boldsymbol{\epsilon}_t$ は平均 0, 分散共分散行列が $\mathbf{\Sigma}$ である正規分布にしたがう撹乱項である。なお，(1)式の $VAR(p)$ モデルで推定すべき係数の数は pM^2+M 個となる。さらに（$\mathbf{\Sigma}$ が対角行列であると仮定しても）M 個のパラメータの推定が加わる。

マクロ経済を VAR モデルで記述した後に用いられる用途としては主に予測と構造的分析がある。後者についてはグレンジャー因果やインパルス応答，分散分析が代表的なツールである。とりわけ予測とグレンジャー因果について触れておきたい。VAR モデルでは予測（サンプル外の変数の値の推定）が重要な目的の一つとなっており，これをフレキシブルに行えることが VAR モデルの有用性ともなっている。一方，VAR モデルでは推定された個々の係数の解釈が困難であり，変数間の因果関係を明確に示せないという批判もある。VAR モデルの使い方としてはグレンジャー因果という方法がある。これはある変数が他の変数の予測精度の向上に寄与しているかどうか，ということを示すもので因果関係そのものを示すものではない。こうした点について Stock and Watson（2014）は，VAR モデルなどの時系列モデルの目的として，その係数の推定によって因果関係を示すというより，モデルが予測として有用であることの方が重要であるとしている。その意味では VAR モデルはミクロ計量経済学が主たる目的とする因果推論とはその目的

が異なるものとして捉える必要がある。

1.2 VAR モデルの課題 ── BVAR モデルが必要な理由

VAR モデルを推定し構造分析を行うに際していくつかの考慮すべき点があり，これを満たすために BVAR モデルが必要となる。

時系列変数を扱う上でもっとも重要な視点は定常性の確保であろう。Nelson and Plosser（1982）以降，多くのマクロ経済変数には単位根が含まれることが実証分析で明らかになっている。こうした非定常な変数をそのまま用いて回帰するならば，それは“見せかけの回帰”をもたらし，推定結果の信頼性を欠くことになる(1)。その場合，もっとも一般的な対応方法は 1 階の階差を取り，変数を定常化して VAR モデルを構築し（階差 VAR モデル），累積インパルス応答を計測するといった方法である。しかしながら階差 VAR モデルでは長期の変数間の関係性などの情報を失う可能性が高い上，各マクロ変数が一次の和分過程にあるとは限らないことも考えられる。

VAR モデルを構成する各変数が単位根を有している場合の理想的な対応は，そのモデルの各変数の線形結合が定常となる場合，すなわち共和分が存在する場合にはベクトル誤差修正モデルを利用するという方法である。理想的と記したのは，ヨハンセン検定など共和分検定の方法の導出力が十分ではないという指摘（Stock and Watson（1993））や，モデルに一つだけ非定常な変数が残る場合等があるためである(2)。なお，非定常なマクロ経済変数を含む VAR モデルではグレンジャー因果に関する検定は Toda and Yamamoto（1995）の方法により可能であるが，しかしインパルス応答等にはそのまま適用できない。

このように単位根のあるマクロ経済変数で構成する VAR モデルの推定には乗り越えるべき障壁が高い。これに対応する試みの一つが BVAR モデルである。後述するように，BVAR モデルでは事前分布を定める必要がある

が，この事前分布を階層的に捉え，そのハイパーパラメータの設定の代わりにダミー観測値をサンプルに加えて推定するという方法が取られる。その際に各マクロ変数が単位根過程にしたがうという前提でダミー観測値を組み込んで，上記の問題に対応するという手法がとられている（Kuschnig and Vashold（2019）等参照）。

BVAR を用いるもう一つの有用性はデータ制約への対応である。上述したように VAR モデルではその変数の数やラグ次数が長くなるほど推定すべきパラメータが大きくなる。これはしばしば「次元の呪い（curse of dimensionality）」等と呼ばれる（Koop and Korobilis（2010）等参照）。日本の現在の国民経済計算（SNA）統計（2015 年基準改訂値）をみると，四半期データでは 1994 年第一四半期以降のデータしか得られないことから，サンプル数は最長でも 110 程度にしかならない。ラグ次数を 4 程度としても大規模なモデルを構成すればすぐに自由度の制約に直面することになる[(3)]。

通常の VAR モデルではその係数を最小二乗法もしくは最尤法などによって推定を行うが，その背景には真のパラメータが存在し，それを統計的推定によって推測するという頻度主義的な方法論がある。一方，BVAR モデルでは，各係数はそれ自体が確率変数であり，得られたデータを条件とした確率変数の分布をもとに係数の値を推計しようとするものである。上でも述べたように，最小二乗法などの手法で VAR モデルを推定すると「次元の呪い」を考慮しなければならないが，発想を転換した BVAR モデルでは確率分布をもとにしたモンテカルロシミュレーションなどではこうした危惧は生じない。その意味でも限られたデータサンプルを前提とすれば BVAR の手法が選択されることになる。

2. BVAR モデルの概要

2.1 ベイズ推論と BVAR モデル

BVAR モデルの具体的な内容に入る前にベイズ推論について簡潔に整理しておきたい。（1）式の VAR モデルの表現では推定すべきパラメータは $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{A}_j (i = 1, \cdots, p)$ 及び撹乱項の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ で示されているが，これらはすべて確率変数である。以下では，一般的に推定すべきパラメータを総括して $\boldsymbol{\theta}$ で表し，観測値を $\boldsymbol{y}$ とする。

ベイズ推論の原則は推論を行う分析者の事前分布と観測値の尤度関数を組み合わせて事後分布を導出し，この事後分布の情報からパラメータの値を推測するものである。ベイズ・ルールはこの原則にしたがって，（2）式のように表現できる

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = \frac{f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{f(\boldsymbol{y})} \tag{2}$$

