ヘテロな分散システムの負荷均一化の最適解

1715038 清水　豪士

富山県立大学　情報基盤工学講座

November 15, 2019

はじめに

背景

コンピュータの登場により解析手段は多様化し、離散的な方程式の重要性も増した。
その重要課題の 1 つとして、動的でヘテロな分散システムの負荷均一化問題がある

目的

ヘテロな分散システムの負荷均一化を考え、計算手法及びスキームや実装技術に依存しない、最適解の性質を明らかにする

はじめに

従来研究

並列計算機や分散システムにおいてできるだけ少ない通信回数や通信料で、できるだけ素早く負荷の均一化が行えるよう、様々なアルゴリズムがこれまで提案されてきた
それらは処理が単純であるためしきい値の設定が難しいなどの問題がある
一方、無駄な負荷移動をさけるため、移動すべき最適な負荷量の計算と、負荷の移動という 2 フェーズに基づく方法が考えられている
代表的なものに 拡散法（DF 法）がある

DF 法

非同期、マルチポートに適し、局所的な拡散による反復計算によって各辺上の負荷移動量を求めた後に、実際の負荷移動を行う
DF 法は本質的には拡散方程式を反復的に解いて負荷移動量を求める手法で、無駄な巡回フローをもたない最適解を与える

負荷均一化問題

サーバ性能が異なるヘテロな分散システムの負荷均一化問題を考える

用語の定義

性能：各頂点のサーバ u∈ V の性能を重み mv(u) で表し、プロセスの処理スピードで定義する

コスト：辺 e=(u,v)∈ E の重み m_E(e) はコストの逆数を表し、サーバ u,v 間の通信速度などで定義す
インターネット環境では、速度が変動して値が定まらないと考えられるので、通信遅れの偏差などによる通信の不安程度でコストを定義する
ただし、重みの意味が変われば、最適化の評価尺度が変わる

負荷量：各サーバ u∈ V の負荷量を f(u) で表す。サーバが保持する未処理なプロセスの数を、性能 mv(u) で割って換算した量で定義する

従来のラプラシアン

従来のラプラシアンネットワークは、負荷量ベクトルに作用させたその u 成分表示で以下のように定義される

$$Lf(u) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{v\sim u} m_E(e)\left(f(v)-f(u)\right), \qquad (1)$$

ここで v∼u は u の隣接点 v の集合を表す

負荷均一化の意味としては、上記の式によって、各頂点 u のサーバが隣接点 v との負荷量の差に従って移動すべき量を求める点が本質的である

従来のラプラシアン

サーバ性能の違いを重み m_V (u) で表現した離散ラプラシアン L_c は以下のようになる

$$L_c p(u) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{v \sim u} m_E(e) \left(\frac{p(v)}{m_V(v)} - \frac{p(u)}{m_V(u)} \right), \tag{4}$$

従来の L と L_c では、式 (1) と 式 (4) の右辺における各辺の両端の頂点での出入り量は等しくなる
これは、総負荷量とプロセス総数が均一化処理の各時刻で変動せず保存されることを意味する

非対称な新しい作用素

サーバ性能の違いによって辺の両端で重み値が異なることから非対称行列となる
離散ラプラシアンを以下のように掲示する

非対称行列の離散ラプラシアン

$$\mathcal{L}f(u) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{v\sim u\in E} g^{ii}(u)(f(v)-f(u)) \tag{5}$$

$$-\sum_{v\sim u\in E} \Delta g^{ii}(u)(f(v)-f(u)), \tag{6}$$

$$= -\sum_{v\sim u\in E} g^{ii}(v)\,(f(v)-f(u))\,, \tag{7}$$

非対称な新しい作用素

式 (7) を 式 (9) のように表現する

$$g^{ii}(v) = \frac{m_E(e_i)}{m_V(u)} > 0, \tag{8}$$

このように表現すれば、以下の調和振動子のばねモデルに一致する

$$\Delta_P f(u) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m_V(u)} \sum_{v \sim u} m_E(e_i)(f(v) - f(u)), \tag{9}$$

このとき、 m_V (u) $\neq m_V$ (v) $>$ 0
ばね定数 m_E $(e_i) = m_E(\bar{e_i})$ $>$ 0 となる

非対称な新たな作用素

提案した作用素 $\mathcal{L}$ と等価な式 (9) は負荷均一化において
負荷量 f(v) と自分自身の性能 m_V(u) を知るだけでよい
これは従来の L_c による式 (4) のように相手の性能 m_V(v) を知る必要がない

