

超離散化法,及びセルオートマトンモデルによる交通流の研究

大阪大学大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻
友枝 明保

平成 18 年 3 月 1 日

目次

第 1 章	はじめに	4
1.1	keywords	4
1.2	はじめに	4
第 2 章	交通流理論	6
2.1	交通流とは	6
2.2	交通流理論の歴史	6
2.3	交通流の測定	6
2.4	交通渋滞の原因	7
第 3 章	交通流でよく用いられる言葉、図、及びその関係	9
3.1	交通量	9
3.2	密度	9
3.3	速度	9
3.4	3つの基本量の関係	10
3.5	基本図	10
3.6	その他の言葉	10
第 4 章	基本図と metastable state(メタ安定分岐)	12
4.1	metastable state とは	12
4.2	ボトルネックのない道路での実験	13
第 5 章	交通流のアプローチ	17
5.1	マクロなアプローチ	17
5.1.1	流体モデル	17
5.2	ミクロなアプローチ	17
5.2.1	追従モデル	17
5.2.2	CA(Cellular Automaton) モデル	18
第 6 章	OV モデルから Stochastic OV モデルへ	19
6.1	追従モデル	19
6.2	OV モデル	20
6.3	SOV モデル	23
6.4	ASEP	25
6.5	ZRP	25

第 7 章 セルオートマトン (Cellular Automaton)	29
7.1 セルオートマトン法とは	29
7.2 交通流理論における CA モデルとは	29
7.3 1 次元セルオートマトン	30
7.4 Wolfram のクラス分け	31
7.5 Wolfram のセルオートマトン理論に対する 20 の問題	31
第 8 章 Burgers 方程式の超離散化	33
8.1 超離散化の流れ	33
8.2 Burgers Equation	33
8.3 Discrete Burgers Equation	34
8.4 Ultradiscrete Burgers Equation	35
8.5 超離散バーガーズ方程式の交通流的解釈	36
8.6 Burgers Cellular Automaton	36
8.7 Elementary BurgersCA の特徴	37
8.8 それぞれの Burgers 方程式の解の振る舞い	39
8.9 超離散化という言葉の意味	41
第 9 章 超離散化の周辺	42
9.1 超離散化と Max-Plus 代数に関する公式	42
9.2 超離散をめぐる今後の課題	43
9.2.1 超離散化についての条件	43
9.2.2 複素数値の方程式に対する超離散化	44
第 10 章 Euler-Lagrange 変換	46
10.1 EBCA の Euler-Lagrange 変換	46
10.2 Euler-Lagrange 変換のまとめ	48
10.3 Lagrange representation of rule-184CA モデルと OV モデルとの比較	49
10.4 流体モデルと CA モデルと追従 (OV) モデルの「形式的」関係	50
第 11 章 様々な拡張された CA モデル	51
11.1 rule-184 CA (Burgers CA) model	52
11.2 Slow Start CA(SISCA) model	53
11.3 Quick Start CA(QSCA) model	55
11.4 Fukui Ishibashi CA(FICA) model	56
11.5 Extended Burgers CA model ver.1(EBCA1)	57
11.6 Extended Burgers CA model ver.2(EBCA2)	59
11.7 Generalized Burgers CA(GBCA) model	61
11.8 Nagel Schreckenberg CA(NSCA) model	63
11.9 Velocity-Dependent Randomization CA(VDRCA) model	65
11.10 Noisy BurgersCA(NBCA) model	67

第 12 章 追い越しのない CA モデルの Euler-Lagrange 変換	69
12.1 GBCA 版 Euler-Lagrange 変換	69
12.2 NoisyBCA 版 Euler-Lagrange 変換	70
第 13 章 Euler-Lagrange 変換の問題点	71
第 14 章 Slow-Start モデルの Euler-Langrange 変換	72
14.1 1 車線 Slow-Start モデルの Euler-Lagrange 変換	72
第 15 章 SISCA モデルの変換	78
15.1 2 時刻 2 値 3 近傍 SISCA モデルから 1 時刻 3 値 3 近傍 SISCA モデルへ	78
15.2 定式化へ	78
15.3 2 車線モデルの構成	80
15.4 実際の 2 車線モデルの特徴	84
第 16 章 結論	86
謝辞	87
参考文献	87
APPENDIX	92

第1章 はじめに

1.1 keywords

交通流 (traffic flow)・セルオートマトン (Cellular Automaton/Automata)・超離散 (Ultradiscretization)・Euler-Lagrange 変換・CA モデル・SIS(Slow-Start) モデル・metastable state(メタ安定分岐)・相転移 (phasetransition)・two-lane モデル

1.2 はじめに

道路につきものの渋滞現象は、輸送効率の低下・エネルギーの消費・環境悪化など、様々な形で我々に損失を与えている。国土交通省道路局 [1] によると、現在の状況を渋滞のない状況と比べると、その損失時間は全国で「年間約 38 億時間」になると言われており、一人当たりに換算すると「年間約 30 時間」が渋滞によって失われ、この損失時間を金額に換算すると、経済的損失は全国では「年間約 12 兆円」、一人当たりでは「年間約 9 万円」にも達すると言われている。排気ガスに関しては、速度が $1/4$ になると環境への負荷は約 2 倍、さらにエネルギーに関しては、速度が $1/4$ になると燃料の消費量は約 2.5 倍にもなる。もちろん環境に良いエネルギーを使う車や、低燃費の車も必要になってくるが、交通渋滞の仕組みを研究し、交通渋滞を予測できるよう有効なシミュレーターを作り出すことが今求められている。

しかし、交通渋滞には基本的なメカニズムについてでさえ、まだまだ解明されていない現象が数多く存在する。中でも、高速道路上の自動車交通流の挙動の問題、特に、自然渋滞における自由走行相から渋滞相への相転移現象は古くから研究されているが、複雑で今日でもはっきりとわかっていない。今までに交通流の研究として、様々な角度からのアプローチが試みられ数多くのモデルが構成されてきた.[2], [3]

交通流のモデルには流体モデル [4], [5]・追従モデル [6], [7], [8], [9]・CA(Cellular Automaton/セルオートマトン) モデル [10], [11], [12], [13], [14] と、大きく 3 種類のモデルに分けることが出来るが、中でも CA によるモデルは、数値計算に適しており、最近のコンピューターの性能の向上に伴って盛んに研究されている。CA モデルの特徴は、ルールベースでモデルを構築することができ、実際の道路の配置に対して、車線変更や合流分岐などをモデルに組み込みやすいという利点がある。これらは従来の微分方程式によるアプローチでは扱えず、CA モデルが最も有用な手法であると言える。

上で述べたように、交通流のモデルは大きく 3 種類のモデルに分けることができ、今までそれぞれが独立して研究してきた。しかし近年、流体モデルの基本である Burgers 方程式が Burgers Cellular Automaton に変換できる「超離散化」という手法が発見された.[15] この BurgersCA は今日の様々な CA モデルの基盤となっている。さらに、この BurgersCA から追従モデルの一つである最適速度 (OptimalVelocity) モデル [8] と呼ばれるモデルを形式的に導き出す「Euler-Lagrange 変換」が生み出された.[16] これによって CA モデルは今まで以上に交通流モデルの中で重要な役割を担っていると言えるであろう。

しかし,BurgersCA とその Euler-Lagrange 変換で得られた OV モデルを比較すると, 摾乱^{*1} に対して安定, つまり車列が常に安定な BurgersCA から車列の不安定性を持つ OV モデルが導かれていることになる. これは,BurgersCA が OV モデルの安定な場合のパラメータに対応しているからであり, 車列の不安定性は見られないと考えることができる. そこで, 交通流の本質である車列の不安定性, つまりメタ安定分岐を持つモデルとして SlowStartCA(SISCA) モデルを用いて, その Euler-Lagrange 変換を考え, OV モデルとの対応を考えていく.

本論文の構成は以下の通りである.

まず, 第 2 章で交通流理論の解説と, 実際の高速道路交通におけるデータから高速道路に見られる渋滞現象を解説する. 次に, 第 3 章では, 交通流で用いられる用語や道路特性を表現する基本図について解説する. 第 4 章で実際の高速道路交通流の基本図に見られる metastable state について述べ, 交通流の不安定性について紹介する. そして, 第 5 章では, 交通流のアプローチについて説明する. 第 6 章では OV モデルのアプローチについて少し紹介し, 今注目されている StochasticOV モデルについて解説する. また, 第 7 章で, CA 理論について説明し, Wolfram の書いた 20 の問題を列挙する. さらに, 第 8 章で超離散化について解説し, 第 9 章で超離散化の公式や問題点についてまとめる. 第 10 章で Euler-Lagrange 変換について解説する. 第 11 章では rule-184CA(BurgersCA) モデルから拡張された様々な CA モデルについて基本図の metastable state の有無に注目しながら紹介する. 第 12 章では追い越しの効果を持たない CA モデルの Euler-Lagrange 変換について解説する. 第 13 章から本論に入り, metastable state がある SISCA モデルに対して Euler-Lagrange 変換を考えいく. 追い越しの効果が入ると Euler-Lagrange 変換は困難であることが知られている. そこで, 第 14 章では, 追い越しの効果が入ってしまい Euler-Lagrange 変換が困難である従来の SISCA モデルに対して, 追い越し効果の入らない L (車線数)=1 の場合の Euler-Lagrange 変換ができたので示す. 第 15 章では, Euler-Lagrange 変換の困難な SISCA モデルの問題点について述べ, 今までの SISCA モデルの動きをもち, 問題点を解消できそうな新しいモデルの構成を行なう. また, 2 車線モデルの特徴を説明し, 新しく構成した 1 車線 SISCA モデルの拡張として 2 車線モデルの構成を考え, そのモデルによる考察を行なう. 最後に, 第 16 章で結論を述べる.

Appendix では, ある初期状態から始めた ElementaryCA の各ルールに対する時間発展の様子を示す.

^{*1}擾乱 (ジョウラン):定常状態からの乱れ (大辞林 第二版)

第2章 交通流理論

2.1 交通流とは

道路上の自動車の動きを、多数の車両による流れとしてとらえるとき、それは道路交通流と呼ばれる。交通流が道路と車両の間で、また車両同士で相互関係を持ち、ドライバーは常に安全に走行しようと行動をとることから、交通流には一定の特性が見られる。このような特性を知ることは、交通流の安全で円滑な流れを確保するための道路及び付属施設の設計、ならびに交通運用管理手段を計画する上で重要である。^{[17], [18]}

2.2 交通流理論の歴史

交通流の研究は自動車が普及し始めた 1950 年代に始まっていた。古くから、一次元流体モデル (Kinematic wave 理論)^[4] や、それに高次の項を導入した圧縮性流体として考える流体モデル^[5] が提唱され、研究されてきた。またその一方、車の挙動を追うモデル (追従モデル) として、車の運動を現象論的に考え、車の車間距離に関する運動方程式を導くといったモデル^{[6]. [9]} も研究されてきた。この流体モデルや追従モデルに関する歴史的流れは^[2] の菊池氏の記事や^[3] に詳しい。

1990 年代に入って、車一台一台の動きを表すモデルとして、1995 年に最適速度 (Optimal Velocity) モデル^[8] や、1992 年に確率を組み込んだ Nagel-Schreckenberg モデル^[13]、さらに厳密に解ける確率 CA モデルとして ASEP・ZRP を用いたモデルに拡張された^{[19], [20]}。また、1996 年には超離散法が発見される。^[15] その超離散法によって、今まで連続の方程式で扱っていたものが CA という強力な武器によってお互い利用できるようになった。

1997 年には国際会議 Traffic & Granular flow も始まり、ドイツ・日本・インド・韓国などを中心として世界的にこの研究分野が確立される。

この 1990 年代の数理的研究の最も重要な貢献は、交通流を車両というミクロな構成分子の多体相互作用系としてとらえ、渋滞発生のようなマクロな現象を統計力学系における相転移現象、もしくは力学系における分岐現象として理解する、という観点を与えたことである。

21 世紀に入り、Euler-Lagrange 変換が作られ^[16]、最適速度モデルと CA モデルの関係も徐々に明らかになり始めている。また、最近では ASEP・ZRP の両方を含んでいる確率可解モデルとして SOV (Stochastic Optimal Velocity) モデル^[21] も発案され研究されている。

2.3 交通流の測定

高速道路交通流の測定は、次のようにして行なわれている。(日本道路公団)
道路中にループコイルと呼ばれるものが 2km おきに 7m 間隔で 2 個埋まっており、その上を通る台数をカウントしている。交通量 (台/5min) は上流側ループコイルを 5 分間に通過する台数で求められ、平均速度 (km/5min) は 5 分間の各車の速度の平均から求められる。さらにそこから $Q = \rho v$ ^(3.4)

節)の関係を用いて、密度(台/km)を算出することが出来る。このループコイルは、警察の速度取締りなどにも用いられている。

2.4 交通渋滞の原因

渋滞とは「時速40km以下で低速走行あるいは停止・発信を繰り返す車列が、1km以上かつ15分以上継続した状態」を言う。^[22]

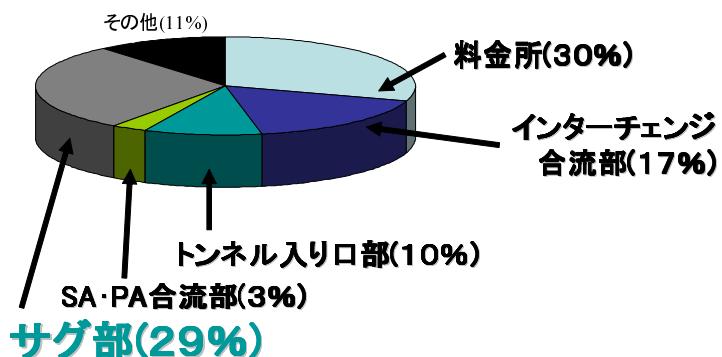


図2.1: 高速道路での渋滞の原因(日本道路公団調べ)

交通渋滞は発生原因によって、自然渋滞と突発渋滞の二つに分類することができる。自然渋滞は道路の構造的な特性に依存して発生するもので、隘路^{*1}に流入する交通需要が推定出来るならば、発生の場所や渋滞の度合いをある程度予知することは可能である。

これに対して、突発渋滞は、交通事故や工事規制、車両故障などの異常事態が原因となって一時的に形成される交通容量上の隘路を先頭として発生する渋滞なので、渋滞の発生場所や時間をあらかじめ知ることは難しい。

図2.1において、「その他」の項目以外は自然渋滞であり、突発渋滞に比べて自然渋滞が渋滞原因の大半を占めていることがわかる。

自然渋滞が発生しやすい箇所として以下の4ヶ所が挙げられる。^{*2}

1. サグ部

ドライバーが気づかない程度のわずかな下り坂から登り坂への転換部を「サグ部」と呼ぶ。サグ部に差し掛かると、ドライバーはサグ部を視認することができず、少しの勾配によって車の速度は少しずつ落ちてしまう。そのため後続車はある車間距離以下に詰まると安全のため速度を落とす。これが後ろの車にブレーキを踏ませ、さらに後ろへと連鎖的に伝わる。ドライバー

^{*1}アイロ:交通容量が他より低い道路の区間や地点のことを、交通容量上の隘路という。

^{*2}渋滞が発生する原因是流量の減少によるものであり、このような渋滞の発生しやすい場所を瓶の首のように流れが細くなる部分という意味で、道路のボトルネックと呼ぶ。

の反応がすばやいとこの連鎖は小さくなっていくが, 反応が鈍いとこの連鎖は増幅されて伝わる。(車列の不安定性(図 6.2))

この現象はある車間距離以下(臨界密度)になると起こる.

2. トンネル入り口

トンネルにさしかかった際に, 暗がりに慣れるまで(暗順応)の間, トンネル入り口部の暗がりや圧迫感により, 一時的に速度が低下してしまう車があり, 後続の車と縮まることから, 次々に後続の車がブレーキを踏むこととなり, 渋滞が起こる.

3. インターチェンジ等, 合流部

インターチェンジ等から流入する車の合流に伴い, 一時的な交通容量(3.6 節)の不足により渋滞が起こる.

4. 料金所

料金所での一旦停止に伴い, 一時的な交通容量(3.6 節)の不足により渋滞が起こる.

最近ではこの原因を解消するために, ETC(Electonic Toll Collection/自動料金徴収システム)と呼ばれる料金所を止まらずに通行料金を払うシステムが導入され, 料金所での渋滞は減少する傾向にある.

第3章 交通流でよく用いられる言葉, 図, 及びその関係

交通流の状態を表すのに用いられるもっとも基本的な量は3つあり, それぞれ交通量, 密度, 速度である. さらによく用いられる図として基本図がある.[17], [18]

3.1 交通量

交通量 (Traffic Volume または Traffic Flow) q とは, ある計測時間内に道路上の一地点を通過する車の数で定義される. つまり, ある観測位置 x において, T 時間で通過した車の総台数を m 台とする, T 時間交通量 q は,

$$q = m$$

として表せる. ただし, 後で紹介するような基本図を描く際には3.6節で紹介する交通流率が用いられることがある.

交通量は道路の性格を分類する上で非常に重要な情報を持っており, 計測された道路のある地域の特徴を良く反映している指標である. そのため, 車種別交通量, 車線別交通量, 交差点における進行方向別交通量と必要に応じた表現方法を用いることが多い.

3.2 密度

密度 (Density) ρ (または k) とは, 道路上の単位距離当たりの車の数で定義される. 車の長さを考える時, 車の長さを L , 一様な車間距離を d とすると,

$$\rho = \frac{1}{L + d}$$

と表せる. 密度は, その性質から, 道路の混雑状態を表す指標として用いられる.

3.3 速度

速度 (Velocity または Speed) とは, 各々の車の速さのことであり, 平均速度 (mean speed) に関しては, 時間にに関する時間平均速度 (time mean speed) と空間に関する空間平均速度 (space mean speed) に分けられる.

時間平均速度は, ある観測地点を固定して一定時間内に通過した車の速度の地点速度の平均であり, 空間平均速度は, 道路の一定区間に内に, ある瞬間に存在する車の平均速度である.