ここで $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})$ は尤度関数であり，$\pi(\boldsymbol{\theta})$ は事前分布である。（2）式は観測値 $\boldsymbol{y}$ を条件とした $\boldsymbol{\theta}$ の事後分布は，観測値に基づく尤度関数 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})$ と事前分布 $\pi(\boldsymbol{\theta})$ の積を，観測値の密度関数 $f(\boldsymbol{y})$ で除したものと等しいことを述べている。しかしこの分母にある密度関数 $f(\boldsymbol{y})$ はパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と独立であり。単に事後分布を正規化するためだけのものである。事後分布の形状が推測でき，その中央値等をベイズ推計値として用いるのであればこの密度関数 $f(\boldsymbol{y})$ は不要であり，事後分布は尤度関数と事前分布の積に比例するという（3）式で表現できる。

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}) \tag{3}$$

BVARモデルではこの一般化されたパラメータ$\boldsymbol{\theta}$は$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{\Sigma}$に相当する（$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_p)$）。したがって，$\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\Sigma}$とすれば，

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}_1)\pi(\boldsymbol{\theta}_2) \tag{4}$$

と表現することができる。

（3）式の事前分布$\pi(\boldsymbol{\theta})$は一般的な形式であるが，その事前分布自体がいくつかのパラメータ$\boldsymbol{\lambda}$に依存する分布であると考えることができる。これは階層ベイズ推論と言われる考え方である。例えば$\pi(\boldsymbol{\theta})$が多変量正規分布にしたがうとすれば，$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda})$であり，$\boldsymbol{\lambda}=(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$である。このとき$\boldsymbol{\lambda}$はハイパーパラメータと呼ばれる。このハイパーパラメータを考慮すると

$$\pi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda})\pi(\boldsymbol{\lambda}) \tag{5}$$

と表現できる。BVARモデルではこのハイパーパラメータを設定して事前分布を定め，これに尤度関数を組み合わせて事後分布を導出するというステップを踏むことになる。

2.2　BVARモデルの事前分布の設定と推定

BVARモデルの事後分布は上記の方法で求められるが，事前分布の設定についてより具体的に整理しておこう[(4)]。階層ベイズ推論の考え方にしたがうと，事前分布におけるパラメータをいかに設定するかが重要になる。

事前分布としてもっとも一般的に用いられるのが（6），（7）式で示される正規-逆ウィシャート分布である。

$$\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\Sigma} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\Sigma}\otimes\boldsymbol{\Omega}) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \sim \mathrm{IW}(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{d}) \tag{7}$$

ここで事前分布のパラメータ $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{d}$ はハイパーパラメータ γ の関数となる。（6），（7）式の共役性から，モデルの尤度関数は γ の関数として閉じた形で計算できる。$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{d}$ と γ との関係を具体的に示すには，以下のようなミネソタ事前分布及び追加的な二つの事前分布として定式化できる。

$$E\left[(\boldsymbol{A}_s)_{ij} \mid \boldsymbol{\Sigma}\right] = \begin{cases} 1 & if\ i = j\ and\ s = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{8}$$

$$cov\left((\boldsymbol{A}_s)_{ij}, (\boldsymbol{A}_r)_{kl} \mid \boldsymbol{\Sigma}\right) = \begin{cases} \lambda^2 \dfrac{1}{s^\alpha} \dfrac{\Sigma_{ik}}{\psi_j/(d-M-1)} & if\ l = j\ and\ r = s \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{9}$$

ここで λ は事前分布の制約の強さの程度をコントロールするパラメータであり，α はラグが長くなるにつれて分散が減衰していく程度を制御するパラメータである。また，ψ はラグ変数に関する事前分布の標準偏差を制御するパラメータである。ミネソタ事前分布は各変数がランダム・ウォークにしたがう（ドリフト付きも含む）ということを前提としている。

さらにこうしたマクロ経済変数の特徴を表現するために Giannone et al.(2015) はダミー観測値を利用して追加的な事前分布をミネソタ事前分布に組み合わせて用いた。第一は sum-of-coefficients（soc）事前分布と呼ばれるもので，サンプルからの予測値はサンプルの初期値そのものであるという仮定を導入するものである。$\bar{\boldsymbol{y}}$ は各変数の最初の p 個の平均値を意味し，ハイパーパラメータ μ が $\mu \to \infty$ とき，この事前分布の影響は小さくなる。(10)と(11)で作成されるダミー観測値を，データセットに追加することでこの事前分布を表現することができる。

$$\boldsymbol{y}^+ = diag\left(\frac{\bar{y}}{\mu}\right) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{x}^{+} = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}^{+}, \cdots, \boldsymbol{y}^{+}] \tag{11}$$

二番目は the single-unit-root（sur）事前分布であり，データ間の共和分の存在を許容するものであり，(12)，(13)式で示される。ハイパーパラメータ δ が $\delta \to \infty$ とき，同様にこの事前分布の影響は小さくなる(5)。これも作成したダミー観測値を，データセットに追加して利用することになる。なお，このように人工的な観測値を追加して推計する方法をタイルの混合推定（Theil mixed estimation）という。

$$\boldsymbol{y}^{++} = \frac{\bar{y}}{\delta} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{x}^{++} = \left[\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\delta}}, \boldsymbol{y}^{++}, \cdots, \boldsymbol{y}^{++}\right] \tag{13}$$

事前分布の設定が定まれば，尤度関数と組み合わせて(３)式から事後分布を導くことになる。その際，MCMC（Markov chain Monte Carlo simulation）法を用いることとする。

BVAR モデルの推定にあたっては R を利用し，Kuschnig and Vashold (2019) によって提供された BVAR パッケージを用いた。これは上で示した階層ベイズ推論の考え方に基づく事前分布を設定するものである。BVAR パッケージではミネソタ事前分布を基本として，soc と sur はオプションとなっている。また MCMC についてはメトロポリス・ヘイスティングス法が用いられる。

3. マクロモデルによる経済の描写

3.1　マクロモデルによる経済の把握

マクロ経済を描写する VAR モデルを構築するには，どのようなマクロ経済変数を選択すべきか検討する必要がある。その参考として，これまでマクロ経済を記述してきたモデルについて簡単に概観しておきたい。