⬇

通信相手の性能を隠蔽して負荷均一化が行える
各頂点 u における性能と負荷量の積がプロセスなので

$$m_V(u)f(u) = p(u), \tag{10}$$

式 (4) は式（9）及び式（8）を伴う式（7）に帰着する

非対称な新たな作用素

式 (7) の $\mathcal{L}$ に対して、以下の定理が成り立つ

［定理 1］ グリーンの公式

$$\int_M \mathcal{L} f_1 f_2 dx = \int_M (df_1, df_2)_G dx = \int_M f_1 \mathcal{L} f_2 dx, \tag{11}$$

$$(df_1, df_2)_G = (\mathcal{L} f_1, f_2)_G = (f_1, \mathcal{L} f_2)_G, \tag{12}$$

$$(df_1, df_2)_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{e_i, \bar{e}_i} df_1(e_i) df_2(e_i) m_E(e_i), \tag{13}$$

$$(\mathcal{L} f_1, f_2)_G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \in V} \mathcal{L} f_1(u) f_2(u) m_V(u), \tag{14}$$

$df_1(e_i) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(v) - f_1(u)$, $df_2(e_i) \stackrel{\text{def}}{=} f_2(v) - f_2(u)$.

［定理 2］ 最大最小の原理

境界条件のない有限な連結無向グラフ (V, E) において，$\forall u \in V, \mathcal{L} f(u) = 0$ を満たす $\mathcal{L}$-調和関数 $f(u)$ は定数である.

最適な負荷均一解の性質

$\mathcal{L}$ による拡散方程式（式（１５））を考える

$$\frac{\partial f(u)}{\partial t} = -\mathcal{L}f(u), \tag{15}$$

DF 法はある二次計画問題を解くことと等価で最適な負荷均一解を与えることから、以下に示す「初期負荷配分に依存した総負荷量の変化」は手法によらず、性能が異なるヘテロな分散システムの負荷均一化に本質的なものとなる
すなわち、その最適な負荷均一解で以下の現象は必ず起こる

［定理 3］　重み付き総負荷量の保存
拡散方程式 (15) は重み付き総負荷量を保存する．すなわち，$\forall t \geq 0$ で，

$$-\int_M \mathcal{L}f(x)\,dx = 0,$$

$$\sum_{u\in V} m_V(u)\times\frac{\partial f(u)}{\partial t} = -\sum_{u\in V} m_V(u)\times\mathcal{L}f(u) = 0,$$

$$\sum_{u\in V} m_V(u)\times f^0(u) = \sum_{u\in V} m_V(u)\times f(u). \tag{16}$$

むすび

定理 3 から、式（１０）に従ったプロセス総数に相当する重み付き総負荷量 $\sum_{u\in V} m_V$(u)f(u) は保存されるが、総負荷量自身の値 $\sum_{u\in V}$f(u) は変化し得ることがわかった
定理 1 において $\forall u\in V$, f_1(u) $=$ f_2(u) とすれば $\sum_{u\in V} \mathcal{L}f_1(u)f_1(u)m_V$(u) $\geq$ 0 を得る
これにより

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\sum_{u\in V} m_V(u)(Ave - f(u))^2 \\
&= 2\sum_{u\in V} m_V(u)(Ave - f(u)) \times \frac{\partial f(u)}{\partial t} \\
&= -2\sum_{u\in V} \mathcal{L}f(u)f(u)m_V(u) \leq 0.
\end{aligned}
$$

すなわち、拡散方程式 (15) では
平均初期負荷量 Ave$=\sum_{u\in V} f^0/|V|$ と各時刻 t の負荷量 f(u) との差の重み付き二乗和を単調減少させながら解が収束する

むすび

1. サーバ性能が異なるヘテロな分散システムの負荷均一化に対する DF 法を、非対称行列であらわされる $\mathcal{L}$ で規定することで、通信相手のの性能を隠蔽したうえで負荷均一化が実現できることを示した
2. ヘテロな分散システムの負荷均一化における性質として、その最適解が総負荷量を保存しないこと、および、DF 法としての拡散処理が発散や周期解をもたず、初期負荷配分に従ったある保存量をもって収束することを明らかにした