3.4 3つの基本量の関係

上で紹介した基本量であるこの3つの変数(交通量・密度・速度)には、密接な関係がある。ある時刻 t での車の速度を v とすると、 t から $(t + \Delta t)$ までの時間、つまり Δt で進む距離は、十分小さな時刻 Δt に対して、 $v\Delta t$ と近似することが出来る。また、ある時刻 t で密度が ρ であったとすると、時刻 $(t + \Delta t)$ までの間の密度は、十分小さな Δt に対して、一定の ρ と近似できる。

従って、 Δt 時間の交通量 Q は、

$$Q = \rho v \Delta t$$

となり、交通流率 q は

$$q = \rho v$$

となる。

3.5 基本図

基本図 (Fundamental Diagram) とは、交通量と密度の関係を表した図のことである。交通流率と密度の関係を表したもの的基本図とすることもある。横軸に車の密度、縦軸に交通流量をとったものとして定義される。(図 4.1)

詳しい基本図の説明は第4章で行なう。

本論文に出てくる CA モデルに関する基本図の描き方は以下の通りとする。

ある時刻 t における密度 ρ_t と交通流量 q_t は空間平均で考え、次のように定義する。

$$\rho_t \equiv (1 \text{ の総数}) / (\text{セルの総数})$$

$$q_t \equiv \rho_t \times (\text{時間 } 1 \text{ ステップで動いた } 1 \text{ の数}) / ((1 \text{ の総数}))$$

つまり、道路に単位セル当たりに車が何台いるかが密度であり、また q_t の右辺の分数は車の平均速度を表しており、それに密度をかけたものが流量となっている。

さらに、境界条件は周期境界条件を用い、初期条件はある密度の下で適当なランダムな初期配置を与えるものとする。

3.6 その他の言葉

- 交通流率 (Rate of Flow または Flow Rate)

交通流率 q とは、単位時間当たりに換算された交通量のことであり、上の T 時間交通量 Q を用いると、

$$q = \frac{Q}{T}$$

と表せる。

- 車間距離 (Headway Distance)

車間距離とは、日常生活でも用いられるように、前の車の後端と、次の車の前端との距離で定義される。

これに関連して、車頭距離という言葉があり、これは、前の車の前端と次の車の前端との距離を表す。

車の長さを考えない時は、車頭距離は車間距離に一致する。

- **交通容量 (Capacity)**

交通容量とは、その道路の交通処理能力の大きさを意味するものであり、「道路の交通容量」では、ある一定の道路条件と交通条件の下で、ある一定の時間内にある道路の断面を通過することができる自動車の最大数で定義される。

これは、基本図におけるピークにあたる点での交通流率のことである。

- **占有率 (Occupancy)**

密度は交通流の混雑状態を表す適切な指標であるが、計測するのが難しいという欠点がある。このため、交通管制が実施されている道路では、超音波や赤外線によって車の台数と速度を測定できる車両感知器 (Traffic Detector) を利用して容易に計測の出来る占有率が密度に変わつて用いられることがある。

占有率には、時間的占有率 (time occupancy) と空間的占有率 (space occupancy) が存在する。時間的占有率とは、ある地点で一定時間 T の間に車が占有していた時間 t とその測定時間 T との比で定義され、一方、空間的占有率とは、ある地点での一定区間 S である瞬間に車が占めていた道路の長さ s との比で定義される。

第4章 基本図とmetastable state(メタ安定分岐)

4.1 metastable state とは

† 基本図 (q-k 図)

交通工学の分野で、交通量と密度との関係を示す図は、一般には q - k 相関図と呼ばれており、交通容量の推定や、交通流の制御などの領域で非常に有用なものであり、道路の特性を表現する基本的なものとして基本図 (fundamental diagram) と呼ばれている。(図 4.1)[17], [18]

基本図には以下のような特徴がある。

- 密度 k がゼロでは交通量 q もゼロとなる。(つまり、 q - k 図は原点を通る。)
一方、最大密度でも交通量 q はゼロとなる。
- 交通流量は $q = kv$ であるので、 q - k 図において平均速度 $v = q/k$ は任意の交通量 q と原点を結んだ直線の傾きとなる。
- 最大交通量 q_{max} の時の密度を臨界密度 k_c と呼び、これに対応する速度を臨界速度 v_c と呼ぶ。

さらに、基本図は主に 2 つの領域が存在することを表している。

車両密度が小さい領域では、密度の増加に従って流量が増加している。これは車の流れがスムーズでほぼ一定の速度で走行していることを示しており、車の台数が増えてもその状態を維持できているので、流量が密度に比例して増加しているのである。ところが流量がピークに達すると、それ以上に密度が大きくなても流量は増加せず、逆に右下がりに減少している。また、データ点が拡がっており複雑な挙動をする。この密度領域で渋滞が発生し始めていると考えられる。(実際、渋滞の発生していない地点での基本図は、低密度領域の部分しか現れない)。低密度領域部分を自由走行流領域、高密度領域部分を渋滞流領域と呼ぶ。このように交通流は密度によって異なる 2 種類の挙動を示す。この 2 種類の流れは、臨界密度で急激に移り変わる。しかもその臨界密度は、世界中のどの基本図でも密度が ~ 25(vehicles/km) でほとんど一致している。また、渋滞が伝播する速度も、車の進行方向と逆向きに日本のデータで 12 ~ 13km/h、ドイツのデータで 12 ~ 15km/h とほぼ一致している。

交通流は人間が意思を持って運転する車の集団の振る舞いであり、これまで自然科学发展ってきたような物質的対象ではない。また、道路の形状、車線数、運転者の個性、車両性能、各国の交通ルールなど、様々な違いがある。それにもかかわらず、上のデータのような普遍性が観測されるのは、それらの違いによらない交通流の基本特性が存在するからであると考えられる。それは、モデルを構築して解析するという研究が十分可能な対象であることを示している。

†† metastable state(多重安定状態)

現実のデータを基本図に表すと、図 4.1 のように自由走行部の直線は 3 角形の頂点より少し右上に向かって伸びてあり、また、渋滞が起こる密度あたりでデータ点が 2 次元的に広がった領域があるよう見える。つまり単純な 3 角形ではなく、漢字の「人」のような図形になっており、さらに自由

相部分から渋滞相部分に移るあたりにデータ点が拡がっている2次元領域が存在することが見える。このような右上がりの自由走行相から右下がりの渋滞相への相転移はそう単純ではなく、自由走行相から渋滞走行相に移る間にギャップが見られ、この数値領域が不安定性を含んでいることがわかる。実際、この相転移には自由走行相のオーバーシュート^{*1}が存在すると考えられている。これは、物理的に考えても明らかで、過密度で高速な流れは不安定ではあるがある程度存在して、これは基本図において自由走行を示す直線が渋滞になる臨界密度を越えて少し伸びた状態として表現できる。つまり、臨界密度を越えて、少数ではあるが上手な運転者がいて、ある程度スムーズに走ることができ、その結果が右上に少し伸びているということを示している。この少し右上に伸びた状態を **metastable state**(多重安定状態・メタ安定状態) と呼ぶ。またシミュレーションによる基本図に対してこの metastable state は直線の分岐として現れ、それを指してメタ安定分岐と呼ぶこともある。そしてこの不安定性(過密度で高速な流れ)が高速交通流の持つ本質的な性質であり、追い越し車線で顕著に観測され、自然渋滞を引き起こす要因として考えられている。

4.2 ボトルネックのない道路での実験

杉山らはボトルネック(2.4節脚注)が渋滞を引き起こす原因の本質であるのかどうかを確認するためにボトルネックのない状況での渋滞形成を実験的に観測した[23]。その車の挙動を示した図が図4.2である。ボトルネックを持たないようにするために、道を円形(circuit)にして実験を試みている。具体的には、直径約70mの円形道路(全周230m)を作り、その道に沿って22台の車が並んで走る。さらに各ドライバーには時速30km程度を目標に走ることを義務付ける。すると、最初はきれいに等間隔で走っていた車も数分後には、数台の車が停止して、これ以降は、常に3,4台の車が並んで停止しているのが確認された。このことからボトルネックがなくても渋滞が形成されることがわかる。つまり、渋滞の原因として道路の形状よりもその場所での車の密度によるものであることがわかった。実際、高速道路でボトルネックを起点として渋滞が形成されるのは、単にその後ろ側で車の密度が上がるためであると解釈できる。

この実験をOVモデル(6.2節)を用いてコンピューターシミュレーションしたのが図4.3である。ただし、OV関数の特徴を変えたくないの、最高速度をOV関数と対応するように道路の全長を約2倍にした。OV関数は実際のデータから得られる次式のようなものとする。[2], [8]

$$V_{optimal}(\Delta x) = \frac{V_{max}}{2} \left(\tanh(2 \frac{\Delta x - d}{w}) + c \right) \quad (4.2.1)$$

ここで各パラメータに入る値として

$$V_{max} = 33.5 \text{m/sec} \quad (4.2.2)$$

$$d = 25.0 \text{m} \quad (4.2.3)$$

$$w = 23.3 \text{m} \quad (4.2.4)$$

$$c = 0.913 \quad (4.2.5)$$

を採用する。[2], [8] このシミュレーションで見られるように、最初は等間隔だった車も、すぐに渋滞を形成し始める。さらに、実際のデータ(図4.2)と比較すると、シミュレーションの方は少しではあるが下に凸なプロットになるが、実際のデータでは上に凸なグラフになっている。これは、実際の車

^{*1} 波形が規定レベルを一時的に越えること。行き過ぎたり、度を越したりすること。<大辞林>より

はある程度の車間距離があるときでも完全に停止してしまうが,OV 関数によるシミュレーションでは,OV 関数の持つ特徴が, 限りなく車間距離が 0 に近い時でも少しは速度を持つような関数で表されているからであると考えられる. また, この実際の車を使った実験では, ときには 10 数分もの間, 20 台以上の車が渋滞を作らずにスムーズに走り続けることもある. この原因の一つとして上手なドライバーは渋滞を作らない走り方を感覚的に知っていることが挙げられる. この上手なドライバーというのが, 実際基本図におけるメタ安定分岐として現れており, メタ安定分岐が渋滞の本質的な部分であることがわかるであろう. そこで第 11 章では, 様々なモデルに対してメタ安定分岐を持つかどうかを見る.

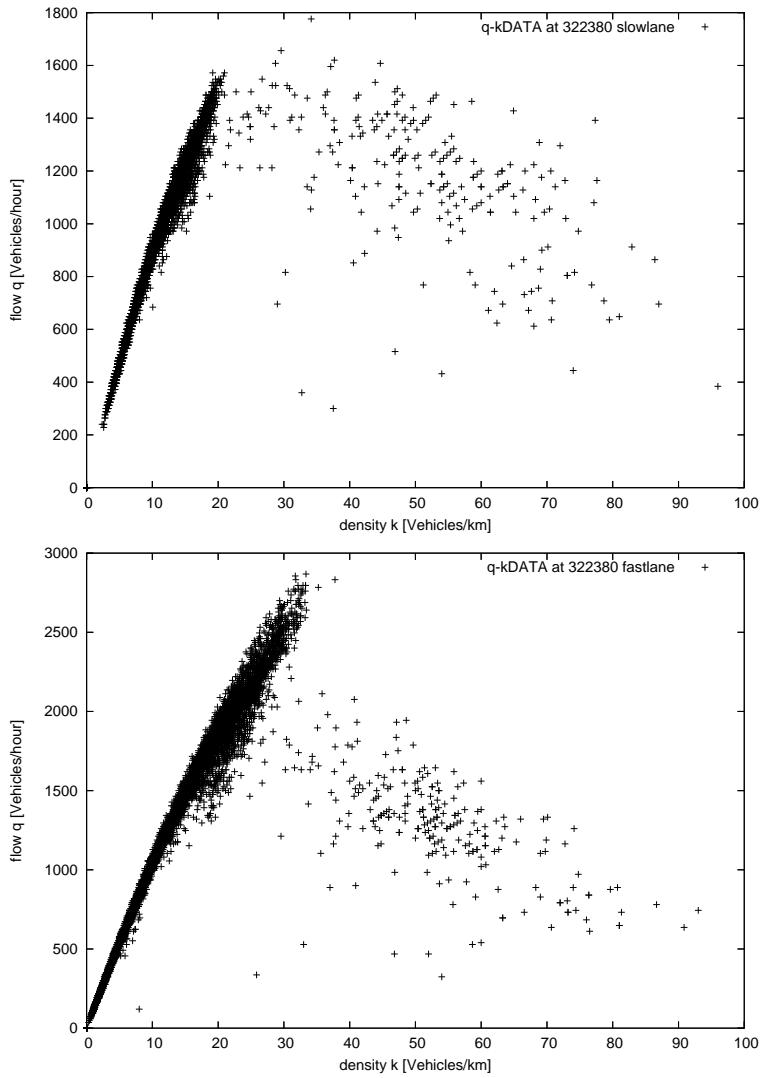


図 4.1: 東名高速道路の 322.38km point の基本図 (上図が走行車線, 下図が追い越し車線). 一般的に追い越し車線の方が『人』型ははっきりと見える.

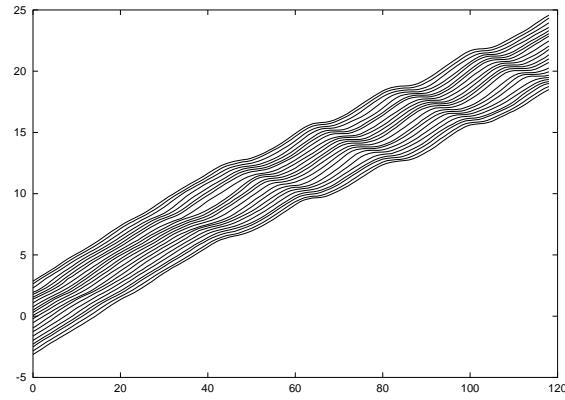


図 4.2: 実際の Circuit 上の実験での車の挙動を示したグラフ. 横軸が時間 (秒), 縦軸が角度である. つまり Circuit 上を走っているので初期状態は $-\pi \sim \pi$ 範囲で動き出して車は進んでいくことがわかる. さらに, 徐々に縞が形成され粗密状態が現れ, 渋滞が作られていくことがわかる.

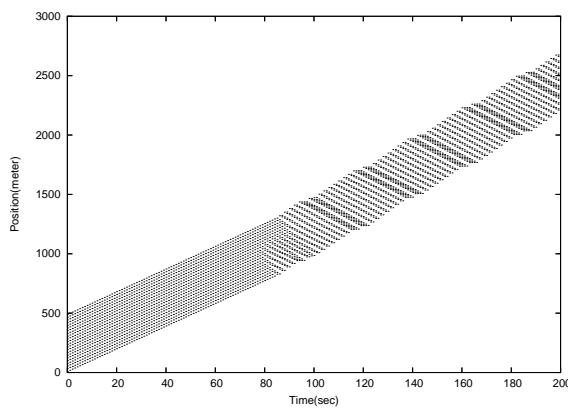
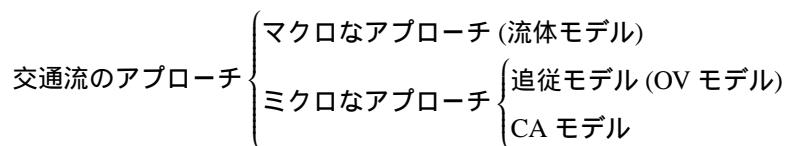


図 4.3: Circuit 実験をモデル化してシミュレーションした図. 車の平均全長を 4.5m, 台数を 22 台, 半径 80m としてシミュレーションした. 横軸が秒数, 縦軸はメートル距離である. このシミュレーションを見ると, 徐々にある途中的車から渋滞を形成し (Time=85 付近), それが車列全体に伝播して, 全体の渋滞が形成されていることがわかる.

第5章 交通流のアプローチ

交通流モデルを構成する際のアプローチには以下に示すようにおもに3つの側面から研究されている.[2], [3]



これらのアプローチを用いて、交通流を表現するモデルは今までに数多く作られており、このアプローチの違いによって、モデルも以下で示すように3種類のモデルに分類することが出来る。

	流体モデル	OV モデル	CA モデル
空間(粒子)	連続	離散	離散
時間	連続	連続	離散

5.1 マクロなアプローチ

5.1.1 流体モデル

交通流に対する理論的な扱いの一つにマクロな立場から交通流を捉える流体力学的なものがある.[4], [5], [9]

交通流は多数の車両の運動からなるので、マクロにとらえると、あたかも連続した流体のように考えることが出来る。そこで交通流を連続流体として表現したモデルが開発された。この流体モデルを用いると、交通流の粗密の動きが波の伝播として取り扱うことが出来るので、渋滞時の交通流の挙動の解析等に応用されている。流体には水のような非圧縮性流体と、空気のような圧縮性流体とがあるが、交通流では車間距離の変化に応じて車の密度は変化するので、圧縮性流体と考えることが自然であり、渋滞している車列の移動は衝撃波のように捉えることが出来る。

5.2 ミクロなアプローチ

5.2.1 追従モデル

追従モデルは、典型的なミクロの立場からの交通流モデルであり、車を一台一台取り扱いその運動を連立微分方程式で取り扱うところに特徴がある.[6], [7], [9]

これは流体力学的な取り扱いをするマクロのモデルではなく、車に働く力を考えてミクロなモデル化を行い、実際の交通流を再現しようというモデルである。中でも交通流を連立二階微分方程式系で記述する OV(Optimal Velocity) モデルは特別な場合に厳密解を構成できたりと、数理学的に扱いやすい形を持っており、交通流の標準モデルとしての地位を確立し、二次元歩行者流への応用もなさ

れている. [8], [24], [25], [26], [27], [28], [29]
 OV モデルは次のような形で書ける.(6.2 節)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a[V_{Optimal}(\Delta x) - \frac{dx}{dt}] \quad (5.2.1)$$

ここで, a はドライバーの感度, $V_{Optimal}$ は最適速度関数と呼ばれるもので, 前車との車間距離に適した最適速度を求める関数である. OV モデルの特徴は車列の一様流不安定性がきちんと表現できるという点である. その不安定さが成長し, 渋滞衝撃波となって伝播する様子は現実の観測と非常にあっている.

5.2.2 CA(Cellular Automaton) モデル

最近のコンピューターの性能の向上により, 特に盛んに研究されているのが CA モデルである. CA モデルもミクロなレベルのモデルであるが, このモデルの利点は, OV モデルに比べてモデルの拡張のためのルール設定を行ないやすいという点やコンピューターシミュレーションが容易にできるという点にある. そのため, 実用を視野に入れたリアルな交通流モデル研究から純数理的な研究にいたる幅広い分野で応用されている.

また CA モデルには決定論的な CA モデル [2], [14], [30] も多いが, CA の動きのルールに確率を組み込むことも容易であり, 確率を組み込んだ確率論的な CA モデル [11], [13], [19], [20], [21], [31], [32] も考案されている.

中でも特に Nagel-Schreckenberg モデル [13] は, ドイツを中心とする多くの研究者によって, 交通流の標準モデルとして使われている. [31], [32], [33], [34]

さらに, 境界には基本的に周期境界条件を用いているが, 開放系境界条件(つまり, 境界条件に確率を用いて, α で入ってきて β で出て行くという条件)として確率を導入することもでき, ASEP(6.4 節)・ZRP(6.5 節)といった確率過程の厳密解との関係を調べる研究も行なわれている. [19], [20], [35], [36], [37]

第6章 OV モデルから Stochastic OV モデルへ

6.1 追従モデル

追い越し禁止の1車線で考える。

道路を走行する車は、前方走行車両、特に直前の車両の挙動に大きく影響を受ける。これを刺激とすると、ドライバーの反応は、

$$\text{反応 (加速減速)} = \text{感応係数} \times \text{刺激} \quad (6.1.1)$$

とかける。直前車の影響を大きく受けることを考慮すると、刺激は直前車までの車間距離 $\Delta x_n = x_{n-1} - x_n$ (前の車の方が距離的に遠くにいるから、前の車から自分の車を引く。) と、速度差 $\Delta \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n$ 、ならびに車の速度 \dot{x}_n の関数でかける。つまり

$$\ddot{x}_n = F(\Delta x_n, \Delta \dot{x}_n, \dot{x}_n) \quad (6.1.2)$$

と表せる。

車列の途中で生じた走行の乱れは後方車両に順に伝播していく。Pipes[6] や Newell[7] らは、このような車両の追従挙動を以下のような速度に関する1階微分方程式で表現し、追従時の乱れの伝播の安定性を分析した。

$$\ddot{x}_n(t) = \lambda \Delta \dot{x}_n(t) \quad (6.1.3)$$

これが最初に出来た追従モデルである。 $\lambda > 0$ は刺激に対する特性係数である。

この系の安定性を調べる。 $x_n(t)$ をモード展開 ($x_n(t) = f_n e^{i\omega t}$) して、(6.1.3) に代入すると

$$x_n(t) = f_n e^{i\omega t} \quad (6.1.4)$$

$$\dot{x}_n(t) = i\omega f_n e^{i\omega t} \quad (6.1.5)$$

$$\ddot{x}_n(t) = -\omega^2 f_n e^{i\omega t} \quad (6.1.6)$$

より

$$\begin{aligned} -\omega^2 f_n e^{i\omega t} &= \lambda i\omega (f_{n-1} - f_n) e^{i\omega t} \\ \frac{i\omega}{\lambda} f_n &= f_{n-1} - f_n \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

f_0 を最初の車の振幅とすると

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{\lambda} f_n &= f_{n-1} - f_n \\ f_n &= \frac{\lambda}{\lambda + i\omega} f_{n-1} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\omega} \right)^n f_0 \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

つまり,

$$\begin{aligned}
 |f_n| &= |f_0| \left| \frac{\lambda}{\lambda + i\omega} \right|^n \\
 &= |f_0| \left| 1 + \frac{i\omega}{\lambda} \right|^{-n} \\
 &\leq |f_0| \left(1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2} \right)^{-n/2}
 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

つまり, 前者の揺らぎに比べて後方ほど (n が大きくなるほど), 影響は減少し, 常に安定であることがわかる. つまりこの追従模型では 1 階微分方程式の性質を反映して前車の動きに対してすばやく反応するので, 常に安定な状態へ引き戻されるのである. 実際, 車の運動のゆらぎによるショック波の後方への伝播は反応の時間遅れ効果を導入しない限り決して増幅されないことが, わかっている.[17] さらにこのモデルでは現実とかけ離れた問題があり, 運転者は相対速度だけで動くので車間距離 1m でも時速 100km で走れてしまうことになる. 逆に車間距離が 1km 離れていても前の車が少し速度変化すると, その後ろの車は加速, 減速するというおかしな振る舞いをしてしまう.

追従モデルの不具合を解消するような拡張もされているが, 本質的には速度が車間距離や相対速度で決まるというモデルで一階の微分方程式である.

6.2 OV モデル

前節で紹介した追従モデルを改良したものが, OV(Optimal Velocity/最適速度) model と呼ばれるものである. [8], [24], [25], [26], [27], [28], [29]

OV モデルは, 加速度が車間距離と現在の速度の関数で表現されるというモデルであり, 時間にに関する二階の微分方程式である. OV モデルそのものの厳密解はまだわかっていないが, OV モデルの特徴は, 「車列の一様流不安定性をきちんと表現できる」ということである. OV モデルでは, まず車間距離に応じた最適速度 (OV) 関数 $V(\Delta x)$ が定義できているものとする. $V(\Delta x)$ は次のような特徴を持つものとする.