伝統的なマクロモデルとしては，ケインズの一般理論を解釈してヒックスが考案した IS–LM モデルがある。しかしながら伝統的な IS–LM モデルには①ミクロ経済的基礎が欠けている，②現実には中央銀行は短期利子率を目標としている，③経済主体の期待の役割が導入されていない，等々の批判があり現実経済の描写には困難であることがしばしば指摘されている。

Galí（1992）はこうした議論を踏まえ，IS–LM モデルを元にフィリップス曲線と貨幣供給プロセスを加えた以下のような四本の方程式でマクロ経済を描写している。

$$y=\alpha+u_s-\sigma(i-E\Delta p_{+1})+u_{is}\qquad\text{（IS 方程式）}$$
$$m-p=\phi y-\lambda i+u_{md}\qquad\text{（LM 方程式）}$$
$$\Delta m=u_{ms}\qquad\text{（貨幣供給プロセス）}$$
$$\Delta p=\Delta p_{-1}+\beta(y-u_s)\qquad\text{（フィリップス曲線）}$$

ここで y は GDP の対数値，i は名目金利，p は価格水準の対数値，m はマネーサプライの対数値，$u_s, u_{ms}, u_{md}, u_{is}$ はそれぞれ供給側（実物），貨幣供給，貨幣需要，及び支出に関するショックを示す。

さらに King（2000）は，新しい IS–LM モデルとして，以下のような 6 本の方程式体系を提案した。実物面（IS 方程式）に関しては，コアとなる

総需要に関してフォワードルッキングのメカニズムを組み込み，これに期待インフレ率を考慮して実質利子率を決めるフィッシャー方程式，さらには同様に期待インフレル率を対象としたフィリップス曲線の三つの方程式で表現する。金融面（LM 方程式）は貨幣供給と貨幣需要，及び金融面から決定される利子率の三つの方程式から構成される。以下がそのモデルである（オリジナルな論文に即したため，上記の Galí（1992）等とは notation が異なるので注意）。

$$y_t = E_t y_{t+1} + s(r_t - r) + x_{dt} \qquad \text{(IS 方程式)}$$
$$R_t = r_t + E_t \pi_{t+1} \qquad \text{（フィッシャー方程式）}$$
$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \varphi(y_t - \bar{y}_t) + x_{\pi t} \qquad \text{（フィリップス曲線）}$$
$$M_t - P_t = \delta y_t - \gamma R_t - x_{vt} \qquad \text{（貨幣需要関数）}$$
$$M_t = f_{Mt} + x_{Mt} \qquad \text{（貨幣供給関数）}$$
$$R_t = f_{Rt} + x_{Rt} \qquad \text{（利子率決定ルール）}$$

ここでは，y_t は実質 GDP, $\bar{y}_t$ は潜在 GDP, r_t は実質利子率，r は自然利子率，π_t はインフレ率，P_t は物価水準，f_{Mt} は金融政策ルール，f_{Rt} は利子率決定の基本ルール，x_{dt}, $x_{\pi t}$, x_{vt}, x_{Mt}, x_{Rt} はそれぞれ需要ショック，インフレショック，貨幣需要の速度変化，貨幣供給ショック及び利子率決定の際のショックを表している。

こうした IS–LM モデルの再検討はニューケインジアン経済学の広がりとともに金融政策を明示的に取り入れた IS–MP モデルとして再表現されていくことになる（鵜飼・鎌田（2004）等)。これは King（2000）他と同様な考え方に沿うが，基本的には三つの方程式によってマクロ経済が記述される。一つめは IS 方程式でありアウトプットと利子率の関係を描写する。二つめが金融政策であり，中央銀行がどのように金利を設定するかというルール

（実質金利と需給ギャップの関係を表すテイラールールなど）を示す。三つめがフィリップス曲線であってアウトプットとインフレ率の関係を表す。このうち二つめの金融政策ルールを表す方程式をMP曲線ということから，IS-MP（Investment-Savings / Monetary-Policy）モデルと称されている。なお，フィリップ曲線によるインフレ率をモデルの変数に加えたことからIS-MP-IA（inflation adjustment）モデルということもある（Romer（2000）等参照）。

ちなみにBlanchardはEconreporter（2016）でのインタビューに応じて，IS-LMモデルを現実的に改良するには，①伝統的なIS-LMモデルには中央銀行が定める一種類の利子率しかないので投資の決定に関与するもう一つの利子率を加える，②フィリップスカーブを追加する，③LM曲線を変更して中央銀行は利子率を決定する，という構造に改良すべきであるとしている（Blanchard（2008）も参照）。

金融政策にかかる政策決定の考え方について，近年，再び変更を迫られている。日本銀行は2%の「物価安定の目標」を踏まえ，2016年9月に「長短金利操作付き量的・質的金融緩和」という方針を打ち出し，長短金利操作（イールドカーブ・コントロール）とともにマネタリーベースの拡大方針を継続することを明らかにした。このように，IS-MPモデルで前提とする金利設定ルールのみならず貨幣供給も重視するという二元的な立場を示しており，現実には利子率か貨幣供給かという選択ではなく両者を包含した政策を保持している。その意味では金融政策をモデルに取り入れるのであればKing（2000）に近いものとなろう。

3.2　マクロ経済変数の選択とデータの出所

日本のマクロ経済を描写するために必要なマクロ変数を，上記の議論を参考に選択する。

IS–MP モデルを想定すると，IS 方程式に相当する実物面の変数が必要となるが，これは国内総生産（GDP）そのものとなる。IS 方程式はこの GDP と利子率の関係を記述するものであるから，二番目のマクロ変数として利子率が必要になる。本来なら日銀の金融調節の目安となる短期金利（コールレート）と長期金利の二つを検討するべきであるが(6)，本稿では 10 年物国債の流通利回り（INT）を採用する。

次いで金融政策に関連するマクロ変数であるが，これについてはマネーストック（M2）を採用する。また，フィリップス曲線を構成する変数として消費者物価指数（CPI）と失業率（UR）を加える。以上の 5 変数でマクロ経済の粗いながらも全体像を記述できると考えるが，海外との取引も重要な経済要因であることから，対ドルベースの為替レート（EX_US）も加えて 6 変数での VAR モデルの構築を行うこととしたい。

各変数については，GDP は内閣府「国民経済計算（GDP 統計）」，INT は財務省の資料等，M2 は日本銀行のマネーストック統計，CPI は総務省統計局「消費者物価指数」，UR は総務省統計局「労働力調査」，また EX_US は日本銀行の「外国為替市場」統計から得た。なお，すべてのデータの期種は四半期としている。

各データの詳細については以下の通りである。GDP については季節調整済みの実質 GDP の対前期比成長率を使用している。CPI は生鮮食品を除く総合指数の対前年比変化率を採用した。また UR は季節調整済みのデータをその水準値で利用する。M2 は月中平均残高の対前年比，EX_US は円ドルスポット市場の月中平均値の対前期変化率としている(7)。

3.3　マクロ変数の推移と単位根検定

分析の対象とした上記の 6 変数の推移を示したものが図 1 である。分析の対象期間は，「2008 年版国民勘定体系（2008 SNA）」に基づく 2015 年基準

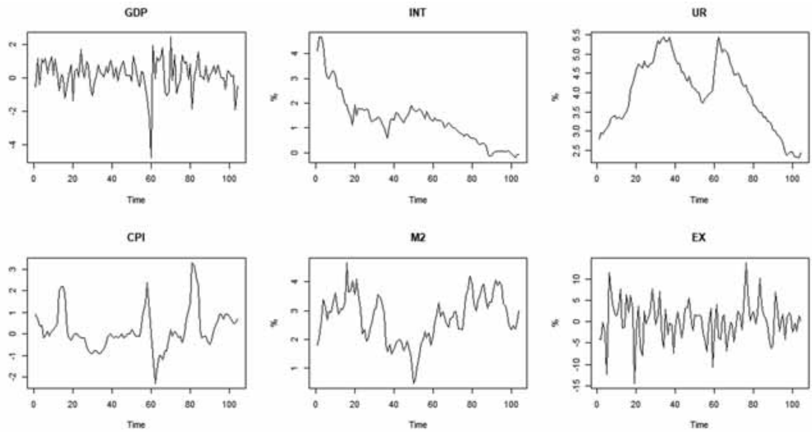


図 1　マクロ変数の時系列推移

表 1　変数の基本統計量

	GDP	失業率	利子率	CPI	M2	為替レート
平均	0.196	3.987	1.328	0.177	2.752	0.117
標準偏差	0.963	0.883	1.036	0.937	0.818	4.574
最大値	2.434	5.433	4.654	3.300	4.667	13.742
最小値	−4.816	2.300	−0.218	−2.300	0.467	−14.427

注：データの出所等は本文参照。

の国民経済計算において GDP のデータ等が入手可能な 1994 年第 1 四半期から 2020 年第 1 四半期までとした。これはコロナ禍における経済の変動が生じた直前の期間までである[(8)]。

各変数の基本統計量をまとめたものが表 1 にある。対象期間における平均値をみると，GDP 成長率は平均で 0.196％と非常に低い水準にあった。とりわけ 2009 年第 1 四半期はマイナス 4.82％とリーマンショックによる金融危機の影響で大幅に低下したことなどが影響している。一方，失業率は 3.99％であったが，これは直近（2021 年 7 月）の 2.8％と比べると 1％ポイント以上高い値であり，コロナ禍であるものの最近の労働市場は需給が逼迫してい

る状況にあることがわかる。CPI上昇率（消費者物価上昇率）は0.177%であり，日本銀行が掲げる物価の安定目標である2%には及ばない。また利子率は平均が1.328%と低いものの，CPI上昇率を考慮すると実質経済成長率を上回っている状態にあることが推測される。

BVARモデルによる分析を進める前に，分析対象の変数の定常性を確認しておく必要がある。

表2は各変数に対する単位根検定（ADF検定）の結果である。以下，ラグ次数の検定に関してはAIC基準をもとに定めた。表2の最初の二段は，水準変数に対して定数項を含めた場合と含めない場合の単位根検定の結果を示したものであるが，マネーストック（M2）と失業率（UR）は単位根があるとする帰無仮説をいずれの場合も棄却できなかった。そこで階差変数を作成して単位根検定をさらに行ったが（表2の最下段），この場合すべての変数について，単位根があるという帰無仮説を棄却することができた。

表2　単位根検定の結果（ADF検定）

	GDP	INT	M2	CPI	UR	EX_US
切片あり						
統計量	−10.941***	−2.575	−0.9822	−3.377**	−1.000	−4.586***
確率	0.00	0.101	0.7574	0.014	0.751	0.00
ラグの長さ	0	0	4	5	1	2
切片なし						
統計量	−10.778***	−3.065***	0.5948	−3.302***	−0.4429	−4.5969***
確率	0.00	0.003	0.8433	0.001	0.521	0.00
ラグの長さ	0	0	4	5	1	2
階差（切片なし）						
統計量	−7.375***	−9.812***	−5.302***	−7.456***	−6.428***	−15.520***
確率	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ラグの長さ	5	0	3	3	0	1

注：***は有意水準 1%，** は有意水準5%，**は有意水準10%で帰無仮説を棄却。
ラグの長さは赤池情報量基準（AIC）による。

以上の結果をもとに通常の VAR モデルを作成する場合には以下の二つの方法が妥当であると考えられる。一つめは，マネーストックと失業率は階差変数，その他の変数は水準変数として VAR モデルを構築することである。しかし 6 つの変数のうち 2 つの変数を階差変数とすることで，階差変数と定常変数の関係の解釈が難しくなる。二つめは，失業率とマネーストックの間に共和分関係が見いだされれば，6 つの変数を用いてベクトル誤差修正モデルを推定するというものである。しかしながらヨハンセン検定の結果，失業率とマネーストックの間には共和分が見いだせなかった。また，たとえこの 2 変数に共和分関係が見いだせたとしてもその経済的解釈は難しいと考えられる。

以上を踏まえると，マネーストックと失業率には単位根があるということを前提として，すべての変数についてその水準の値で BVAR モデルを構築する方が望ましいと考えられる。