- 単調増加関数
- 最高速度 V_{max} がある
- 車間距離の最小値がある

今 OV 関数として次のように定める (実際のデータに近いよく使われてるものを $V_{max} = 1$ にスケールしたもの).(図 6.1)

$$V(\Delta x_n) = \frac{\tanh(\Delta x_n - 2) + \tanh(2)}{2} \tag{6.2.1}$$

すると, この OV 関数を用いて, 運動方程式は次のように表せる.

$$\ddot{x}_n(t) = a(V(\Delta x_n) - \dot{x}_n(t)) \tag{6.2.2}$$

この方程式の定常流に対する解は計算することができて, 長さ L のサーキット上に N 台の車がいるとする. すると定常流 (等間隔, 等速度) に対しては,

$$\begin{aligned}
 \Delta x_n &= x_{n-1}(t) - x_n(t) \\
 &= \frac{L}{N}
 \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

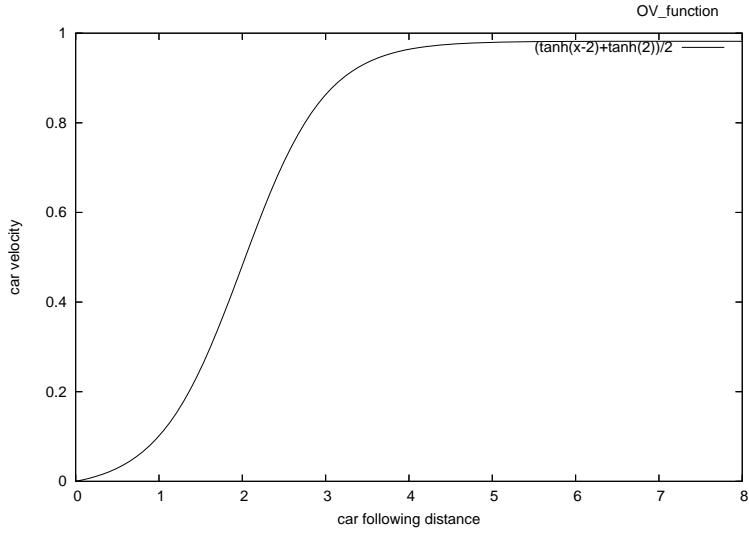


図 6.1: OV(最適速度) 関数グラフ

であり, 加速度はゼロであるから, 次のような解が存在する.

$$x_n^0(t) = b(N-n) + ct \quad (6.2.4)$$

$$c = V(b), \quad b = L/N \quad (6.2.5)$$

問題はこの定常流の安定性である. 定常流からの微小変動を $y_n(t)$ ($x_n(t) = x_n^0(t) + y_n(t)$) として, これが小さいと仮定してその一次の範囲で ($\frac{L}{N}$ に対して Taylor 展開して $V'(b) = V((b+h)-V(b))/h$) 運動方程式は,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_n(t) &= a(V(x_{n-1}^0(t) - x_n^0(t) + y_{n-1}(t) - y_n(t)) - V(b) - \dot{y}_n(t)) \\ &= a(V(b + y_{n-1}(t) - y_n(t)) - V(b) - \dot{y}_n(t)) \\ &= a(V'(b)(y_{n-1}(t) - y_n(t)) - \dot{y}_n(t)) \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

これに安定性解析を行なう. $y_n(t) = f_n e^{i\omega t}$ とモード展開すると線形化された方程式が得られる.

$$-\omega^2 f_n e^{i\omega t} = aV'(b)(f_{n-1} - f_n) e^{i\omega t} - ai\omega f_n e^{i\omega t} \quad (6.2.7)$$

$$-\omega^2 f_n = aV'(b)(f_{n-1} - f_n) - ai\omega f_n \quad (6.2.8)$$

つまり,

$$\begin{aligned} f_n &= \left(\frac{aV'(b)}{aV'(b) - \omega^2 + i\omega a} \right) f_{n-1} \\ &= \left(\frac{aV'(b)}{aV'(b) - \omega^2 + i\omega a} \right)^2 f_{n-2} \\ &= \dots \\ &= \left(\frac{aV'(b)}{aV'(b) - \omega^2 + i\omega a} \right)^n f_0 \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

となり,(係数の絶対値が 1 より小さい時に安定であるから) 安定条件は次のように決まる.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{aV'(b)}{aV'(b) - \omega^2 + i\omega a} \right| &< 1 \\
 \left| \frac{aV'(b) - \omega^2 + i\omega a}{aV'(b)} \right| &> 1 \\
 \left| \frac{aV'(b) - \omega^2}{aV'(b)} + \frac{\omega a}{aV'(b)} i \right| &> 1 \\
 \sqrt{\left(\frac{aV'(b) - \omega^2}{aV'(b)} \right)^2 + \left(\frac{\omega a}{aV'(b)} \right)^2} &> 1 \\
 \frac{(aV'(b))^2 - 2aV'(b)\omega^2 + (\omega^2)^2}{(aV'(b))^2} + \frac{(\omega a)^2}{(aV'(b))^2} &> 1 \\
 \frac{\omega^2}{a^2} - \frac{2V'(b)}{a} + 1 &> 0
 \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

特に最も不安定な振動モード(振幅が一番大きい時) $\omega \sim 0$ では $V'(b) < a/2$ で安定である. 今, 系の密度 ρ は $N/L(= 1/b)$ で定義されているので, 安定条件は

$$V'\left(\frac{1}{\rho}\right) < \frac{a}{2} \tag{6.2.11}$$

となる. ここからわかることは, この式の安定性は車の密度によって変化することを示している. これをプロットした図が図 6.2 である.

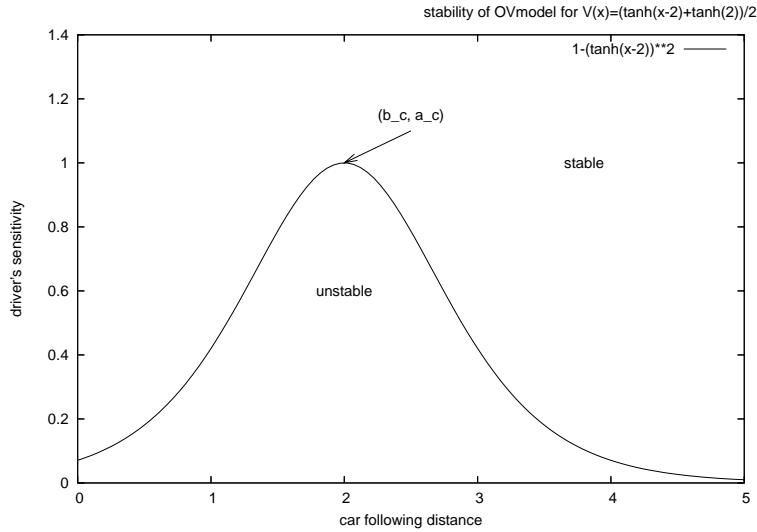


図 6.2: OV モデルの安定・不安定領域を表すグラフ

この図からわかることは, 感度パラメータ a が臨界点 a_c より大きい時には, 任意の b (車間距離) で一様流は安定である. 逆に感度パラメータ a が a_c よりも小さい時には b が小さい値の時と大きい値の時で一様流は安定になる. しかし, この二つの一様流は性質が異なっている. b が平均車間距離を表しているので b が大きい時は道路上に車はあまり走っておらず, スムーズに車が走っている状態の一様流であり, b が小さい時は道路上に走っている車が多くて全ての車がとても遅い速度で

短い車間距離で走っている状態の一様流である。

この不安定化が起こった後には定常であった交通流に渋滞流と自由流の粗密波が発生することが数値的な計算から確かめられている。また、追従挙動(車間距離と速度の関係図)も計算されていて、相空間でリミットサイクルを描くことがわかっている。[2], [24], [25], [26], [27], [28]

6.3 SOV モデル

前節で紹介した OV 関数(車間距離に依存して速度を決める関数)を用い、可解な確率過程を含んだモデルとして SOV(Stochastic OV) モデルというものが構成されている。[21] このモデルは後で述べるような ASEP と ZRP と呼ばれる厳密に解を求める事のできる二種類の確率過程を含んだ CA モデルで表される。

1 車線 SOV モデルを考える。N 台の車が 1 車線の道路を走っているものとする。その道路を L サイトの一次元セルの連結で取り、各サイトには車が “いる=1” か “いない=0” かの 2 状態であるものとする。さらに、衝突や追い越しは禁止するものとする。

確率分布関数 $w_i^t(m)$ を導入し、 i 番目の車が時刻 t で前に m サイト進む確率でドライバーの意思を与えるものとする。そのとき、次の確率 $w_i^{t+1}(0)$ は確率分布関数 $w_i^t(0), w_i^t(1), \dots$ と車の配置 $x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t$ に依存した関数 f_i によって決まるものとする。車の配置は、以下に示すような手順で繰り返し update されるものとする。

- 各車に対して、今の配置と確率関数から次の m サイト進む確率を決める。

$$w_i^{t+1}(m) = f_i(w_i^t(0), w_i^t(1), \dots; x_i^t, \dots, x_N^t; m) \quad (6.3.1)$$

- w_i^{t+1} によって、確率的な車の動き(速度)でサイトの値 V_i^{t+1} を決める。言い換えると、 $V_i^{t+1} = m$ となる確率が w_i^{t+1} に等しい。

- 各車が、衝突することなく進む。

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(\Delta x_i^t, V_i^{t+1}) \quad (6.3.2)$$

ここで、 $\Delta x_i^t = x_{i+1}^t - x_i^t - 1$ とし、車間距離で決まる。このようにして、車は Δx_i^t か V_i^{t+1} の最小値で進む。もし $V_i^{t+1} > \Delta x_i^t$ なら、車はセル $x_{i+1}^t - 1$ で止まるものとする。

ここで、最高速度を 1 とする。つまり $m \geq 2$ で $w_i^t(m) = 0$ とする。そのとき、 $v_i^t \equiv w_i^t(1)$ とし、特別な形の関数 f_i を次のように決める。

$$v_i^{t+1} = (1 - a_i)v_i^t + a_i V_i(\Delta x_i^t) \quad (\forall t \geq 0, \forall i) \quad (6.3.3)$$

ここで $a_i (0 \leq a_i \leq 1)$ はパラメータで関数 V_i は区間 $[0, 1]$ の値に限定されている。すると、 v_i^t も $[0, 1]$ の中に制限される。

つまり、「速度 = 前進確率」とみなすことができ、確率 v_i^{t+1} で(前が空いていれば) $x_i^{t+1} = x_i^t + 1$ と進めることができる。

(6.3.3) に含まれるパラメータ a_i は、最適速度関数 $V_i(\Delta x_i^t)$ の重み係数であり、交通状況に応じたドライバーの反応度に一致する。車が別々に動く間は、(6.3.2) は単純に確率 v_i^{t+1} という条件のもとで

$x_i^{t+1} = x_i^t + 1$ と書ける. それゆえ, v_i^t は平均速度とみなすことができる. つまり, 期待値という意味で,

$$\langle x_i^{t+1} \rangle = \langle x_i^t \rangle + v_i^{t+1} \quad (6.3.4)$$

と表すことができる. そこで, OV モデルの離散版に似ていることから, (6.3.3) で表されるモデルを **the stochastic optimal velocity(SOV) model** と呼ぶ.

† OV(6.2.2)→SOV(6.3.3) OV モデルを差分化する

$$\dot{x}_i(t) = a(V(x_{i+1} - x_i) - \dot{x}_i(t)) \quad (6.3.5)$$

Step1: 速度の決定

$$\begin{aligned} v_i^{t+1} &= v_i^t + a(V(x_{i+1}^t - x_i^t) - v_i^t) \\ &= (1 - a)v_i^t + aV(x_{i+1}^t - x_i^t) \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Step2: 移動

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1} \quad (6.3.7)$$

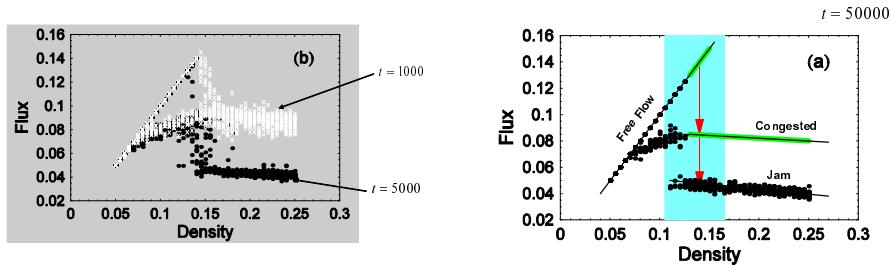


図 6.3: SOV モデルの基本図における相転移部分の詳細図. 文献 [21] より抜粋.(左図が時刻 $t = 1000, t = 5000$ の時のプロット. 右図は $t = 50000$ の時のプロット.)

SOV モデルの基本図が図 6.3 である. この SOV モデルの基本図を見ると, 相転移部分で中間状態でいくつかの不安定分岐が存在し, しかも長時間見られることがわかる. $t = 50000$ の最終状態では多重安定状態 (Free, Jam, Congested) が出現しており, 実際の交通データとよく対応していることが見られる.

さらに SOV モデルの重要な特徴として, SOV モデルは二つの重要な確率モデルを含んでいる. (6.3.3) で $a = 0$ とすると, $v_i^{t+1} = v_i^t$ であり, これはホップ確率¹ $p \equiv v_i^0$ を持つ ASEP になる. また, (6.3.3) で $a = 1$ とすると, $v_i^{t+1} = V(\Delta x_i^t)$ であり, これは車間距離 Δx_i^t を考慮した ZRP となる. ZRP では, 車のホップ確率は単独で, その車の前方車間距離のみで決まる. 図 6.4 は図解的に二つの確率モデルを表現したものである. ASEP と ZRP は定常状態での車の配置の確率分布が正確に計算できるという点で, 両方とも厳密解がわかっている. [19], [20], [35], [36] つまり, 数理的に厳密に解析ができるモデルを含んでいる.

¹ ホップ (hop) 確率とは, 今いるサイトから一つ隣のサイトへ移る確率のことを表す.

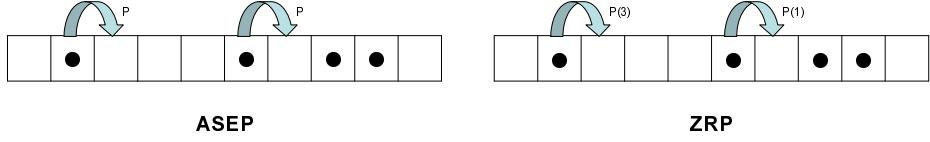


図 6.4: 確率モデルである ASEP と ZRP の動き方の図解 (ASEP は hop 確率が constant なのに対し,ZRP は hop 確率が車間距離に依存して決まる.)

6.4 ASEP

ASEP は一次元非対称単純排他過程 (asymmetric simple exclusion process(ASEP)) と呼ばれる非平衡統計力学模型である. [19], [35], [36] ASEP は 1 次元格子上を体積排除の相互作用の下 (つまり, ある粒子が hop しようとした時に, 行き先のサイトが既に別の粒子によって埋まっていた場合はその hop は起こらないものとする.) に多数の粒子が拡散するという単純なモデルであり, 境界条件による相転移や非等方的なスケーリングなど, 非平衡系特有の興味深い現象を示すことが知られており, さらに ASEP は厳密解が得られるというすばらしい性質を持っている.(図 6.4 左 (前が空いていれば確率 p で進む))

ASEP の厳密解の流量密度関係式は次式で与えられる.[38]

$$Q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4Pk(1-k)}}{2} \quad (6.4.1)$$

ここで, Q は流量, k は密度, P は hop 確率であり, これをプロットしたのが図 6.6 である. さらに, 開放系 (確率 α で左端から流入してきて確率 β で右端から流出する) 境界条件に対して, α, β の確率を変化させると流量がどうなるかを見るための図を相図 (Phase diagram) と呼ぶ. 今, ASEP の相図は図 6.7 である.[39] α が β よりも大きい時は, 流入する車の数が流出する車の数よりも多くなるので渋滞する (Jam Phase). 逆に α が β よりも小さい時は, 流入する車の数が流出する車の数よりも少なくてなるのでスムーズな流れとなる (FreeFlow Phase). さらに, α, β が共に $1/2$ より小さく等しい時, 流入する車も流出する車も少ないので, もともと道路上にいた車で渋滞流部分と自由流部分に分かれてしまい, 衝撃波が見られる (Shock Wave). 最後に, α, β が共に大きい時は, 流入する車も流出する車も多いので道路上は車の密度が大きくなり混雑した流れとなる (Congested Phase).

6.5 ZRP

ZRP は Zero Range Process と呼ばれるモデルである.[20] 大きな特徴は車の HOP 確率が単独で, その車の前方の車間距離のみで決めることができるというものである. つまり, この車間距離の関数として, OV モデルで扱っていた最適速度関数 (OV 関数) を導入することができる.(図 6.4 右 (前の空いている距離による確率 $p(3), p(1)$ で進む))

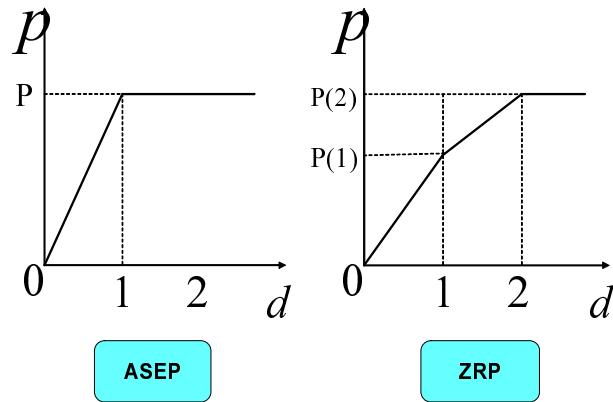


図 6.5: ASEP と ZRP の車間距離に対する hop 確率の関係図の一例 (ASEP は前が空いているかどうかで hop 確率が決まっているが,ZRP では前の車との車間距離によって hop 確率が異なる。)

ZRP の厳密解の流量密度関係式は次式で与えられる.[40]

$$Q = k \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4(1 - P)k(1 - k)}}{2(1 - P)(1 - k)} \right) \quad (6.5.1)$$

ここで, Q は流量, k は密度, P は今は車間距離が 1 で進める確率とし, これをプロットしたのが図 6.8 である.

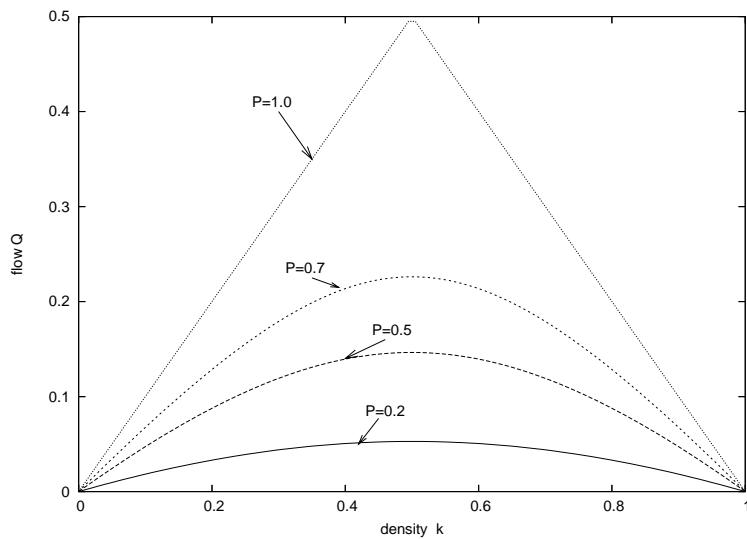


図 6.6: ASEP の基本図 (hop 確率が 1 に近づくほど BCA の基本図に近くなる. 現実の交通流に見られるようなメタ安定分岐は見られない.)

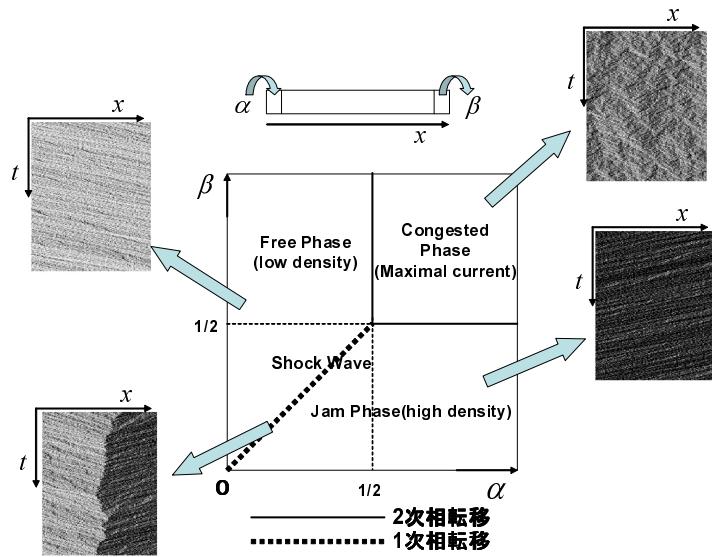


図 6.7: ASEP の相図 (α, β の確率によって Shockwave, Free, Jam, Congested と 4 種類の Phase の特徴が見られる.)