4. ベイジアン VAR モデルによるショック分析

4.1　BVAR パッケージの利用による推定のステップ

前節では各変数の定常性を確認したが，これに基づいて BVAR モデルの推定を行う。推定に際しては R と Kuschnig and Vashold によって開発された BVAR パッケージを利用した。以下では，推定及び推定結果の利用のステップについて記述する。

BVAR モデルの推定では最初に事前分布の設定を行い，また Giannone et al.（2015）にしたがった付加的な事前分布も設定するかどうかを決める必要がある。ミネソタ事前分布では各変数が単位根を持つという事前の想定を維持するものの，変数間の共和分を許容するという意味での sur や soc については，3.3 の結果からこれを含めないこととする(9)。次に，事前分布

とデータから得られる尤度関数の情報を用いて事後分布を導くためにMCMC を実行するが，その方法や設定すべきパラメータを決める必要がある。その上で計算を実行した結果を保存し，推定結果からインパルス応答関数の計算やサンプル外への前方予測を試みることとしたい。

ミネソタ分布事前分布については三つのハイパーパラメータ λ（lambda），α（alpha），ψ（psi）を設定する必要がある。このうち，事前分布のタイトさを定める λ は事前に設定した値をもとにタイルの U 指標などを用いて最適値を探索することになる（川崎（1991））。λ は 0 に近いほど事前分布に縛られ（単位根過程にしたがうという事前分布に縛られ），大きいほど事前分布の縛りは小さくなって，サンプルからの尤度関数の写しに近くなる。一般に BVAR に関する先行研究では，λ は事前に 0.2 と置かれることが多く，ここでもそれに倣うこととする。α はラグ次数が大きくなるにつれその影響力が低下する程度（遠いラグの shrinkage の程度）を示す指標であり，一般的には 1.0 もしくは 2.0 とすることが多いが，本稿では 2.0 とした。最後に，ψ は自分以外の他のラグ変数の重要性をコントロールする。BVAR パッケージではデフォルトで AR (p) モデルを推定し，その情報を元に自動的にセットされる。

BVAR モデルの係数の事後分布を求める MCMC の計算では，メトロポリス・ヘイスティングス法を採用し，全体で 15000 回の計算を行い，最初の 5000 回をバーンイン期間として捨て，残りの 10000 回の計算結果における中位値を係数の推定値として用いる。なお，BVAR モデルは四半期データを用いていることからラグ次数は 4 とした。この BVAR モデルの推定結果をもとに，インパルス応答関数等を計算することになる。

4.2　BVAR モデルの推定

図 2 はハイパーパラメータである λ の密度関数と探索の過程を示したもの

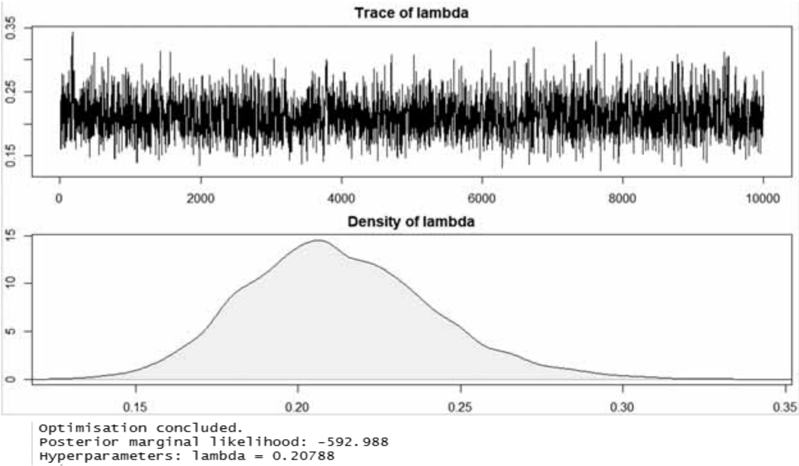


図 2　λ の推定結果

表 3　BVAR モデルの推定結果（係数）

	GDP	UR	CPI	INT	M2	EX_US
const.	−0.265	−0.081	0.406	0.022	0.669	1.357
GDP(−1)	0.278	0.047	0.016	0.006	−0.011	0.014
GDP(−2)	0.011	−0.024	0.051	0.011	−0.017	0.148
GDP(−3)	−0.070	−0.003	0.004	−0.001	−0.034	0.051
GDP(−4)	−0.003	−0.003	0.010	−0.001	0.001	0.000
UR(−1)	−0.054	1.027	−0.173	0.053	0.040	−0.625
UR(−2)	−0.038	−0.013	0.037	0.005	−0.043	−0.068
UR(−3)	0.05	−0.009	0.012	−0.013	−0.030	0.228
UR(−4)	0.048	−0.008	0.011	−0.009	−0.015	0.208
CPI(−1)	−0.117	−0.015	0.946	0.000	−0.034	0.050
CPI(−2)	−0.091	0.019	−0.104	−0.006	0.027	0.521
CPI(−3)	0.012	0.008	−0.064	−0.003	−0.004	−0.107
CPI(−4)	−0.004	0.006	−0.050	0.001	−0.004	−0.045
INT(−1)	0.198	0.015	0.008	0.899	−0.041	−0.743
INT(−2)	0.008	0.004	−0.018	−0.013	−0.015	0.232
INT(−3)	−0.082	0.017	−0.001	0.003	0.014	0.318
INT(−4)	−0.025	0.013	0.005	0.019	0.014	0.479
M2(−1)	0.061	0.019	−0.018	−0.025	0.917	−0.355
M2(−2)	−0.027	−0.001	0.045	−0.026	−0.034	0.152
M2(−3)	0.048	−0.003	0.013	0.003	−0.022	−0.148
M2(−4)	0.021	−0.001	−0.008	0.012	−0.015	0.104
EX_US(−1)	0.040	−0.002	0.005	−0.001	0.024	0.299
EX_US(−2)	−0.030	0.000	−0.006	0.003	−0.005	−0.251
EX_US(−3)	0.020	−0.001	0.011	0.000	0.012	0.198
EX_US(−4)	−0.011	0.000	0.005	−0.002	−0.002	0.000

である。上記で述べたように初期値として 0.2 を与えたが，最適値は 0.20788 となっている。

表 3 は BVAR モデルの係数推定値（中位値）をまとめたものである。各変数の 4 期までの自己ラグの係数の合計を見ると GDP（成長率）では 0.216, 失業率は 0. 997, CPI（物価上昇率）は 0.728, 利子率は 0.908, M2（増加率）は 0.846, また為替レート（変化率）は 0.246 となっている。失業率，利子率及び M2 増加率の係数合計値は 1 に近いが，各変数には単位根の疑いがあることから，表 2 の結果とも整合的である。

係数の推定値は既に述べたように MCMC による事後分布の密度関数を計算した上での中位値になっているが，実際の事後分布の密度関数についての例を示したものが図 3–1 と図 3–2 である。図 3–1 は GDP 方程式における 1 期前の自己ラグ変数の推計値であり，表 3 から 0.278 となっている。また，図 3–2 は CPI 方程式における失業率の 1 期ラグ変数の係数であり，これはフィリップス曲線の係数とも読み取れるがその中位値は－0.173 であり，その状況を示したものが図 3–2 となっている。

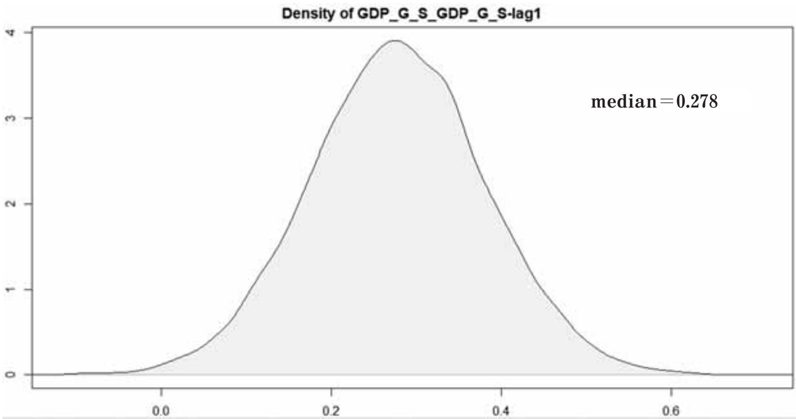


図 3–1　GDP 方程式の GDP（－1）の係数

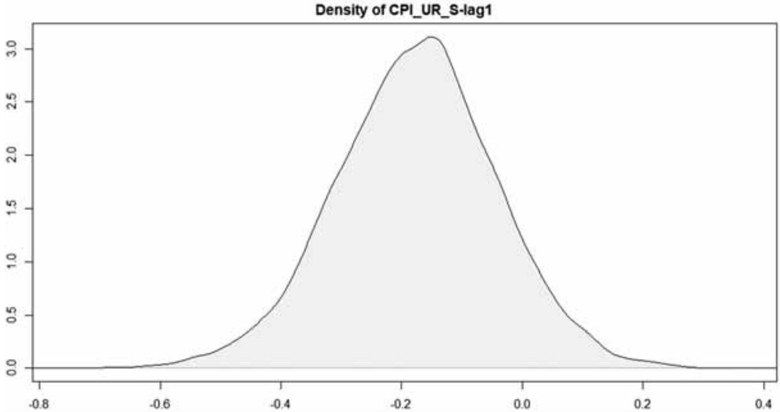


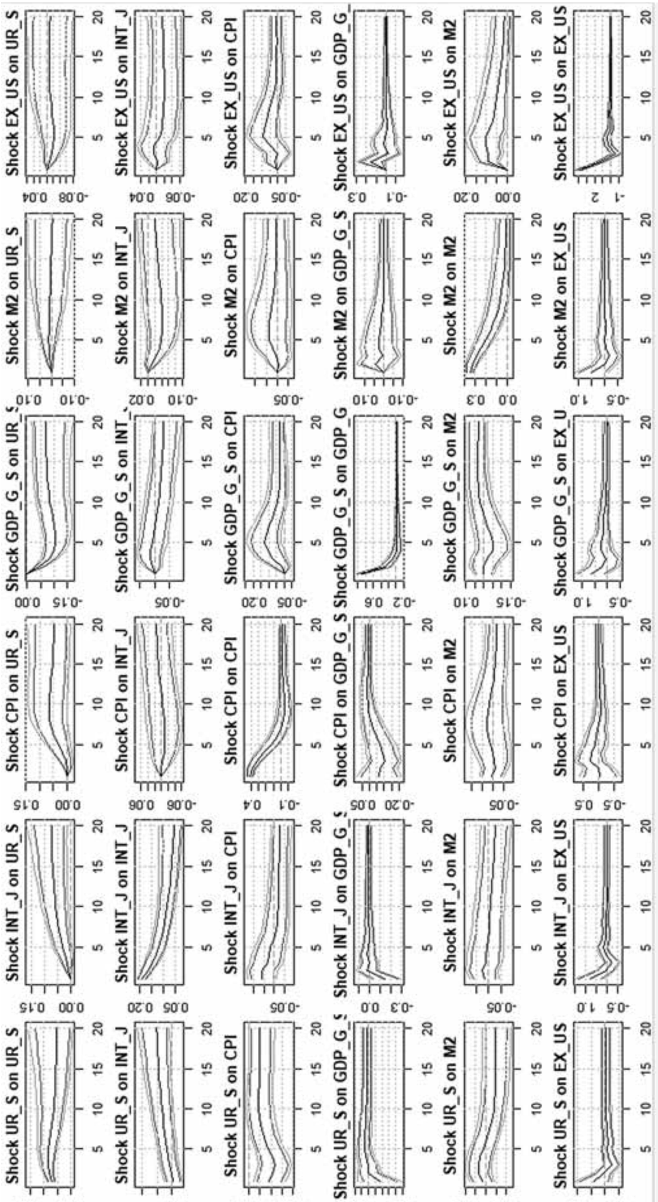
図 3-2　CPI 方程式の UR（−1）の係数

4.3　BVAR モデルによるインパルス応答と予測

BVAR モデルの最大の目的は外生的なショックが内生変数に及す動学的影響を検証することにある。そのために使用されるのがインパルス応答関数である。図 4 がインパルス応答関数の計算結果である。なお，計算期間は 20 期（5 年），またショックはコレスキー分解によって他のショックとは独立になるようにしている。なお図では 5%と 10%の信頼区間についても示してある。