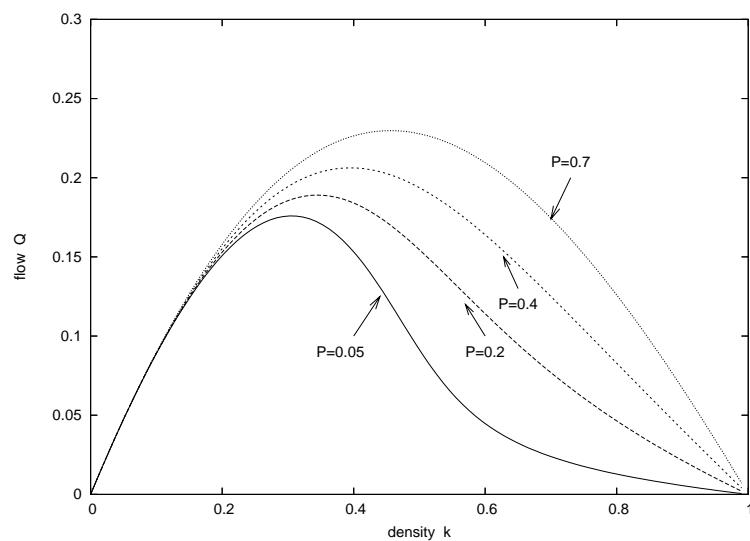


図 6.8: ZRP の基本図 (車間距離 1 で進める確率 P が高くなるほど ASEP の基本図に近くなる. 現実の交通流に見られるようなメタ安定分岐は見られない.)

第7章 セルオートマトン(Cellular Automaton)

セルオートマトン (Cellular Automaton,CA) とは, 独立変数 (空間や時間) と従属変数 (状態変数) がすべて離散的で, さらに状態変数の値域が有限集合になっているような時間発展系のことを言う.(8.9 節) [15], [41], [42], [43], [44]

7.1 セルオートマトン法とは

これまで我々は, 自然科学や工学, 社会科学におけるさまざまな現象を微分方程式などの数式を用いて表し, 解析してきた. しかし, これでも解析しきれない現象に複雑現象というものがある. 具体的には, 生き物の模様や流れの模様・地球規模の気象変化・原油流出による海洋汚染・森林火災・免疫や脳の機能・人の非難行動・景気や経済構造の変動など多くの現象があり, 交通流問題もそのうちの一つである.

複雑系の現象には, あまりに多くの現象が複合していて記述しようとすると, 微分方程式の数がとてつもなく多くなり, 解くことが極めて困難になる. そこで, この複雑現象を解明する有効な方法として, セルオートマトン (Cellular Automaton/CA) 法を紹介する. たとえば, 生き物ならその模様はセル (細胞) 間の局所的な相互作用によって形成されると考え, 空間を格子 (セル/サイトとも言う) で敷き詰め, 隣のサイトとの相互作用のある規則の下で繰り返すことで生き物の複雑なパターンや振る舞いを再現させようというものである.

CA 法は J.Neumann が自己増殖する機械を研究し行き詰っていた時に, S.Ulam から均一なセルを敷き詰めたセル空間で行なえばよいとの示唆を受けて, 1950 年代の初めに考案された. 1970 年代には生き物の組織形成モデルとして用いられていたが, それほどの応用性は無かった. しかし, 1984 年に, S.Wolfram が CA 理論と微分方程式系の対応を明らかにし, CA の体系を確立する事により, A.Turing や B.P.Belousov が研究した生き物のパターン形成などに適用されるようになった. さらに, 1986 年には CA 法から格子ガスオートマトン法が開発され, CA 法は流体解析にも適用され始める. 最近ではコンピュータの性能の向上や普及により, 様々な物理・化学現象や, 社会・経済現象に用いられている.[44]

7.2 交通流理論における CA モデルとは

上述したように, 複雑系と呼ばれる分野ではミクロに見るとキリがないくらいのたくさんの要素が絡み合い, 微分方程式ではどうしようもなくなってくる.

そこで対象を大まかに見て, おおよその機能だけを抽出して, 本質を失わない程度に単純化してみようと考えるのはごく自然な考えであろう. このようなものの見方を「粗視化」という. 交通流において考えてみると, 高速道路の車の流れは非常に複雑であり, 一本の何もない道路を考えても, あ

るときは渋滞し, あるときは自由に車が流れている. これらの様子をきちんと表現する微分方程式を作れた人はまだいない. そこで, 周りのサイトに車がいるかいないか(車のいる状態を'1', いない状態を'0')というサイト同士の相互関係で車が動くルールを考えると, CA 法を用いてモデルを作ることができる.

このモデル化によって得られたモデルが, 交通流にとってよいモデルかどうかということは, いつどういった状況の時に交通渋滞が起こるのかをきちんと表現できているかどうかということである. 車はある密度以上になると渋滞し始める. この渋滞の開始をきちんと表現できているかどうかがポイントとなる. これは, 基本図においてメタ安定分岐(第 4 章)として表現される. そこで, 各モデルの基本図を求め, それぞれのモデルの特徴を見る.(第 11 章)

7.3 1 次元セルオートマトン

空間格子 j と整数時刻 t を独立変数, U を従属変数とする. また, サイト j , 時刻 t における U の値を U_j^t と書くことにする.

このとき, たとえば,

$$U_j^{t+1} = U_{j+1}^t U_j^t (1 - U_{j-1}^t)$$

という時間発展方程式を考えると, 初期の U の値がすべて 0 か 1 だけならば, 右辺は常に 0 か 1 の値しか取らないので, この時間発展系は CA を構成するといえる. 一般的に, 以下の形を満たすものを考える.

$$U_j^{t+1} = f(U_{j-1}^t, U_j^t, U_{j+1}^t) \quad (7.3.1)$$

ただし, 今は状態変数 U の値は 0 か 1 のどちらかであり, 関数 $f(x, y, z)$ も 3 つの引数に応じて 0 か 1 の値しか取らないものとする. つまり, 時刻 t での値が 0 か 1 の時に, 次の時刻 $t+1$ での値が 0 か 1 で閉じられている場合, この形にあてはまる CA 全体を Elementary CA(ECA) と呼ぶ.

さらに ECA は有限個しかないことがわかる. なぜなら, 3 つの引数 x, y, z はすべて 0 か 1 の値しか取らないので, その (x, y, z) の組み合わせは 2^3 個であり, それぞれの (x, y, z) 値に対して以下の表のように, f の値が 0 になるか 1 になるかを決めてしまえば, それで, 一つの ECA が決まってしまうからである.

x y z	111	110	101	100	011	010	001	000
f(x,y,z)	1	0	1	1	1	0	0	0
for rule number	128	64	32	16	8	4	2	1

つまり, ECA は全部で $2^8 = 256$ 種類しかない. 表の下段の 0 と 1 の並びによって ECA が一つ決まるので, その並びを 2 進数とみなして各 ECA を区別する番号(ルール番号)を決めることが出来る. 上の表のルール番号は $(10111000)_2 = 128 + 32 + 16 + 8 = 184$ である. あるサイトに車が存在する状態を"1" とし, 存在しない状態を"0" と考えるとこの rule-184CA モデルは単純な車の動きを表現していると考えることができる. これが後の rule-184CA モデル(11.1 節)でも述べるが, 交通流で用いられる CA の基礎となっている. 結局すべての ECA に $(00000000)_2 = 0$ から $(11111111)_2 = 255$ までの合計 256 個の一意的な番号を付けることが出来る.

7.4 Wolfram のクラス分け

Wolfram は、様々な CA に対していろいろな初期値から生じるパターンについて調べ、それらの結果をもとに CA が 4 つのクラスに分かれることを指摘した。(Appendix 参照) [41], [42], [44]

クラス 1 すべて 0 か 1 の一様な状態にたどり着く
(rule number = 40,254,etc)

クラス 2 1 の領域と 0 の領域が分離した定常パターンにたどり着く^{*1}
(rule number = 44,152,etc)

クラス 3 三角波がカオス的に生成消滅する
(rule number = 90,122,etc)

クラス 4 1 あるいは 0 の領域が時間とともに枝のように伸びる^{*2}

7.5 Wolfram のセルオートマトン理論に対する 20 の問題

CA は最近様々な方面で解析されているが、なお多くの重要な問題が残っており、Wolfram 自身、「Wolfram のセルオートマトン理論に対する 20 の問題」として未解決の問題を列挙している。[45] これらの問題を解くのは簡単ではないが、問題が解かれると CA 理論や複雑系の理論に対して多い進歩があるといえるだろう。ここではその 20 種類の問題を挙げておく。

Problem.1 –What overall classification of cellular automaton behaviour can be given?

Problem.2 –What are the exact relations between entropies and Lyapunov exponents for cellular automata?

Problem.3 –What is the analogue of geometry for configuration space of a cellular automaton?

Problem.4 –What statistical quantities characterize cellular automaton behavior?

Problem.5 –What invariants are there in cellular automaton evolution?

Problem.6 –How does thermodynamics apply to cellular automata?

Problem.7 –How is different behaviour distributed in the space of cellular automaton rules?

Problem.8 –What are the scaling properties of cellular automata?

Problem.9 –What is the correspondence between cellular automata and continuous systems?

Problem.10 –What is the correspondence between cellular automata and stochastic systems?

Problem.11 –How are cellular automata affected by noise and other imperfections?

Problem.12 –Is regular language complexity generically non-decreasing with time in one-dimensional cellular automata?

^{*1}交通流で扱う rule-184 モデル (Burgers CA) はクラス 2 に属する。

^{*2}ECA ではクラス 4 に属するものは無い。

Problem.13 –What limits sets can cellular automata produce?

Problem.14 –What are the connections between the computational and statistical characteristics of cellular automata?

Problem.15 –How random are the sequences generated by cellular automata?

Problem.16 –How common are the computational universality and undecidability in cellular automata?

Problem.17 –What is the nature of the infinite size limit for cellular automata?

Problem.18 –How common is computational irreducibility in cellular automata?

Problem.19 –How common are computationally intractable problems about cellular automata?

Problem.20 –What higher-level descriptions of information processing in cellular automata can be given?

次の章で紹介する超離散化は Burgers 方程式と Burgers Cellular Automaton を結ぶ変換であり, Problem9 の答えになっていると言えそうである. [46] また, 第 6 章で紹介した ASEP や ZRP は厳密に解くことのできる確率モデルであり, Problem10 を解明する鍵となっていそうである.

第8章 Burgers 方程式の超離散化

この章では超離散化という手法を用いて, Burgers 方程式から Burgers Cellular Automaton を導く方法を紹介する. [2], [15], [46], [47], [48], [49], [50]

8.1 超離散化の流れ

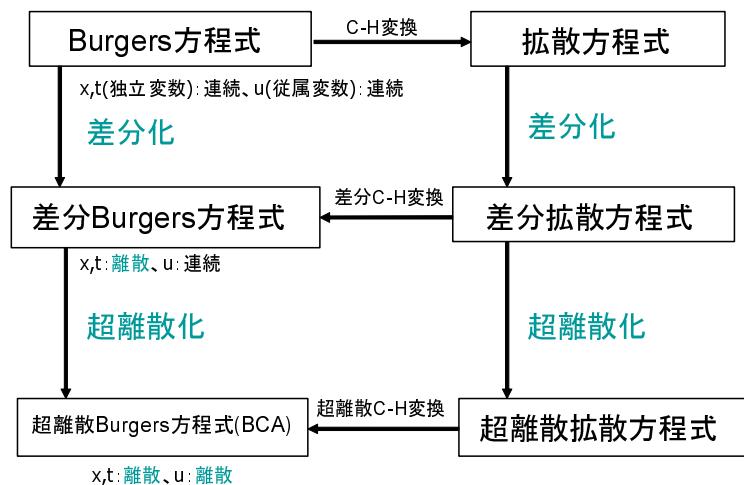


図 8.1: Burgers 方程式から超離散 Burgers 方程式を導くフローチャート

8.2 Burgers Equation

この節では, 拡散方程式から Burgers 方程式を導く.
まず $f(x, t)$ に関する拡散方程式

$$f_t = f_{xx} \quad (8.2.1)$$

を考える. ここで, 添え字の t, x はそれぞれの変数に関する偏導関数を表し, 添え字の個数が微分の階数を表す.

さらに, $f(x, t)$ から $u(x, t)$ 変数変換

$$u = (\log f)_x = \frac{f_x}{f} \quad (8.2.2)$$

を考える. この変数変換はコール・ホップ変換 (Cole-Hopf transformation) と呼ばれる.

(8.2.1) と (8.2.2) から u が満たすべき偏微分方程式が導かれる. (8.2.2) の両辺を t で微分して, その右辺に (8.2.1) を代入すると

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} \\ &= \frac{f_{xxx}}{f} - \frac{f_x f_{xx}}{f^2} \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

さらに, 右辺を u で表すための準備として, (8.2.2) を x で微分すると

$$u_x = \frac{f_{xx}}{f} - \frac{f_x^2}{f^2} \quad (8.2.4)$$

$$u_{xx} = \frac{f_{xxx}}{f} - 3 \cdot \frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 2 \cdot \frac{f_x^3}{f^3} \quad (8.2.5)$$

となる.

従って, これらの偏導関数を用いて (8.2.3) から

$$u_t = 2u u_x + u_{xx} \quad (8.2.6)$$

が導かれる. この式はバーガーズ方程式 (Burgers equation) と呼ばれ, 流体の一次元衝撃波の運動を記述するモデルとしてよく知られている.

まとめると, 以下の通り.

$$f_t = f_{xx} \quad (\text{diffusion.eq}) \quad (8.2.7)$$

$$\Downarrow u = \frac{f_x}{f} \quad (8.2.8)$$

$$u_t = 2u u_x + u_{xx} \quad (\text{Burgers.eq}) \quad (8.2.9)$$

8.3 Discrete Burgers Equation

この節では, 前節で求めた Burgers 方程式の差分版を考える.

前節で Burgers 方程式は, Cole-Hopf 変換を通じて拡散方程式と結びついた. つまり, Burgers 方程式は変数変換によって線形化ができた. この線形化可能という性質を保つように変換を考える. そのために, 差分拡散方程式を考え, 差分版 Cole-Hopf 変換を通じて差分バーガーズ方程式を導く.

まず, $\Delta t, \Delta x$ をそれぞれの時間格子, 空間格子の間隔とし, 次のように, 中心差分をとって拡散方程式の差分化を考える.

$$\frac{f_j^{t+1} - f_j^t}{\Delta t} = \frac{f_{j+1}^t - 2f_j^t + f_{j-1}^t}{\Delta x^2} \quad (8.3.1)$$

簡単のため, 差分の安定性条件から $\Delta t/(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}$ として, 上式を整理すると,

$$f_j^{t+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^t + f_{j-1}^t) \quad (8.3.2)$$

となる. 次に, Cole-Hopf 変換の差分化を

$$u_j^t = (\log f_{j+1}^t - \log f_j^t)/\Delta x \quad (8.3.3)$$

とする. 式の形を見やすくするため, u_j^t から v_j^t への変数変換 $v_j^t = \exp(\Delta x \cdot u_j^t)$ を (8.3.3) に行なうと,

$$v_j^t = f_{j+1}^t / f_j^t \quad (8.3.4)$$

となる. ここで (8.3.4) を用いて, v_j^t に関する時間発展方程式を導く.

$$\begin{aligned} v_j^{t+1} &= \frac{f_{j+1}^{t+1}}{f_j^{t+1}} \\ &= \frac{f_{j+2}^t + f_j^t}{f_{j+1}^t + f_{j-1}^t} \\ &= \frac{f_{j+1}^t}{f_j^t} \frac{f_{j+2}^t / f_{j+1}^t + f_j^t / f_{j+1}^t}{f_{j+1}^t / f_j^t + f_{j-1}^t / f_j^t} \\ &= v_j^t \frac{v_{j+1}^t + 1/v_j^t}{v_j^t + 1/v_{j-1}^t} \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

が得られる. この (8.3.8) が差分バーガーズ方程式 (Discrete Burgers Equation) である. 結局, 差分版でも同じように拡散方程式から Burgers 方程式を導けることがわかる.

まとめると, 以下の通り.

$$f_j^{t+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^t + f_{j-1}^t) \quad (\text{Discrete diffusion.eq}) \quad (8.3.6)$$

$$\Downarrow v_j^t = f_{j+1}^t / f_j^t \quad (8.3.7)$$

$$v_j^{t+1} = v_j^t \frac{v_{j+1}^t + 1/v_j^t}{v_j^t + 1/v_{j-1}^t} \quad (\text{Discrete Burgers.eq}) \quad (8.3.8)$$

8.4 Ultradiscrete Burgers Equation

前節で Burgers 方程式の差分化が得られたので, この節では超離散化を行い, 超離散 Burgers 方程式を導く.

極限に関する次のような公式がある.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A_1/\varepsilon} + e^{A_2/\varepsilon} + \cdots + e^{A_n/\varepsilon}) = \max(A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (8.4.1)$$

<証明>

$$\max(A_1, A_2, \dots, A_n) = A_i \text{ とおく.}$$

そこで, 左辺の \log の中身を $e^{A_i/\varepsilon}$ でくくると,

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log\left((e^{A_i/\varepsilon})(e^{A_1-A_i/\varepsilon} + e^{A_2-A_i/\varepsilon} + \cdots + 1 + \cdots + e^{A_n-A_i/\varepsilon})\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \left(\log(e^{A_i/\varepsilon}) + \log(e^{A_1-A_i/\varepsilon} + e^{A_2-A_i/\varepsilon} + \cdots + 1 + \cdots + e^{A_n-A_i/\varepsilon})\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(A_i + \varepsilon \log(1 + e^{A_1-A_i/\varepsilon} + e^{A_2-A_i/\varepsilon} + \cdots + e^{A_{i-1}-A_i/\varepsilon} + e^{A_{i+1}-A_i/\varepsilon} + \cdots + e^{A_n-A_i/\varepsilon})\right) \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

ここで右辺の \log を評価すると, $A_k - A_i < 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) ので, $\varepsilon \rightarrow +0$ で \log は 0 に収束し,

$$(8.4.2) = A_i \quad (8.4.3)$$

となる.■

この極限公式 (8.4.1) を用いていよいよ超離散化する.

まず ε をパラメータとして, f_j^t, v_j^t から F_j^t, U_j^t への変数変換

$$f_j^t = 2^{-t} \exp(F_j^t/\varepsilon) \quad (8.4.4)$$

$$v_j^t = \exp(U_j^t - L/2)/\varepsilon \quad (8.4.5)$$

を考える. v から U への変数変換で用いた L は定数である. この変数変換を施すと, (8.3.6) ~ (8.3.8) は,

$$F_j^{t+1} = \varepsilon \log(e^{F_{j+1}^t/\varepsilon} + e^{F_{j-1}^t/\varepsilon}) \quad (8.4.6)$$

$$\Downarrow U_j^t = F_{j+1}^t - F_j^t + \frac{L}{2} \quad (8.4.7)$$

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} = & U_j^t + \varepsilon \log(e^{(U_{j+1}^t - L/2)/\varepsilon} + e^{-(U_j^t - L/2)/\varepsilon}) \\ & - \varepsilon \log(e^{(U_j^t - L/2)/\varepsilon} + e^{-(U_{j-1}^t - L/2)/\varepsilon}) \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

となり, そこで $\varepsilon \rightarrow \infty$ の極限を取り, 極限公式 (8.4.1) を用いると,

$$F_j^{t+1} = \max(F_{j+1}^t, F_{j-1}^t) \quad (\text{Ultradiscrete diffusion eq.}) \quad (8.4.9)$$

$$\Downarrow U_j^t = F_{j+1}^t - F_j^t + \frac{L}{2} \quad (8.4.10)$$

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (\text{Ultradiscrete Burgers eq.}) \quad (8.4.11)$$

が得られる. この (8.4.11) が超離散バーガーズ方程式 (Ultradiscrete Burgers Equation) と呼ばれる.

8.5 超離散バーガーズ方程式の交通流的解釈

前節で求めた超離散バーガーズ方程式 (8.4.11) は,

$$\underbrace{U_j^{t+1}}_{\text{次の時刻のサイト } j \text{ の車の台数}} = \underbrace{U_j^t}_{\text{現在のサイト } j \text{ の車の台数}} + \underbrace{\min(U_{j-1}^t, L - U_j^t)}_{\text{サイト } j-1 \text{ からサイト } j \text{ への流入量}} - \underbrace{\min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)}_{\text{サイト } j \text{ からサイト } j+1 \text{ への流出量}}$$

と解釈できる.

8.6 Burgers Cellular Automaton

超離散 Burgers 方程式 (8.4.11) で, 任意の j に対して $0 \leq U_j^t \leq L$ と仮定する. (8.4.11) の右辺をそれぞれ以下のように 2 通りに変形すると,

$$U_j^{t+1} = \underbrace{\min(U_j^t + U_{j-1}^t, L)}_{\leq L} - \underbrace{\min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)}_{\geq 0} \quad (8.6.1)$$

$$U_j^{t+1} = \underbrace{\min(U_{j-1}^t, L - U_j^t)}_{\geq 0} - \underbrace{\min(0, L - U_j^t - U_{j+1}^t)}_{\leq 0} \quad (8.6.2)$$

となり,

$$0 \leq ((8.6.2) \text{ の右辺}) = U_j^{t+1} = ((8.6.1) \text{ の右辺}) \leq L \quad (8.6.3)$$

となる。つまり、もし初期時刻 $t = 0$ で U_j^0 の値がすべて 0 から L までの整数値で与えられていたら、それ以降の任意の時刻でも U_j^t は 0 から L までの整数値しかとらない。

以上のことから、超離散 Burgers 方程式 (8.4.11) は初期値に制限を与えることで、CA となる。この CA を **Burgers Cellular Automaton(BCA)** と呼ぶ。特に、 U の値を 0,1 に限定し、 $L = 1$ とすると rule184CA に相当し、これを **Elementary Burgers Cellular Automaton(EBCA)** と呼ぶ。

8.7 Elementary BurgersCA の特徴

EBCA には次の 2 つの主な特徴がある。

(1) 1 の個数が保存する

(証明)

1 周期分のセルの数を K とし、超離散 Burgers 方程式 (8.4.11) の両辺に $\sum_{j=1}^K$ を施すと、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^K U_j^{t+1} &= \sum_{j=1}^K U_j^t + \sum_{j=1}^K (\min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)) \\ &= \sum_{j=1}^K U_j^t + \min(U_0^t, L - U_1^t) - \min(U_K^t, L - U_{K+1}^t) \end{aligned} \quad (8.7.1)$$

となり、周期性 ($U_{j+K}^t = U_j^t$) より右辺の二つの \min の項が打ち消しあって、

$$\sum_{j=1}^K U_j^{t+1} = \sum_{j=1}^K U_j^t \quad (8.7.2)$$

が成り立つ。

つまり、時刻 t での車の数と時刻 $t + 1$ での車の数が等しくなり、車の台数は保存される。■

(2) 一般的な初期状態からしばらくは 0-1 パターンに複雑な変化が見られるが、時間がたつにつれて右ずれもしくは左ずれのパターンに必ず落ち着く

(証明)

超離散拡散方程式 (8.4.9) を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} F_j^t &= \max(F_{j+1}^{t-1}, F_{j-1}^{t-1}) \\ &= \max(\max(F_{j+2}^{t-2}, F_j^{t-2}), \max(F_j^{t-2}, F_{j-2}^{t-2})) \\ &= \max(F_{j+2}^{t-2}, F_j^{t-2}, F_{j-2}^{t-2}) \\ &= \max(F_{j+3}^{t-3}, F_{j+1}^{t-3}, F_{j-1}^{t-3}, F_{j-3}^{t-3}) \\ &= \dots \\ &= \max(F_{j+t}^0, F_{j+t-2}^0, F_{j+t-4}^0, \dots, F_{j-t+2}^0, F_{j-t}^0) \end{aligned} \quad (8.7.3)$$

となる. つまり, F_j^t の値は初期値 F_j^0 から計算できる. また,

$$\begin{aligned}
F_{j+k}^0 - F_j^0 &= (F_{j+k}^0 - F_{j+k-1}^0) + (F_{j+k-1}^0 - F_{j+k-2}^0) + \cdots + (F_{j+1}^0 - F_j^0) \\
&= \sum_{i=j}^{j+k-1} \left(U_i^0 - \frac{L}{2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \left(U_i^0 - \frac{L}{2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^k U_i^0 - \sum_{i=1}^k \frac{L}{2} \\
&= K \left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K U_i^0 - \frac{L}{2} \right) \\
&= K \left(\rho - \frac{L}{2} \right)
\end{aligned} \tag{8.7.4}$$

ここで, ρ は

$$\rho = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K U_i^0$$

で定義され, U_i^0 1 空間当たりの平均値(密度)である.(1) より, この量は t に依らない定数であり, $0 \leq \rho \leq 1$ を満たす. つまり, 任意の j に対して,

$$\begin{cases} F_{j+K}^0 < F_j^0 & (\rho < 1/2) \\ F_{j+K}^0 = F_j^0 & (\rho = 1/2) \\ F_{j+K}^0 > F_j^0 & (\rho > 1/2) \end{cases} \tag{8.7.5}$$

式(8.7.5)の場合わけを式(8.7.3)に適用して考える.

(a) $\rho < 1/2$ のとき

時間が十分にたった後 ($t \gg 0$) では, 式(8.7.3) は

$$F_j^t = F_{j-1}^{t-1} \tag{8.7.6}$$

となる. すると,

$$\begin{aligned}
U_j^{t+1} &= F_{j+1}^{t+1} - F_j^{t+1} + \frac{L}{2} \\
&= F_j^t - F_{j-1}^t + \frac{L}{2} \\
&= U_{j-1}^t
\end{aligned} \tag{8.7.7}$$

を満たし, 右ずれパターンとなる.

(b) $\rho > 1/2$ のとき

上と同様にして, $F_j^{t+1} = F_{j+1}^t$ より, $U_j^{t+1} = U_{j+1}^t$ となり, 左ずれパターンとなることがわかる.

以上のことから, まとめると,

$t \gg 0$ のとき, U_j^t の空間平均値 ρ は, $\rho < 1/2$ なら, 右ずれパターンに収束し, $\rho > 1/2$ なら, 左ずれパターンに収束する.

ことがわかる. ■

8.8 それぞれの Burgers 方程式の解の振る舞い

この節ではそれぞれ得られた各微分・差分・超離散 Burgers 方程式に対する解の比較をする。各方程式の解は拡散方程式の解を Cole-Hopf 変換することで得られる k, w, c, K, C を任意の定数として、各方程式の解は

$$\text{微分拡散方程式の解: } f(x, t) = \exp^{kx+k^2t+c} \quad (8.8.1)$$

$$\text{差分拡散方程式の解: } f_j^t = \exp^{kj+wn+c} \quad (8.8.2)$$

$$\text{超離散拡散方程式の解: } F_j^t = Kj + |K|t + C \quad (8.8.3)$$

であり、各方程式の線形性から（超離散方程式に関しては \max 演算に関して）解の重ねあわせを行なう。すると、

$$\text{微分拡散方程式の解の重ねあわせ: } f(x, t) = 1 + \exp^{k_1x+k_1^2t+c_1} + \exp^{k_2x+k_2^2t+c_2} + \cdots + \exp^{k_Nx+k_N^2t+c_N} \quad (8.8.4)$$

$$\text{差分拡散方程式の解の重ねあわせ: } f_j^t = 1 + \exp^{k_1j+w_1n+c_1} + \exp^{k_2j+w_2n+c_2} + \cdots + \exp^{k_Nj+w_Nn+c_N} \quad (8.8.5)$$

$$\text{超離散拡散方程式の解の重ねあわせ: } F_j^t = \max(0, K_1j + |K_1|t + C_1, \dots, K_Nj + |K_N|t + C_N) \quad (8.8.6)$$

も解になる。ただし、 k_i, c_i は任意の定数であり、 $w_i = \log(\cosh k_i)$ である。これを各 Cole-Hopf 変換に代入して、 $N = 1$ の場合を考えると、

$$\text{微分 Burgers 方程式の解: } u(x, t) = \frac{k_1}{1 + \exp^{k_1x+k_1^2t+c_1}} \quad (8.8.7)$$

$$\text{差分 Burgers 方程式の解: } v_j^t = \frac{1 + \exp^{k(j+1)+wn+c}}{1 + \exp^{kj+wn+c}} \quad (8.8.8)$$

$$\text{超離散 Burgers 方程式の解: } U_j^t = \max(0, K_1(j+1) + |K_1|t + C_1) - \max(0, K_1j + |K_1|t + C_1) + \frac{L}{2} \quad (8.8.9)$$

となる。この各解の Plot が図 8.2 ~ 図 8.5 である。

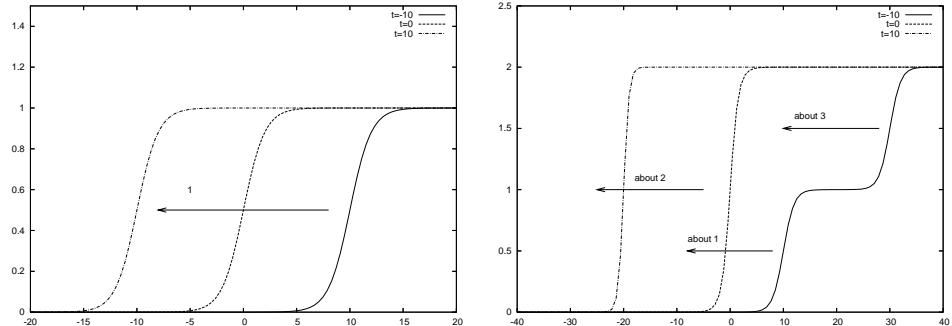


図 8.2: Burgers 方程式の解（左が $N = 1, k_1 = 1, c_1 = 0$ の場合、右が $N = 2, k_1 = 1, k_2 = 2, c_1 = c_2 = 0$ の場合）。

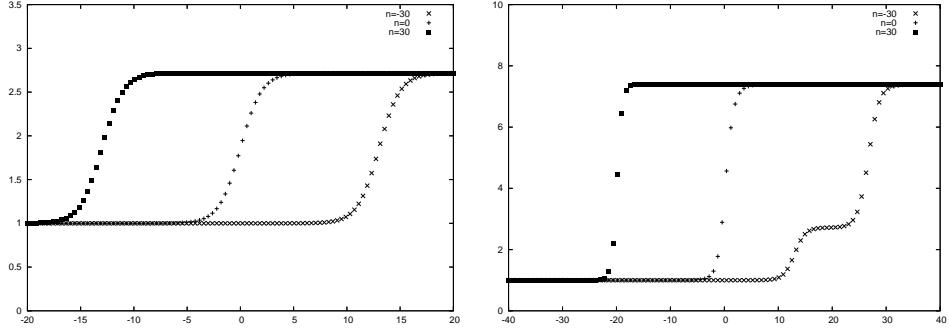


図 8.3: 差分 Burgers 方程式の解 (左が $N = 1, k_1 = 1, c_1 = 0$ の場合, 右が $N = 2, k_1 = 1, k_2 = 2, c_1 = c_2 = 0$ の場合).

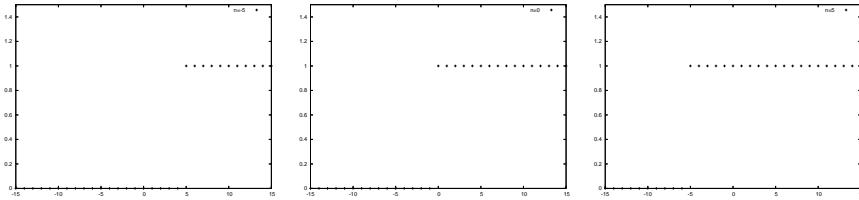


図 8.4: 超離散 Burgers 方程式の解 ($N = 1, k_1 = 1, c_1 = 0$ の場合).

図からわかるように, 差分・超離散 Burgers 方程式でも衝撃波解が存在している. ただ, しかし, 図 8.5 を見ると, 微分・差分 Burgers 方程式で時間がたつと上の段が下の段に追いついて一段のグラフになるのに対して, 超離散 Burgers 方程式ではいつまでたっても一段にならない. つまり, 微分・差分方程式の方には複数の衝撃波の融合という特徴が超離散化という極限操作によって失われた. しかし, その極限操作によって微分・差分の方程式で観察できない特徴のある解 (BurgersCellularAutomaton) を作ることができる.

超離散化は以下のようにまとめることができる.

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \quad (\text{Burgers.eq}) \quad (8.8.10)$$

$$\Downarrow \quad U_j^t = \frac{L}{2} + \varepsilon \Delta x u_j^t, \quad \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (8.8.11)$$

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (\text{Ultra Burgers.eq}) \quad (8.8.12)$$

そこで $L = 1$ と置いて変数変換 $U_j^t = \frac{1}{2} + \varepsilon \Delta x u_j^t$ を $u_j^t = (U_j^t - \frac{1}{2})/(\varepsilon \Delta x)$ と書き直すと, U が $1/2$ よりも少しでも大きいと $\varepsilon \rightarrow 0$ で u が無限大, 小さいと負の無限大になってしまふ. このことから, 超離散 Burgers 方程式における有限振幅の波の時間変化は微分・差分方程式の方では無限振幅の波の変化に対応する. このスケール変換によって微分・差分の方では見えなかった秩序パターンが超離散化によって見え, CA という手法で解析することができるのである.

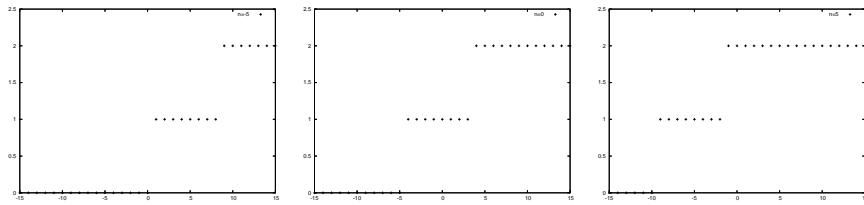


図 8.5: 超離散 Burgers 方程式の解 ($N = 2, k_1 = 1, k_2 = 2, c_1 = 4, c_2 = 0$ の場合).

8.9 超離散化という言葉の意味

ここでは、超離散化という言葉について少し説明する。まず、超離散 Burgers 方程式において、右辺の変数がすべて整数ならば、左辺の U_j^{t+1} は必ず整数である。つまり、 L が整数で、 U の初期値がすべて整数なら、以降の任意の時刻で U の値は整数となる。一般に超離散化が完成した時、得られた式に含まれる演算は \max と $+$ だけなので、係数・定数・初期値が整数である限り、いつでもこのようなことが成り立つ。以上のことから、次の図式が成り立つ。

	微分方程式	差分方程式	超離散方程式 (CA)
独立変数 (時間、位置)	連続	離散	離散
従属変数 (物理量)	連続	連続	離散

つまり差分化で微分方程式における独立変数の離散化を行い、超離散化で従属変数の離散化を行い、あらゆる変数の離散化が出来る。このような究極的な離散化という意味で「離散化」に「超」をつけて、「超離散化」と呼ぶ。

第9章 超離散化の周辺

9.1 超離散化と Max-Plus 代数に関する公式

†max 演算

$$\max(A, B) = \begin{cases} A & (A > B) \\ B & (A < B) \end{cases} \quad (9.1.1)$$

† 超離散化の極限を取る公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B) \quad (9.1.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} \times e^{B/\varepsilon}) = A + B \quad (9.1.3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} / e^{B/\varepsilon}) = A - B \quad (9.1.4)$$

†(max,+) と (+,×) との各法則での比較

	(max, +)	(+, ×)
交換法則	$\max(A, B) = \max(B, A)$ $A + B = B + A$	$a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$
結合法則	$\max(A, \max(B, C)) = \max(\max(A, B), C)$ $A + (B + C) = (A + B) + C$	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
分配法則	$A + \max(B, C) = \max(A + B, A + C)$	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

† 単位元・逆元

	max	+
単位元	$\max(A, -\infty) = A$ 単位元は $-\infty$	$A + 0 = A$ 単位元は 0
逆元	＊＊＊＊＊ ＊＊＊＊＊	$A + B = 0 \iff B = -A$ 逆元は $-A$

max に関する逆元は,

$$\max(A, X) = -\infty \quad (9.1.5)$$

を満たすような X のことであり, これは $A = -\infty$ のときしか成立しない. このことから, 減法に関する max の逆演算がうまく定義できない. このことから, Max-Plus 代数方程式が解けるためには制約条件が必要となってくる. たとえば,

$$\max(A, X) = B \quad (9.1.6)$$

を満たすような X が一意に存在するためには $A \leq B$ でなければならず, そのときは $X = B$ である. このことから Max-Plus 代数に特徴として次のことが言える.

† Max-Plus 代数の特徴=『Max-Plus 代数には【除法】はあるが【減法】はない!』

$$A + B = 0 \rightarrow A = 0 - B = -B \quad (9.1.7)$$

$$\max(A, B) = C \rightarrow A = \text{????} \quad (9.1.8)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{C/\varepsilon - e^{B/\varepsilon}}) = \text{????} \quad (9.1.9)$$

† 主な等式

$$\triangleright \max(A, B) + C = \max(A + B, A + C) \quad (9.1.10)$$

$$\triangleright \max(A, B) + \max(C, D) = \max(A + C, A + D, B + C, B + D) \quad (9.1.11)$$

$$\triangleright C \geq 0 のとき, C \max(A, B) = \max(CA, CB) \quad (9.1.12)$$

$$\triangleright \max(A, B) = -\min(-A, -B) \quad (9.1.13)$$

$$\triangleright \max(2A, A + B, 2B) = 2 \max(A, B) \quad (9.1.14)$$

$$\triangleright \max(\min(A, B), C) = \min(\max(A, C), \max(B, C)) \quad (9.1.15)$$

9.2 超離散をめぐる今後の課題

超離散化の手法に関しては以下に述べるように様々な課題が残っている. [46]

今まで超離散方程式の解を求める時は, ほとんどの場合離散方程式の解を構成し, その超離散極限をとるという筋道であった. しかし, 最初から超離散の世界で考え, そこで解を求めることができてもよさそうである. ところがここに超離散系における大きな問題が存在する. それは, 超離散系では, 普通の実数, 複素数で使っている四則演算や等式をそのまま扱うことはできないのである. 何らかの新しい代数系を作り上げる必要があり, 上で述べたように Max-Plus 代数 [51] も作られているが, 減法がないなど, まだまだ不十分で超離散系を記述する代数系としてうまくいってはいえない.

9.2.1 超離散化についての条件

超離散化が可能となる基本的な条件として以下の 2 点ある.

まず, 超離散化を行なうためには, 『マイナス符号の項がある方程式では基本的にはできない』と言われている. これを「負号の問題」と呼んでいる.

次に, 従属変数を指数関数に変数変換するので, 『必ず正の値をとること』を前提としている. 従つて, 三角関数など正負の値をとる基本解を持つものは超離散化は難しいと考えられている. この困難がなければ, おそらく原理的にどのような方程式でも形式上, 超離散化は可能である.

次式のような 1 階差分方程式を超離散化してみる.

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \quad (9.2.1)$$

変数変換 $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ を代入すると,

$$e^{X_{n+1}/\varepsilon} = \frac{e^{X_n/\varepsilon} - 1}{e^{X_n/\varepsilon} + 1} \quad (9.2.2)$$

両辺の \log をとって,

$$X_{n+1}/\varepsilon = \log(e^{X_n/\varepsilon} - 1) - \log(e^{X_n/\varepsilon} + 1) \quad (9.2.3)$$

$$X_{n+1} = \varepsilon \left(\log(e^{X_n/\varepsilon} - 1) - \log(e^{X_n/\varepsilon} + 1) \right) \quad (9.2.4)$$

となるが, 極限操作の $\varepsilon \rightarrow +0$ で右辺第一項の評価が問題となる.

つまり, 計算式の中で負の符号をもった項が現れたとき,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \left(\log(e^{A/\varepsilon} - e^{B/\varepsilon}) \right) \quad (9.2.5)$$

という極限を考えなければならないが, この式の意味のある極限を見つけることは今のところうまくいっていない.