インパルス応答関数のうちいくつかの特徴的な結果を見ておこう。図 5 は図 4 のうち，GDP 及び為替レートのショックが失業率，消費者物価上昇率（CPI）及び利子率に及す影響を取り出したものである。GDP のショックは失業率を低下させ，消費者物価上昇率を高めるが，利子率にはほとんど影響していない。すなわち経済成長率を押し上げる外生的なショックは失業率を低下させ，かつ消費者物価上昇率を引上げるインパクトを持つということである。為替レートのショック（円安方向）は消費者物価上昇率に正のインパクトを与えるものの，しかし失業率や利子率にはあまり影響していない。

図 4　インパルス応答関数



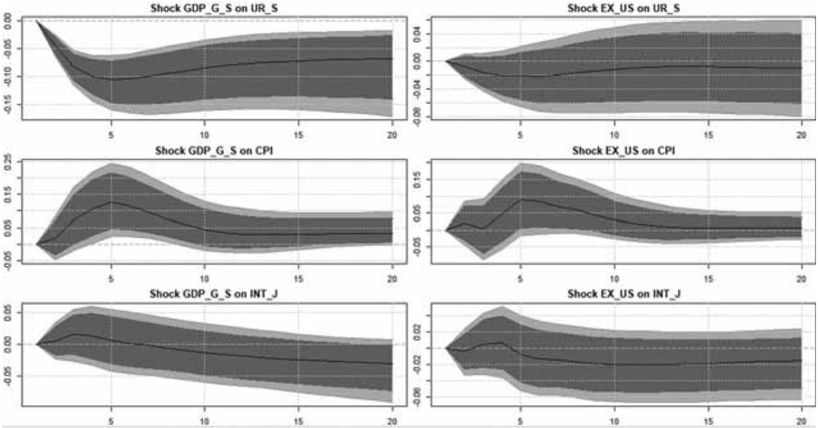


図 5　インパルス応答関数：GDP と EX のショックが UR, CPI, INT に及ぼすショック

図 4 からその他の特徴ある結果についても述べておこう。外生的な利子率へのショックは失業率を高めるとともに，反対に失業率のショックが利子率を高めるという結果が得られている。フィリップス曲線の形状とも関連するが，失業率のショックは消費者物価上昇率を引き下げる方向に働く一方で，消費者物価上昇率へのショックは失業率を高めている。これはやや矛盾する結果であり，解釈が難しい。最後に興味深いのは，M2 へのショックは CPI をほとんど高めていないという点がある。貨幣供給の拡大が物価に対して反応的ではないことは金融政策を考える上で大きな示唆となるものである。

図 6 は 6 つの変数のうち GDP（経済成長率）と消費者物価上昇率の将来予測を行った結果である。本分析のサンプル期間は 2020 年第 1 四半期までであり，これコロナ禍以前のデータとなっている。コロナ禍による経済への影響が構造的なものである場合には，この予測結果は留意して解釈する必要があることは言うまでもないだろう。経済成長率をみるとその予測値の中位値はほぼゼロであり，過去のデータからは今後の成長を見込むことは難しい。一方，消費者物価上昇率については概ね 1%程度の上昇が見込まれるが，こ

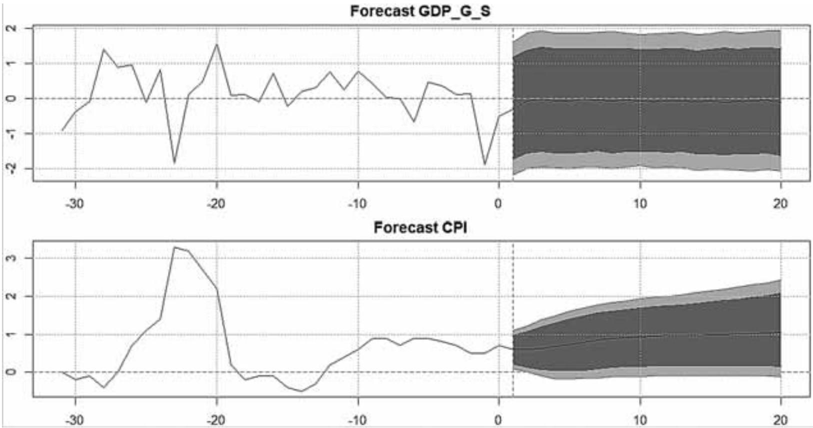


図 6　20 期先までの予測値（GDP, CPI）

れも日本銀行の安定的な物価目標である 2%には届かないことを示している。

お わ り に

本論文は，BVAR モデルを紹介するとともに，これを日本経済のマクロデータに適用した場合の実証結果を示したものである。最初に従来の VAR モデルが有する課題をまとめ，ベイジアン的アプローチによってこの課題をどう解決するかを示した。その後，実証分析で使用するマクロ経済データの概要や時系列的な特徴を整理するとともに，BVAR モデルの推定を行い，インパルス応答関数等を計算して，マクロ経済変数相互の関係について考察を行った。

近年，経済のみならず広い分野における公的データの整備が進み，時系列データを利用する環境の整備が進んでいる。時系列分析においても様々な手法が開発され，またベイズ統計の考え方が幅広く取り入れられるなど，その進歩は急速である。BVAR モデルは，こうした背景をもとに発展したもの

である。その有用性はすでに述べてきたところであるが，しかし BVAR モデルが従来の VAR モデルに代わって一般化していく道筋については課題が残る。たとえば，BVAR モデルの推定に MCMC を用いるなどのことから係数推定の直感的な解釈が難しいこと，ミネソタ事前分布の設定などにおける “事前の” 信念に対する疑義があること（これはベイズ統計一般に言えることであるが），また事前分布の設定次第では従来の VAR モデルの推定結果と大きな違いはないこと，などである。