また負の符号が出てくることを避けるために,(9.2.1) を次のように整理して,

$$1 + x_{n+1}(x_n + 1) = x_n \quad (9.2.6)$$

とすると, 超離散化によって,

$$e^{0/\varepsilon} + e^{X_{n+1}/\varepsilon}(e^{X_n/\varepsilon} + 1) = e^{X_n/\varepsilon} \quad (9.2.7)$$

$$\varepsilon \log(e^{0/\varepsilon} + e^{X_{n+1}/\varepsilon}(e^{X_n/\varepsilon} + 1)) = X_n \quad (9.2.8)$$

$$\varepsilon \log(e^{0/\varepsilon} + e^{X_{n+1}/\varepsilon + X_n/\varepsilon} + e^{X_{n+1}/\varepsilon}) = X_n \quad (9.2.9)$$

$$\max(0, X_{n+1}, X_n + X_{n+1}) = X_n \quad (\varepsilon \rightarrow +0) \quad (9.2.10)$$

となるが, これでは, X_n から X_{n+1} を一意的に決めることが出来ない.

また,(9.2.1) は以下のように x_n の解は常に周期 4 の周期解になり, 解に必ず負の項を含むことがわかる.

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \quad (9.2.11)$$

$$x_{n+2} = -\frac{1}{x_n} \quad (9.2.12)$$

$$x_{n+3} = -\frac{x_n + 1}{x_n - 1} \quad (9.2.13)$$

$$x_{n+4} = x_n \quad (9.2.14)$$

解に負の項を含むので, そもそも指數関数での変数変換に無理がある.

このように, 方程式の係数, あるいは解を求めるときの計算式で負の符号が現れた場合に対して, うまく初期値を選び方程式の形を工夫することによって解決できる場合もあるが, 一般的な解決法はまだみつかっていない.

9.2.2 複素数値の方程式に対する超離散化

例えば, サインゴルドン (Sine-Gordon) 方程式に対する超離散化を考える.

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin(u) \quad (9.2.15)$$

このサインゴルドン方程式を離散化した離散サインゴルドン方程式には三角関数の \sin が式中に現れる方程式であり, Euler の公式

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad (9.2.16)$$

を用いて三角関数を指数関数で表すと、指数に複素数が表れてしまう。つまり、単純に超離散化を考えると、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(1 + \exp(ix/\varepsilon)) \quad (9.2.17)$$

という極限を考えればいいことになるが、この式に極限値は存在しない。このため、離散サインゴルドン方程式の超離散化はうまくいっていない。同様の方程式に非線形シュレディンガー方程式もある。これらの方程式のように複素数系が入ってくる方程式での取り扱いも今後の課題である。

第10章 Euler-Lagrange 変換

流体運動を記述する一つの方法は、流体を無数の微小部分に分けて、それぞれの運動を時間的に追跡するやり方である。これを **Lagrange 式記述**といい、流体の微小部分のことを簡単に流体粒子と呼ぶことにする。もう一つの記述法は、ある時刻における流れの状態をその時刻における位置座標 x と時刻 t とを独立変数として表すやり方で、これを **Euler 式記述**という。^[52]

この章では CA 版の Euler 式記述・Lagrange 式記述を考え、Euler 式記述と Lagrange 式記述間の Euler-Lagrange 変換 (**Euler-Lagrange transformation**) を考える。^{[12], [16], [53]}

10.1 EBCA の Euler-Lagrange 変換

一番簡単なモデルとして、EBCA の Euler-Lagrange 変換をしてみる。
EBCA は式で表すと次のようになる。

$$U_j^{t+1} = U_j^t - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) \quad (10.1.1)$$

U_j^t は時刻 t 、場所 j における車の台数を示している。

これに対し、変数変換 $U_j^t = S_j^t - S_{j-1}^t$ を施す。
すると、

$$\begin{aligned} S_j^{t+1} - S_{j-1}^{t+1} &= S_j^t - S_{j-1}^t - \min(S_j^t - S_{j-1}^t, L - S_{j+1}^t + S_j^t) \\ &\quad + \min(S_j^t - S_{j-1}^t, L - S_j^t + S_{j-1}^t) \\ &= S_j^t - S_{j-1}^t + \max(-S_j^t + S_{j-1}^t, -L + S_{j+1}^t - S_j^t) \\ &\quad - \max(-S_{j-1}^t + S_{j-2}^t, -L + S_j^t - S_{j-1}^t) \\ &= \max(-S_j^t + S_{j-1}^t + S_j^t, -L + S_{j+1}^t - S_j^t + S_j^t) \\ &\quad - \max(-S_{j-1}^t + S_{j-2}^t + S_{j-1}^t, -L + S_j^t - S_{j-1}^t + S_{j-1}^t) \\ &= \max(S_{j-1}^t, -L + S_{j+1}^t) - \max(S_{j-2}^t, -L + S_j^t) \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

密度一様でない条件下で、つまり $j = -\infty$ では粒子がないものとして、両辺 $j = -\infty$ から j まで足すと

$$S_j^{t+1} = \max(S_{j-1}^t, S_{j+1}^t - L) \quad (10.1.3)$$

となる。

ここで、

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10.1.4)$$

という Step function を用いると, S_j^t は, 次のように $H(x)$ を用いて表せる.

$$S_j^t = \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t) \quad (10.1.5)$$

ただし, N は道路上の車の総台数を表し, x_i^t は Lagrange 型変数で, 時刻 t での i 番目の車の位置を表す. この x_i^t に対して次の関係が成り立つ.

$$x_0^t \leq x_1^t \leq \cdots \leq x_{N-1}^t \quad (10.1.6)$$

(10.1.5) は Euler 型変数 S と, Lagrange 型変数 x との関係を示している. これで, (10.1.3) を $H(x)$ を用いて変形すると,

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) = \max \left[\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t - 1), \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t + 1) - L \right] \quad (10.1.7)$$

となる.

ここで, max function と step function を用いた 2 つの関係式を以下に示す. (図 10.1, 図 10.2)

$$\triangleright \quad \sum_{k=1}^n H[j - \min(a_k, b_k)] = \max \left[\sum_{k=1}^n H(j - a_k), \sum_{k=1}^n H(j - b_k) \right] \quad (10.1.8)$$

$$\triangleright \quad \max \left[\sum_{i=1}^n H(j - a_i^t) - m, 0 \right] = \sum_{i=1}^n H(j - a_{i+m}^t) \quad (10.1.9)$$

ただし $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots \leq a_n, \quad b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_k \leq \cdots \leq b_n$

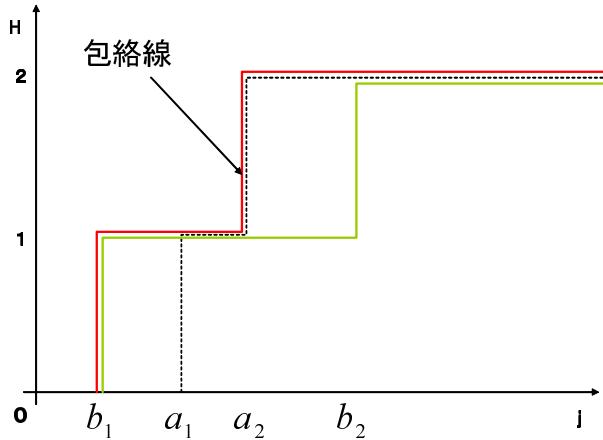


図 10.1: (10.1.8) の図解証明. 各 step function の max を取るので, グラフの包絡線を取ることになる.

この 2 式を用いて (10.1.7) を変形すると,

$$\begin{aligned} \sum_i H(j - x_i^{t+1}) &= \max \left[\sum_i H(j - x_i^t - 1), \sum_i H(j - x_{i+L}^t + 1) \right] \\ &= \sum_i H[j - \min(x_i^t + 1, x_{i+L}^t - 1)] \end{aligned} \quad (10.1.10)$$

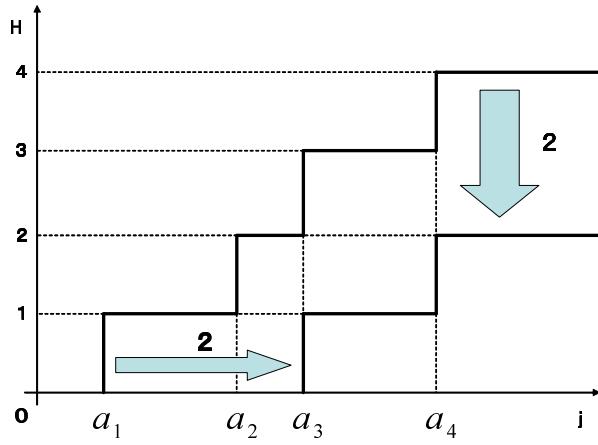


図 10.2: (10.1.9) の図解証明.step function から 2 を引くと, それは添え字に 2 を加えたグラフに等しい.

両辺を比較して,

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= \min(x_i^t + 1, x_{i+L}^t - 1) \\ &= x_i^t + \min(1, x_{i+L}^t - x_i^t - 1) \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

$L = 1$ の時, この式が rule-184CA(BCA) の Lagrange 表現になっている.

$$\underbrace{x_i^{t+1}}_{\text{時刻 } t+1 \text{ での } i \text{ 番目の車の位置}} = \underbrace{x_i^t}_{\text{時刻 } t \text{ での } i \text{ 番目の車の位置}} + \min(1, \underbrace{x_{i+1}^t - x_i^t - 1}_{\text{時刻 } t \text{ で } i+1 \text{ 番目まで } i \text{ 番目の車の前方の空きセル数}}) \quad (10.1.12)$$

10.2 Euler-Lagrange 変換のまとめ

Euler-Lagrange 変換によってサイト U に関する式 (Euler 表現) だった BurgersCA を車の位置 x に関する式 (Lagrange 表現) に変換できた.

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (\text{Euler rep. of BurgersCA}) \quad (10.2.1)$$

$$\Downarrow \quad U_j^t = \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t) - \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_{i-1}^t) \quad (10.2.2)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(1, x_{i+L}^t - x_i^t - 1) \quad (\text{Lagrange rep. of BurgersCA}) \quad (10.2.3)$$

10.3 Lagrange representation of rule-184CA モデルと OV モデルとの比較

今, 得られた Lagrange 表現式 (10.2.3) の両辺に $-(x_i^t - x_i^{t-1})$ を加えると,

$$x_i^{t+1} - 2x_i^t + x_i^{t-1} = \min(1, x_{i+1}^t - x_i^t - 1) - (x_i^t - x_i^{t-1}) \quad (10.3.1)$$

となり, 形式的に次のように変換する.

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = a \left[V \min(1, x_{i+1}^t - x_i^t - 1) - \frac{dx_i}{dt} \right] \quad (10.3.2)$$

$$a \sim \frac{1}{\Delta t}, \quad V \sim \frac{1}{\Delta t} \quad (10.3.3)$$

すると, (10.3.3) のようにパラメータを近似すると, (10.3.2) が OV モデルの 6.2.2(6.2 節) となる.

この rule-184CA モデル (10.2.1) と OV モデル (10.3.2) の対応はあくまでも形式的なものである. このままでは OV モデルのパラメータ a が非常に大きいもの, つまり, ドライバーの反応がとてもよい OV モデルに対応していて, OV モデルの安定領域しか見えていないことになる (図 6.2). これは妥当な結果である. なぜなら, もともと BurgersCA はどのような擾乱に対しても安定なので, OV モデルでも安定なものしか得られないことに対応している. 従って, 一般に不安定を示すような a に対しての OV モデルとの対応はまだわかっていない. そこで不安定な一様流を表すメタ安定分岐をもつ CA モデル (特に SISCA モデル) に対して OV モデルとの対応を考えてみると非常に有効なことであると言える.

10.4 流体モデルと CA モデルと追従(OV) モデルの「形式的」関係

超離散化と Euler-Lagrange 変換によって Burgers 方程式と rule- 184CA(BurgersCA), さらに OV モデルが結びついた。(図 10.3)

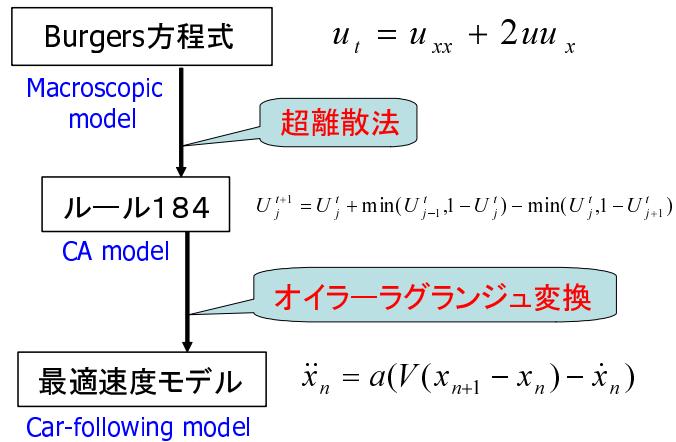


図 10.3: 超離散法と Euler-Lagrange 変換によって「形式的に」結びついたそれぞれのモデルの関係

第11章 様々な拡張されたCA モデル

交通流のCA モデルは、これまでに様々なルールを導入したモデルが考え出されてきている.[2], [10], [11], [13], [31] 交通の流れは「車」というはっきりした離散的な「粒子」の運動であるので, CA を使ってルールベースにモデル化できないだろうかと考えるのは自然なことだろう。しかし、そのルールを作る際に難しいことは、車は単純な力学原理だけで動いているのではなく、人間の心理的効果を考えなければならない点にある。そのため、どのような効果を重要と見るかの違いでこれまでに様々なルールが考案されている。そして、どのルールが優れているかを判断しようとすると、観測事実をいかに良く再現できているモデルかどうかを見ることが最も重要である。ここでは、交通流の本質が潜んでいると考えられる基本図におけるメタ安定分岐の有無を考えつつ、モデルの紹介を行なう。本論文では基本図を得るために、全体のセル数を 200 セル、時間ステップを 1000 ステップ、平均流量は 801 ステップから 1000 ステップまでの流量の平均として、シミュレーションを行なった。

11.1 rule-184 CA (Burgers CA) model

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (11.1.1)$$

このモデルは Wolfram のルール番号で 184 の CA モデルである。また、このモデルは第 8 章において Burgers 方程式から超離散化という手法によって導き出した Burgers CA モデルに等しく、今日の様々な拡張を組み込んだ CA モデルの基本となっているモデルである。

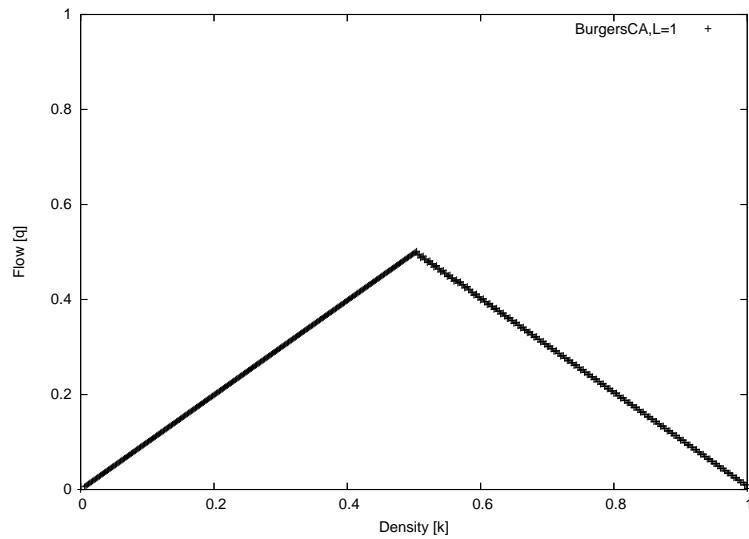


図 11.1: rule-184 CA(Burgers CA) の基本図

しかし、図 11.1 に見られるように、この rule-184CA(BurgersCA) モデルでの基本図は二等辺三角形で、渋滞相転移は極めて単純であり、残念ながら高速道路のデータに見られるような複雑な現象を再現する（メタ安定分岐を見る）ことはできていないことがわかる。そこで、次節からはこの rule-184CA(BurgersCA) をベースとして様々な効果を入れた拡張モデルを見ていく。

11.2 Slow Start CA(SISCA) model

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min \left[U_{j-1}^t - \left(U_{j-1}^{t-1} - \min(U_{j-1}^{t-1}, L - U_j^{t-1}) \right), L - U_j^t \right] - \min \left[U_j^t - \left(U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1}) \right), L - U_{j+1}^t \right] \quad (11.2.1)$$

前節の rule-184CA(BurgersCA) モデルに車の慣性の効果を入れたものである. [10], [31], [54] つまり, 車が止まるときはある程度早く止まることができるが, その一方, 一度止まった車は次に動き出しへきることをルールに組み込んだものである. つまり, 一度停止した車は前が空いて動けるようになっても, 一時刻ステップ待ってから動き始めるというもの (1回休み) である. SISCA モデルは, 図 11.2 のようにメタ安定分岐が現れる最も簡単なモデルである. 現在, メタ安定分岐を表現するのはこの SlowStart の効果が最も有効であると考えられている. しかし, 初期状態をうまく設定しなければ, 基本図ではっきりとしたメタ安定分岐は見えない. 特にメタ安定分岐の高流量部の枝を出すには 1 が二つ以上ならばないようにしなければならず, 適当な乱数で初期条件を選んだだけではほとんど出現しない. これは, 現実には高密度自由走行は不安定でほとんど出現しないことに対応していると考えられる.

rule-184CA(BurgersCA) から SISCA モデルを作る方法を解説する. SlowStart のポイントは, "止まった車はすぐには動き出せない" であるから, 各サイトで止まっている車と動いている車を区別して考える. 時刻 $t-1$ の時に, サイト $j+1$ にいる車によってブロックされたサイト j の車の台数は $U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1})$ で与えられ, この車達は, 時刻 t において動くことが出来ない. そこで, 時刻 t においてサイト $j+1$ に動くことの出来る最大の車の数がわかる. それを表したのが (11.2.1) である.

ここで各項の説明をしておくと, まず左辺と右辺の第一項は,

$$\underbrace{\overbrace{U_j^{t+1}}^{\text{時刻 } t+1 \text{ サイト } j \text{ の車の台数}}}_{\text{時刻 } t \text{ でサイト } j-1 \text{ から動くことの出来る車の数}} - \underbrace{\overbrace{U_j^t}^{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ の車の数}}}_{\text{時刻 } t \text{ でサイト } j-1 \text{ から流入してくる車の数}}$$

さらに, 右辺の第二項は,

$$\underbrace{\min \left[U_{j-1}^t - \left(\underbrace{\overbrace{U_{j-1}^{t-1} - \min(U_{j-1}^{t-1}, L - U_j^{t-1})}^{\text{時刻 } t-1 \text{ でサイト } j-1 \text{ にいてサイト } j \text{ の車にブロックされた車の数}} \right), \underbrace{\overbrace{L - U_j^t}^{\text{サイト } j \text{ の空き}} \right]}}_{\text{時刻 } t \text{ でサイト } j-1 \text{ から動くことの出来る車の数}} - \underbrace{\min \left[U_j^t - \left(\underbrace{\overbrace{U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1})}^{\text{時刻 } t-1 \text{ でサイト } j \text{ にいてサイト } j+1 \text{ の車にブロックされた車の数}} \right), \underbrace{\overbrace{L - U_{j+1}^t}^{\text{サイト } j+1 \text{ の空き}} \right]}}_{\text{時刻 } t \text{ でサイト } j+1 \text{ に流出する車の数}}$$

最後に右辺の第三項は,

$$\underbrace{\min \left[U_j^t - \left(\underbrace{\overbrace{U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1})}^{\text{時刻 } t-1 \text{ でサイト } j \text{ にいてサイト } j+1 \text{ の車にブロックされた車の数}} \right), \underbrace{\overbrace{L - U_{j+1}^t}^{\text{サイト } j+1 \text{ の空き}} \right]}}_{\text{時刻 } t \text{ でサイト } j \text{ から動くことの出来る車の数}} - \underbrace{\min \left[U_j^t - \left(\underbrace{\overbrace{U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1})}^{\text{時刻 } t-1 \text{ でサイト } j \text{ にいてサイト } j+1 \text{ の車にブロックされた車の数}} \right), \underbrace{\overbrace{L - U_{j+1}^t}^{\text{サイト } j+1 \text{ の空き}} \right]}}_{\text{時刻 } t \text{ でサイト } j+1 \text{ に流出する車の数}}$$

となる. 次に CA を構成していることの確認をする. つまり, $0 \leq U_j^t, U_j^{t-1} \leq L$ なら $0 \leq U_j^{t+1} \leq L$ を満たすかどうかの確認をする.