従来の VAR モデルが適用しにくい状況（各変数が単位根を有する状況や次元の呪い）への対応として BVAR モデルが適用されているわけであるからその有用性は高いものの，一般に用いられるツールとして定着するかどうかは依然として不透明であると考える。しかしその一方で，BVAR モデルの発展形として TVP（Time Varying Parameter 時変パラメータ）-VAR モデルなどが開発されている。今次のコロナ禍における経済構造の変化などを考慮すると，こうした時変型パラメータを持つモデルの有用性がさらに高まるものと考えられる。

現在だけでなく今後においても，マクロ経済変数（及び社会的な様々な変数）の時系列データの分析には多変量時系列モデルの利用が不可欠である。ベイズ的な考え方の進展や MCMC の操作性の改善などがさらに進めば，BVAR モデルが多変量時系列分析の中核を担っていくことになるだろうと考える。

《注》

（1） VAR モデルがマクロ経済変数を扱うことから，この点に関する取り扱いについては多くの議論が行われてきた（例えば Ventosa-Santaulària（2008）など参照）。

（2） 一つだけ非定常な変数がある場合には共和分関係を見いだすことはできない。

（3） こうした点から年次ベースの大規模な VAR モデルの構築はさらに難しいと

言える。

（4） 以下では Koop and Korobilis (2010), Kuschnig and Vashold (2019) 及び Miranda-Agrippino and Ricco (2018) を主として参照した。

（5） 詳細については Giannone et al.（2015）を参照されたい。

（6） Econreporter（2016）における Blanchard の議論などを参照。

（7） CPI と M2 は季節調整を回避するために対前年比の値を採用した。

（8） 今後，時系列データを扱う場合，コロナ禍における経済の変化をどう捉えるかが重要なポイントになる。VAR モデルによる分析では例えば Lenza and Primiceri（2020）などが参考になる。

（9） soc は時系列データの初期予測値でもっとも最適なのはその時点の値そのもの（現在の値が将来の予測値）であることを表現するダミー観測値であり，sur はデータ間に共和分関係を許容し，各変数をその平均値に近づかせるものであって，結果的に変数全体が単位根過程であると見なせることになる。

参考文献

鵜飼博史・鎌田康一郎（2004）「マネタリー・エコノミクスの新しい展開：金融政策分析の入門的解説」，日銀レビュー・シリーズ，2004-J-8

加藤久和（2014），「マクロ経済モデルについて」，政経論叢第82巻第3・4号，明治大学政治経済研究所，pp. 263–313.

川崎能典（1991），「Bayesian Vector AutoRegression ── その手法の整理と予測能力の検証」，金融研究第10巻第1号，日本銀行金融研究所，pp. 79–101.

Blanchard, Olivier（2008), “The State of Macro,” MIT Department of Economics Working Paper No. 08–12, Massachusetts Institute of Technology, Department of Economics.

Econreporter（2016). “DSGE model and the State of Macroeconomics, Q&A with Olivier Blanchard,’ 2016/11/20, https://en.econreporter.com/2016/11/blanchard-on-dsge-and-the-state-of-macroeconomics-witgt21-conversation- series/（2021年10月5日確認）

Enders, Walter（2014), *Applied Econometric Time Series 4th. ed.,* Wiley.（新谷元嗣・藪友良訳（2019）『実証のための計量時系列分析』有斐閣）

Galí, Jordi（1992), “How Well Does The IS–LM Model Fit Postwar U.S. Data?”, *The Quarterly Journal of Economics,* vol. 107, issue 2, pp. 709–738.

Giannone, Domenico, Michele Lenza, and Giorgio E. Primiceri（2015), “Prior Selection for Vector Autoregressions.” *Review of Economics and Statistics,* Vol. 97, No. 2, pp. 436–451.

Kasuya, Munehisa and Tomoki Tanemura (2000), “Small Scale Bayesian VAR Modeling of the Japanese Macro Economy Using the Posterior Information Criterion and Monte Carlo Experiments,” The Bank of Japan or Research and Statistics Department Working Paper, 00–4.

King, Robert G. (2000), “The New IS–LM Model: Language, Logic, and Limits,” *FRB Richmond Economic Quarterly,* Vol. 86, No. 3, Summer 2000, pp. 45–104

Koop, Gary and Dimitris Korobilis (2010), “Bayesian Multivariate Time Series Methods for Empirical Macroeconomics,” *Foundations and Trends in Econometrics,* Vol. 3, No. 4, pp. 267–358.

Kuschnig, Nikolas and Lukas Vashold (2019), “BVAR: Bayesian Vector Autoregressions with Hierarchical Prior Selection in R,” Department of Economics Working Paper Series, 296. WU Vienna University of Economics and Business.

Lenza, Michele and Giorgio E. Primiceri (2020), “How to estimate a VAR after March 2020,” European Central Bank Working Paper, No. 2461.

Lucas, Robert Jr, (1976), “Econometric policy evaluation: A critique,” Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, vol. 1, No. 1, pp. 19–46,

Miranda-Agrippino, Silvia and Giovanni Ricco (2018), “Bayesian vector auto regressions,” Staff Working Paper No. 756, Bank of England.

Nelson, Charles and Charles Plosser (1982), “Trends and random walks in macroeconmic time series: Some evidence and implications,” *Journal of Monetary Economics,* Vol. 10, pp. 139–162.

Romer, David (2000), “Keynesian Macroeconomics without the LM Curve,” *Journal of Economic Perspectives,* Vol. 14, No. 2, pp. 149–169.

Sims, Christopher A. (1980), “Macroeconomics and Reality.” Econometrica. January, Vol. 48, No. 1, pp. 1–48.

Stock, James and Mark Watson (1993), “A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in Higher Order Integrated Systems,” Econometrica, Vol. 61, No. 4, pp. 783–820.

Stock, James and Mark Watson (2014), *Introduction to Econometrics 3rd ed.,* Pearson Education Limited.

Toda, Y. Hiro and Taku Yamamoto (1995), “Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes,” *Journal of Econo-*

metrics, Vol. 66, pp. 225–250.
Ventosa-Santaulària, Daniel (2008), "Spurious Regression," MPRA Paper No. 59008.