(11.2.1)において U_j^t を第二項に加えて右辺を次のように変形すると

$$\underbrace{\min[U_j^t + U_{j-1}^t - (U_{j-1}^{t-1} - \min(U_{j-1}^{t-1}, L - U_j^{t-1})), L]}_{\leq L} - \underbrace{\min[U_j^t, L - U_{j+1}^{t-1} + U_j^t - U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^t]}_{\geq 0} \leq L \quad (11.2.2)$$

- \min の中身の $L - U_{j+1}^{t-1} + U_j^t - U_j^{t-1} \geq 0$ の証明

$$U_j^{t-1} - \left(\underbrace{L - U_{j+1}^{t-1}}_{\substack{\text{サイト } j+1 \text{ の空き容量}}} \right) \leq U_j^t \text{ より成り立つ.}$$

サイト $j+1$ に移ることで j に残ってしまう車の台数

また, U_j^t を第三項に加えて右辺を次のように変形すると

$$\underbrace{\min[U_{j-1}^t, L - U_j^{t-1} - U_{j-1}^{t-1} + U_{j-1}^t, L - U_j^t]}_{\geq 0} - \underbrace{\min[0, L - U_{j+1}^{t-1} - U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^t - U_j^t]}_{\leq 0} \geq 0 \quad (11.2.3)$$

以上,(11.2.2) と (11.2.3) より $0 \leq U_j^{t+1} \leq L$ が確認できた.

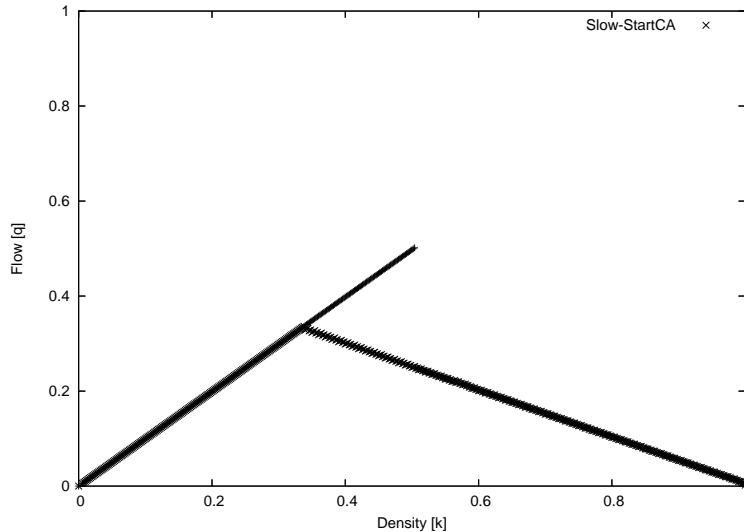


図 11.2: Slow-Start CA の基本図

このSISCA モデルでは, 図 11.2 のような基本図になり, 特別な初期状態の場合(車列が $\cdots 01010101010 \cdots$ のように車が並び, 2 台以上つながって並ばないとき)だけ, グラフが右上に伸びていきメタ安定分岐を見ることができる.

11.3 Quick Start CA(QSCA) model

$$\begin{aligned}
 U_j^{t+1} &= U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t + \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t + \min(U_{j+1}^t, L - U_{j+2}^t)) \\
 &= U_j^t + \min(U_{j-1}^t, 2L - U_j^t - U_{j+1}^t) - \min(U_j^t, 2L - U_{j+1}^t - U_{j+2}^t) \quad (U \leq L)
 \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

これは Burgers CA に見通しの概念を入れたモデルであり, 2 セル先まで見て移動している。つまり, 次のセル j にいる車のうち何台かはその次のセル $j+1$ に移動するから, 次のセル j には BurgersCA よりももう少し多く移動できるというものである.[10] このモデルは, 後述する GBCA モデル (11.7 節) の $V = 1, P = 2$ の場合に相当し, CA を構成しているかどうかは, GBCA の節で確認する。

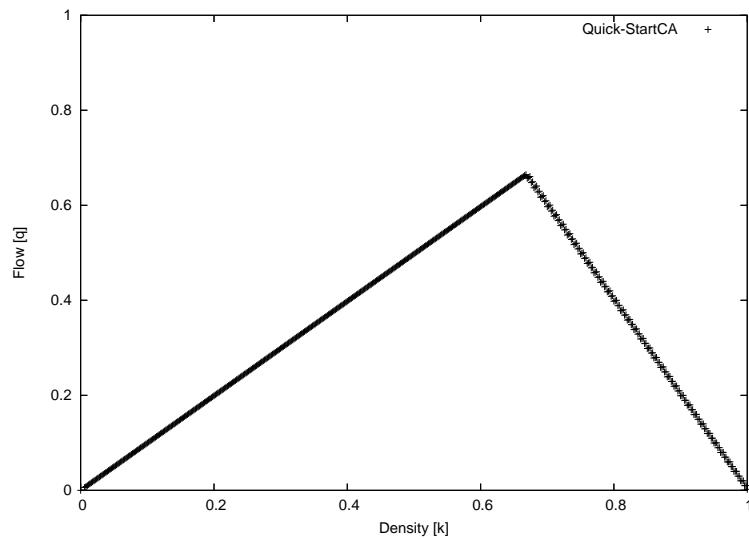


図 11.3: Quick-Start CA の基本図

図 11.3 のように, この QuickStartCA モデルではメタ安定分岐は見られず, 見通しがあるので BurgersCA に比べて高流量部が密度の高い右側によるだけである。

11.4 Fukui Ishibashi CA(FICA) model

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(b_{j-1}^t + a_{j-2}^t, 1 - U_j^t) - \min(b_j^t + a_{j-1}^t, 1 - U_{j+1}^t) \quad (11.4.1)$$

ただし,

$$a_j^t = \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t, 1 - U_{j+2}^t) \quad (\text{速度 2 で動く車の台数}) \quad (11.4.2)$$

$$b_j^t = \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t) \quad (\text{速度 1 で動く車の台数}) \quad (11.4.3)$$

Burgers CA モデルは最高速度が 1 である。これを拡張して、最高速度を $V \geq 1$ とするモデルが考案された。^[14] つまり、1 時間ステップで、前が V セル以上空いていれば V セル進むことが出来るものとする。(上の式は $V = 2$ で見通しを持たないモデルの式である。)

V セル以上の空きが無ければ、車を追い越すことが出来ないので、空きのセル分だけ動くというモデルである。これは、後述する GBCA モデル(11.7 節)の $L = 1, V = 2, P = 1$ の場合に相当し、CA を構成しているかどうかは GBCA の節です。

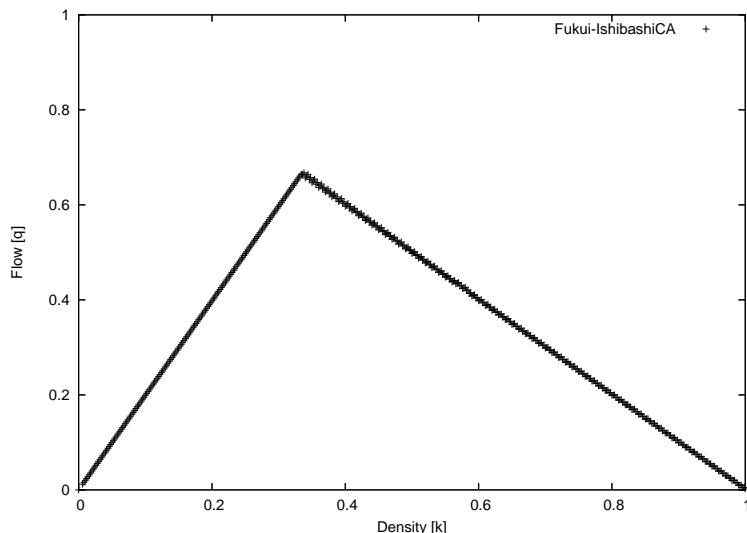


図 11.4: Fukui-Ishibashi CA の基本図

図 11.4 に見られるように、Fukui-Ishibashi モデルでもメタ安定分岐は見ることができず、速度が速くなるため三角形の頂点が左によった形となる。

11.5 Extended Burgers CA model ver.1(EBCA1)

$$\begin{aligned}
 U_j^{t+1} &= U_j^t + b_{j-1}^t - b_j^t + \min(b_{j-2}^t, L - U_j^t - b_{j-1}^t + b_j^t) - \min(b_{j-1}^t, L - U_{j+1}^t - b_j^t + b_{j+1}^t) \\
 &= U_j^t + \min(b_{j-1}^t + b_{j-2}^t, L - U_j^t + b_j^t) - \min(b_j^t + b_{j-1}^t, L - U_{j+1}^t + b_{j+1}^t)
 \end{aligned} \tag{11.5.1}$$

ただし,

$$b_j^t = \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t)$$

これは, 遅い車 (Speed1) が動いた後に, 速い車 (Speed2) が動くというモデル. [10], [30] つまり, 以下の二段階に分かれて時間更新が行なわれる.

step1 Speed 1

次のセルが空いていれば, 車は次のセルに移動する.

step2 Speed 2

その動いた車の中でさらに次のセルが空いている場合, もう 1 セル車は動くことが出来る.

$\min(b_{j-2}^t, L - U_{j+2}^t - b_{j+1}^t + b_{j+2}^t)$ は step2 において $(j+1)$ のセルにさらに動くことの出来る車を示している.

Fukui-Ishibashi モデルは parallel-update(ある時刻において全てのサイトに関して動くスピードを決める) であるので, 先に Speed1 が動いて Speed2 で動く車を判断するこの EBCA1 モデルとは異なっており, 次節で紹介する EBCA2 の方が Fukui-Ishibashi モデルを含んだ拡張である.

また, step1 で止まった車は step2 で動くことができないので, EBCA1 は SISCA モデルの速度アップ版の拡張であるといえる. SIS と EBCA1 の関係を調べる. EBCA1 の各 step を式にすると下のようになる.

$$U_j^{t+1/2} = U_j^t + b_{j-1}^t - b_j^t \tag{11.5.2}$$

$$U_j^{t+1} = U_j^{t+1/2} + \min(U_{j-1}^{t+1/2} - (U_{j-1}^t - b_{j-1}^t), L - U_j^{t+1/2}) - \min(U_j^{t+1/2} - (U_j^t - b_j^t), L - U_{j+1}^{t+1/2}) \tag{11.5.3}$$

ここで U_j^{t+1} は step1 が終わった直後のサイト j にいる車の台数を示している. (11.1.1) において, $t+1$ を $t+1/2$ に置き換えたものが (11.5.2) であり, (11.2.1) において, t を $t+1/2$ に $t-1$ を t に置き換えたものが (11.5.3) である. つまり, EBCA1 モデルは BCA モデルと SISCA モデルの統合モデルであるといえる.

上で述べたように BCA モデルと SISCA モデルの統合モデルであるので, 図 11.5 のように, この Extended BurgersCA1 モデルにはメタ安定分岐が見られ, 最高速度が 2 なので, 密度 0.5 の時は, 流量は BurgersCA の場合の倍になる.

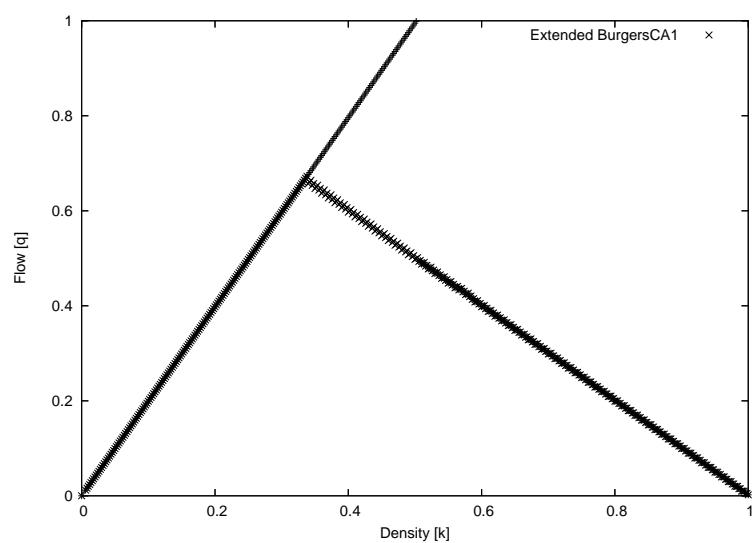


図 11.5: Extended Burgers CA1 の基本図

11.6 Extended Burgers CA model ver.2(EBCA2)

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(b_{j-1}^t + a_{j-2}^t, L - U_j^t + a_{j-1}^t) - \min(b_j^t + a_{j-1}^t, L - U_{j+1}^t + a_j^t) \quad (11.6.1)$$

ただし,

$$a_j^t = \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t, L - U_{j+2}^t)$$

$$b_j^t = \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)$$

前節で紹介したの EBCA1 に対し, これは, 速い車 (Speed2) が先に動いて, その後に遅い車 (Speed1) が動くというモデル.[10]

図 11.6 のように, この Extended BurgersCA モデルにはメタ安定分岐が見られず, $L = 1$ で Fukui-Ishibashi モデルと等価になっている.

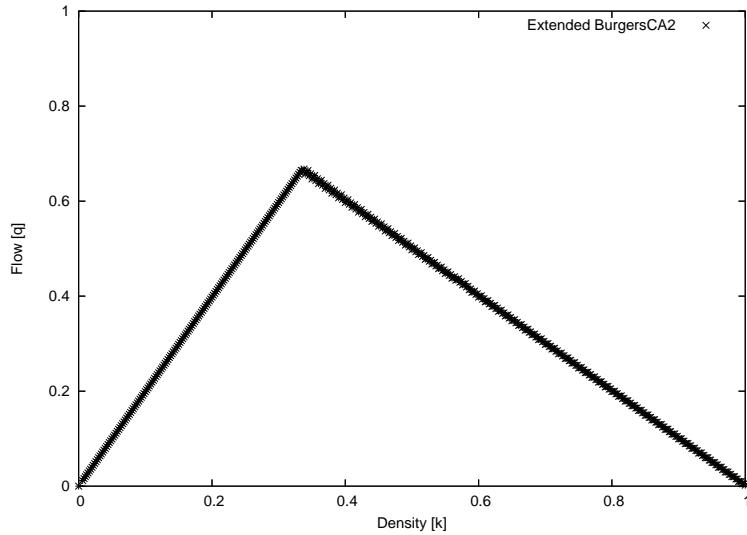


図 11.6: Extended Burgers CA2 の基本図

†Fukui-Ishibashi モデルと ExtendedBurgersCA2(L=1) モデルの等価性の証明

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} &= U_j^t + \min(b_{j-1}^t + a_{j-2}^t, 1 - U_j^t) - \min(b_j^t + a_{j-1}^t, 1 - U_{j+1}^t) && \text{(FImodel)} \\ U_j^{t+1} &= U_j^t + \min(b_{j-1}^t + a_{j-2}^t, 1 - U_j^t + a_{j-1}^t) - \min(b_j^t + a_{j-1}^t, 1 - U_{j+1}^t + a_j^t) && \text{(EBCA2(L=1))} \end{aligned}$$

(証明)

両式の前の min の項について考える。

まず,(FImodel)について。

$$\begin{aligned} \min(b_{j-1}^t + a_{j-2}^t, 1 - U_j^t) &= \min(U_{j-1}^t + U_{j-2}^t, 1 - U_j^t + U_{j-2}^t, 1, 2 - U_{j-1}^t - U_j^t, 1 - U_j^t + U_{j-1}^t, 2(1 - U_j^t), 1 - U_j^t) \\ &= \min(U_{j-1}^t + U_{j-2}^t, 1 - U_j^t) \end{aligned} \quad (11.6.2)$$

次に (EBCA2) について。

$$\begin{aligned} &\min(b_{j-1}^t + a_{j-2}^t, 1 - U_j^t + a_{j-1}^t) \\ &= \min(U_{j-1}^t + U_{j-2}^t, 1 - U_j^t + U_{j-2}^t, 1, 2 - U_{j-1}^t - U_j^t, \\ &\quad 1 - U_j^t + U_{j-1}^t, 2(1 - U_j^t), 1 - U_j^t + U_{j-1}^t, 2(1 - U_j^t), 2 - U_j^t - U_{j+1}^t) \\ &= \min(U_{j-1}^t + U_{j-2}^t, 1, 2(1 - U_j^t)) \end{aligned} \quad (11.6.3)$$

(11.6.3) は, $U_j^t = 0, 1$ に限定されているので,

$$\min(1, 2(1 - U_j^t)) = \begin{cases} 1 & (\text{if } U_j^t = 0) \\ 0 & (\text{if } U_j^t = 1) \end{cases} \quad (11.6.4)$$

となるので,

$$\min(1, 2(1 - U_j^t)) = 1 - U_j^t \quad (U_j^t = 0, 1) \quad (11.6.5)$$

を満たす。よって,(11.6.2) = (11.6.3) となり,

$$(FImodel) = (EBCA2model(L = 1)) \blacksquare \quad (11.6.6)$$

つまり,EBCA2 は $L = 1$ の場合に Fukui-Ishibashi モデルと等価であり,EBCA2 モデルは Fukui-Ishibashi モデルを含んでいることがわかる。

11.7 Generalized Burgers CA(GBCA) model

$$U_j^{t+1} - U_j^t = \min\left(\sum_{k=0}^{V-1} U_{j-1-k}^t, \sum_{k=0}^{P-1} (L - U_{j+k}^t)\right) - \min\left(\sum_{k=0}^{V-1} U_{j-k}^t, \sum_{k=0}^{P-1} (L - U_{j+1+k}^t)\right) \quad (11.7.1)$$

これは, multi-value(多車線モデル (L 車線)), multi-neighbor(ハイスピード (最高速度 V)・見通し (P 台前の車まで見る))を持つ拡張をした BCA である.[55] これは $L = 1, V = 2, P = 1$ で Fukui-Ishibashi model になっており, $V = 1, P = 2$ で Quick-Start model になり, 両モデルを含んでいる.

CA の構成を確認する.

- (11.7.1) の右辺を下のように 2 通りに変形する.

$$U_j^{t+1} = \min\left(\sum_{k=0}^V U_{j-k}^t, PL - \sum_{k=1}^{P-1} U_{j+k}^t\right) - \min\left(\sum_{k=0}^{V-1} U_{j-k}^t, PL - \sum_{k=0}^{P-1} U_{j+1+k}^t\right) \quad (11.7.2)$$

$$U_j^{t+1} = \min\left(\sum_{k=0}^{V-1} U_{j-1-k}^t, PL - \sum_{k=0}^{P-1} U_{j+k}^t\right) - \min\left(\sum_{k=1}^{V-1} U_{j-k}^t, PL - \sum_{k=0}^P U_{j+k}^t\right) \quad (11.7.3)$$

(11.7.2) より, 右辺を \min の各項に対して以下のように場合分けをする.

$$\begin{cases} U_j^{t+1} = \sum_{k=0}^V U_{j-k}^t - \sum_{k=0}^{V-1} U_{j-k}^t = U_{j-V}^t \leq L \\ U_j^{t+1} = \sum_{k=0}^V U_{j-k}^t - \left(PL - \sum_{k=1}^{P-1} U_{j+1+k}^t\right) \leq \left(PL - \sum_{k=1}^{P-1} U_{j+k}^t\right) - \left(PL - \sum_{k=0}^{P-1} U_{j+1+k}^t\right) = U_{j+P}^t \leq L \\ U_j^{t+1} = \left(PL - \sum_{k=1}^{P-1} U_{j+k}^t\right) - \sum_{k=0}^{V-1} U_{j-k}^t \leq \sum_{k=0}^V U_{j-k}^t - \sum_{k=0}^{V-1} U_{j-k}^t = U_{j-V}^t \leq L \\ U_j^{t+1} = \left(PL - \sum_{k=1}^{P-1} U_{j+k}^t\right) - \left(PL - \sum_{k=0}^{P-1} U_{j+1+k}^t\right) = U_{j+P}^t \leq L \end{cases} \quad (11.7.4)$$

この (11.7.4) よりいずれの場合も L 以下であることがわかる.

同様に,(11.7.3) より, 右辺を \min の各項に対して以下のように場合分けをする.

$$\begin{cases} U_j^{t+1} = \sum_{k=0}^{V-1} U_{j-1-k}^t - \sum_{k=1}^{V-1} U_{j-k}^t = U_{j-V}^t \geq 0 \\ U_j^{t+1} = \sum_{k=0}^{V-1} U_{j-1-k}^t - \left(PL - \sum_{k=0}^P U_{j+k}^t\right) \geq \sum_{k=0}^{V-1} U_{j-1-k}^t - \sum_{k=1}^{V-1} U_{j-k}^t = U_{j-V}^t \geq 0 \\ U_j^{t+1} = \left(PL - \sum_{k=0}^{P-1} U_{j+k}^t\right) - \sum_{k=1}^{V-1} U_{j-k}^t \geq \left(PL - \sum_{k=0}^{P-1} U_{j+k}^t\right) - \left(PL - \sum_{k=0}^P U_{j+k}^t\right) = U_{j+P}^t \geq 0 \\ U_j^{t+1} = \left(PL - \sum_{k=0}^{P-1} U_{j+k}^t\right) - \left(PL - \sum_{k=0}^P U_{j+k}^t\right) = U_{j+P}^t \geq 0 \end{cases} \quad (11.7.5)$$

この (11.7.5) よりいずれの場合も 0 以上であることがわかる.

以上の事から, $0 \leq U \leq L$ を満たし, CA を構成していることがわかる.

図 11.7 のように, GBCA は SlowStart の効果が入っていないので, 閉じた三角形になっており, メタ安定分岐は見られない. 三角形の頂点は最高速度 V , 見通し P の値によって変化するする基本図となる.

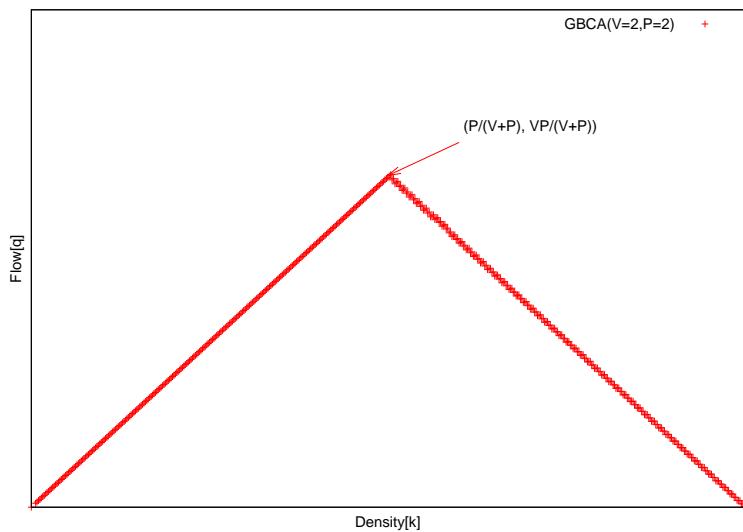


図 11.7: Generalized Burgers CA の基本図 (V=2,P=2)

11.8 Nagel Schreckenberg CA(NSCA) model

他のモデルは確率の入っていない決定論的なモデルであるのに対し,1992 年に Nagel と Schreckenberg によって,CA に確率を導入することにより,ランダム性を組み込んだ確率 CA モデルが提案された.[13]¹

このルールの最も重要な点は,確率 p で車の速度を減速させる(ランダムブレーキ)概念を導入したという点である. 決定論的なモデルは立式が可能であるが,乱数を組み込んだ確率論的なモデルでは立式は難しく,update のルールで表現する. このモデルの具体的な update ルールは以下の通りである.

Step1 Acceleration

車の速度が v_{max} よりも小さく ($v < v_{max}$), かつ, 前方の車との距離が $(v + 1)$ より大きければ, 速度を 1だけ上げる.

$$(v \rightarrow v + 1)$$

Step2 Slowing down(due to other cars)

車がサイト i について, その前の車がサイト $i + j$ にいるとき, $j \leq v$ なら, サイト i にいる車は衝突を避けるため減速し, 速度を $j - 1$ にする. $(v \rightarrow j - 1)$

Step3 Randomization

車が停止していない時 ($v \neq 0$), 確率 p で速度を 1 下げる.

$$(v \rightarrow v - 1)$$

Step4 Car motion

各車を parallel update で v 進める.

これで 1 時間ステップ進めるものとする.

ランダムブレーキの確率を $P = 0, P = 0.2, P = 0.4, P = 0.6, P = 0.8$ と変えたときのそれぞれの基本図が図 11.8 である. この図 11.8 を見ると, ランダムブレーキの効果でデータが分布していることがわかる. しかし, メタ安定分岐が見えているとはいえない.

¹Nagel らはシミュレーションの際, $1cell = 7.5m$, $V_{max} = 5$ とし, 1timestep は実時間で 1 秒に対応させている.

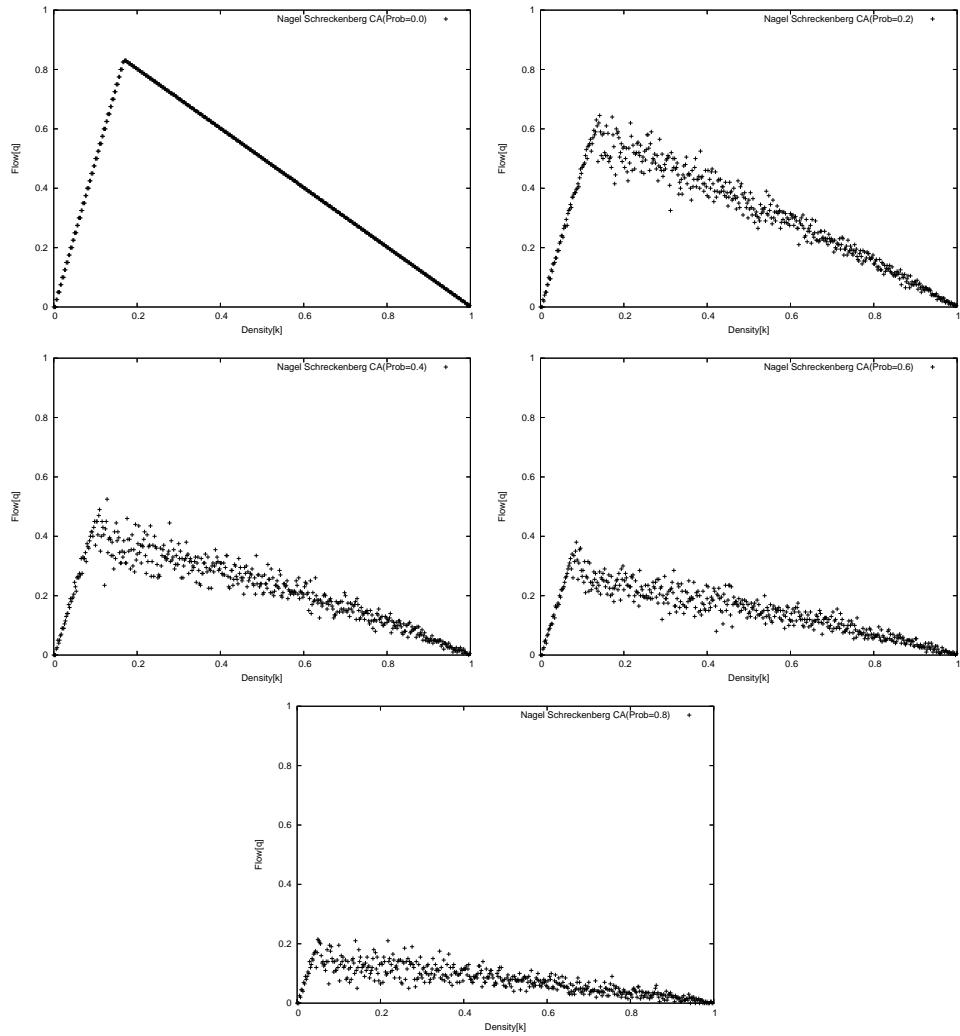


図 11.8: Nagel Schreckenberg CA の基本図 (V=5)

11.9 Velocity-Dependent Randomization CA(VDRCA) model

NS モデルでは出なかったメタ安定分岐を出すために NS モデルを改良したものがこの VDR モデルである.[31] そのために, NS モデルのランダムブレーキのルールに対して SlowStart の効果を導入している. 具体的には, 通常 NS モデルは最高速度 5 でシミュレーションされており, どの速度で走っていても確率 p で 1 だけ減速させるが, VDR では速度が高いものは減速確率を低く (速度が低いものほど加速しにくい) して SlowStart の効果を入れる.

ランダムブレーキ確率 p を速度に依存した形で $p = p(v(t))$ と考える. このパラメータは Step1 で加速する前に決められる. 単純に次のように決める.

$$p(v) = \begin{cases} p_0 & \text{for } v = 0 \\ p & \text{for } v > 0 \end{cases}$$

ここで $p_0 > p$ に制限する. つまり, 止まっていると動き出しにくい効果をこの確率の大小関係で導入する.

このモデルの具体的な update ルールは以下の通りである.

Step1 Acceleration

車の速度が v_{max} よりも小さく ($v < v_{max}$), かつ, 前方の車との距離が $(v + 1)$ より大きければ, 速度を 1 だけ上げる.

$$(v \rightarrow v + 1)$$

Step2 Slowing down(due to other cars)

車がサイト i について, その前の車がサイト $i + j$ にいるとき, $j \leq v$ なら, サイト i にいる車は衝突を避けるため減速し, 速度を $j - 1$ にする. ($v \rightarrow j - 1$)

Step3 Randomization

- 車が停止していない時 ($v \neq 0$), 確率 p で速度を 1 下げる.

$$(v \rightarrow v - 1)$$

- 車が止まった時 ($v = 0$), 確率 $1 - p_0$ で速度を 1 上げる.

$$(v \rightarrow v + 1)$$

Step4 Car motion

各車を parallel update で v 進める.

これで 1 時間ステップ進めるものとする.

ランダムブレーキの確率 P, P_0 をそれぞれ変えたときの基本図が図 11.9 である.

図 11.9 を見ると上の 4 つのグラフは走っている時のランダムブレーキがない状態 ($p = 0$) のシミュレーションであり, 左上のグラフを除いて顕著にメタ安定分岐が見られていることがわかる. 左上のグラフは SlowStart の確率も 0 としているので, メタ安定分岐は見られない. また, 下の 4 つのグラフは走っている時のランダムブレーキの効果も入れているもので, その確率を大きくするにつれて流量が減少していることがわかる. さらに, 走っているランダムブレーキ確率が同じ状況で比較すると, 止まった時のランダムブレーキ確率が大きい方がより顕著にメタ安定分岐が見えていることがわかる.

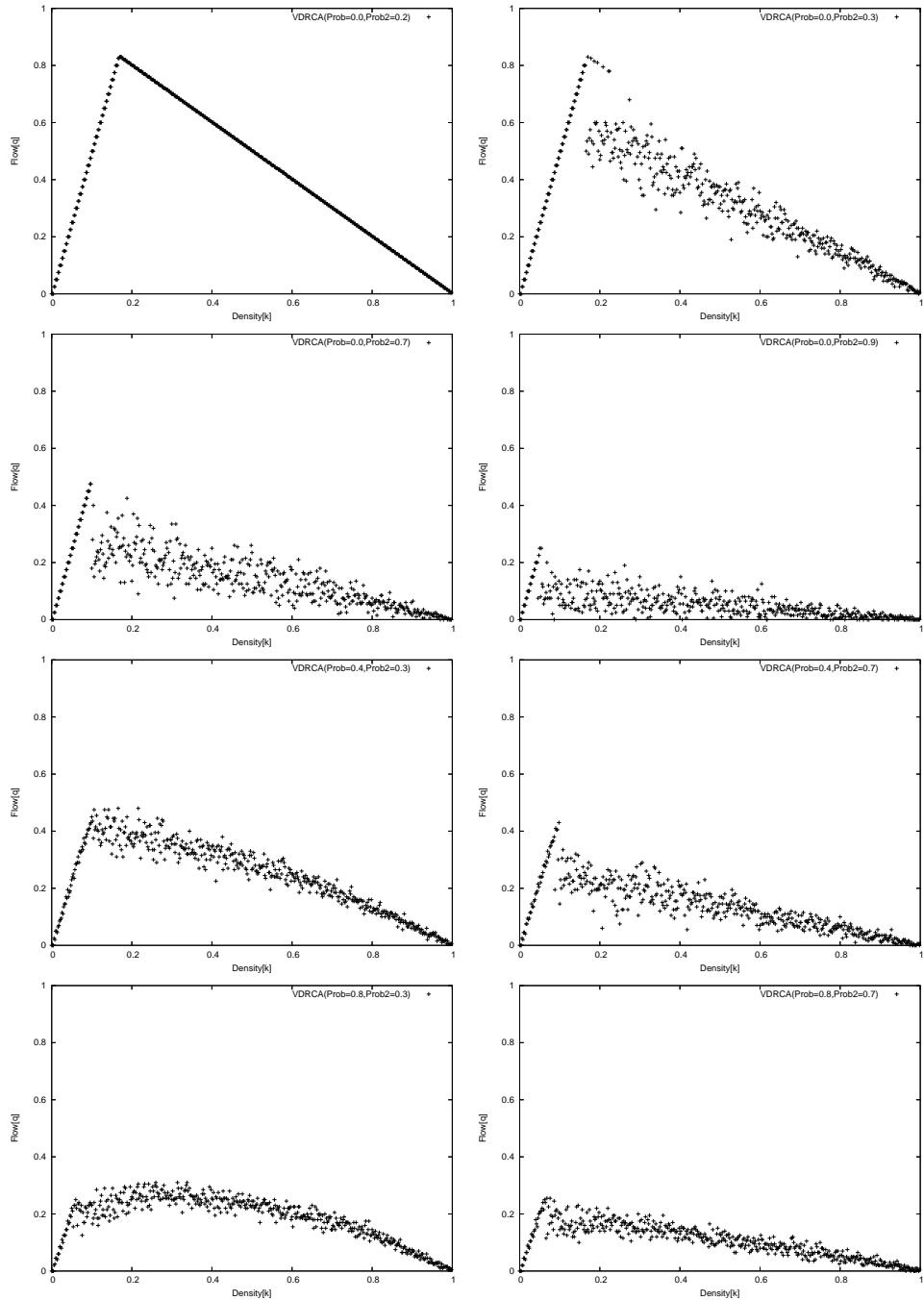


図 11.9: Velocity Dependent Randomization CA の基本図 ($V=5$)

11.10 Noisy BurgersCA(NBCA) model

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M_j^t, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M_{j+1}^t, U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (11.10.1)$$

これは、基本となる BurgersCA に、ノイズを入れたモデルである。[11],[15],[30] この Noisy-BurgersCA は摂動項の付いた Burgers 方程式を超離散化することによって得られる。つまり、

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} + \eta_x \quad (\text{Noisy Burgers.eq}) \quad (11.10.2)$$

↓

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M_j^t, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M_{j+1}^t, U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (\text{Noisy Ultra Burgers.eq}) \quad (11.10.3)$$

ただし、 $\eta = \eta(x, t)$ を任意関数とし、Burgers 方程式に対する摂動^{*2} とする。

この Noisy-BurgersCA を交通流的に解釈する。(11.10.3) の右辺の第二項を次のように書き換える。

$$\min(M_j^t, U_{j-1}^t, L - U_j^t) = \min(M_j^t, \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t)) \quad (11.10.4)$$

すると、 $\min(U_{j-1}^t, L - U_j^t)$ は、サイト $j - 1$ での車が j での空きに移れるだけ移った時の流入量である。この流入量が M_j^t を超えてしまうと、 M_j^t に制限されてしまう。さらに、 M_j^t が U_j^t によらずに決めることができるので、以下のような様々な拡張が考えられる。

- 制限を作ることが出来るので、動ける車の台数を制限することができる。
(局所的な車線数の減少など。)
- M_j^t の値を確率で与えることによって、ランダムな制限をかけることができ、さらに全セルに渡って確率を導入することで確率 CA モデルを作ることもできる。
(信号機の設置、ASEP、ZRP など。)
特に、 $L = 1$ で M_j^t に確率を入れると NS モデルの $V = 1$ 版と等価になっていることがわかる。
- M_j^t を独立変数でなく、 U_j^t との依存性を持たせることによって、連立系に拡張できる。
(車線変更のできる 2 車線モデル、交差点を持つモデルなど。)

図 11.10 での数値シミュレーションでは、 $L = 1$ とし、 M_j^n で信号機による効果を導入して行なった。
(全セルは 200 セルで信号を 50 セルごとに一つ配置。)

$$M_j^n = \begin{cases} 1 & (\text{Probability } \alpha) \\ 0 & (\text{Probability } 1 - \alpha) \end{cases} \quad (11.10.5)$$

また、図 11.11 でのシミュレーションでは、 $L = 3$ とし、 $M_j^n = 1$ で車線数の制限を設けて行なった。(車線数の制限は全セル 200 セルのうち真ん中の 100 セルの所に一ヶ所だけ配置。) 図 11.10 を見ると、信号が青になる確率が小さくなっていくに連れて流量が制限され、頂点の高さが低くなっていることがわかる。また、図 11.11 を見ると、多車線に対してもある一ヶ所で流量を制限するだけで、図 11.1 に見られるような三角形の頂点は見えなくなり、基本図は台形の形となる。

^{*2}摂動 (セツドウ):ある物体にはたらく力の作用のうち、主要な力に対して、付加的な小さな力の作用を言う。(大辞林 第二版)

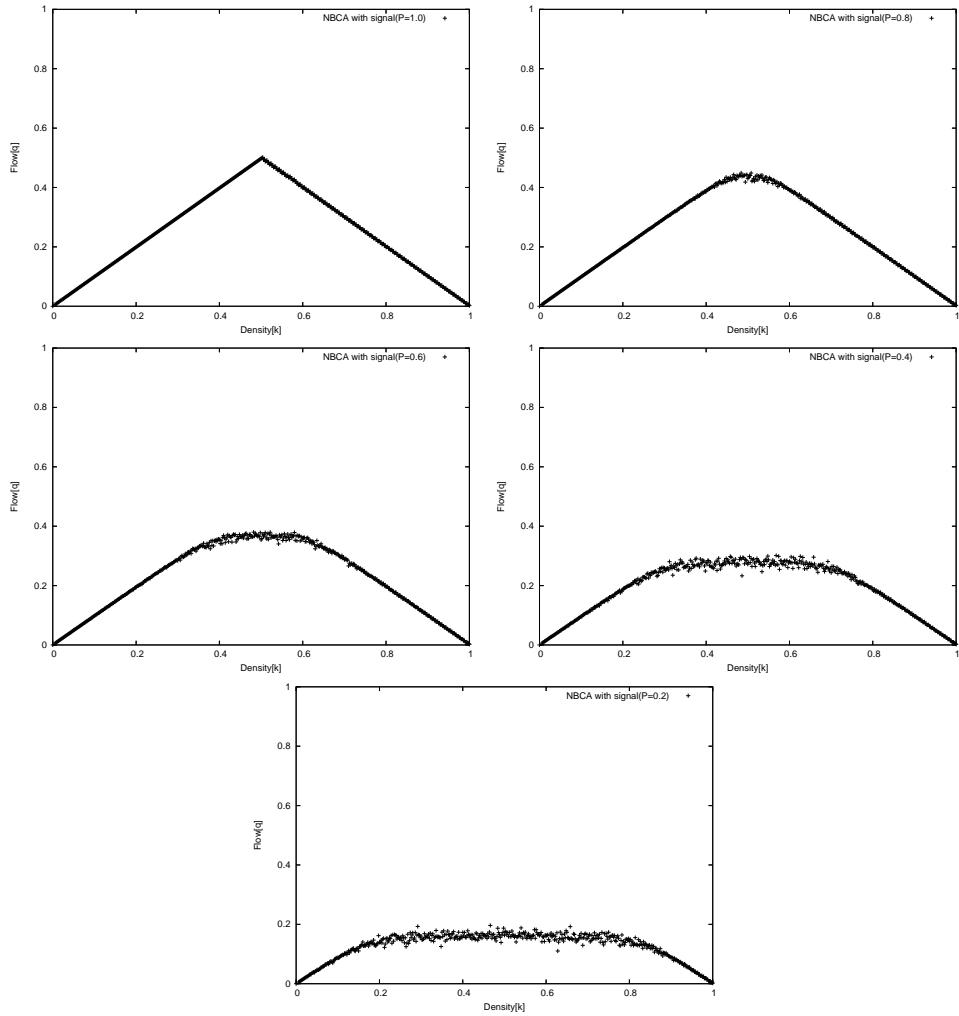


図 11.10: Noisy Burgers CA の基本図 (L=1)(with traffic signal model)

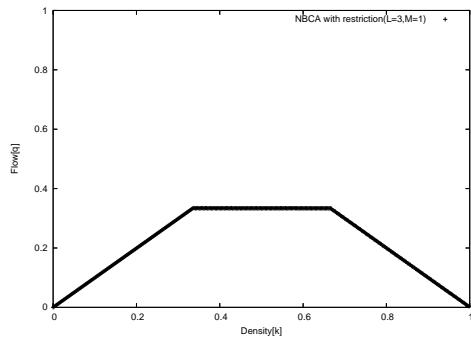


図 11.11: Noisy Burgers CA の基本図 (L=3, M=1)(with road restricted model)

第12章 追い越しのないCAモデルの Euler-Lagrange変換

12.1 GBCA版 Euler-Lagrange変換

Quick-Start モデル ($L = 1, V = 1$) や Fukui-Ishibashi モデル ($L = 1, P = 1$) を含むモデルとして Generalized BCA の Euler-Lagrange変換を考える.[55] GBCA は (11.7.1) より次のように書ける.

$$U_j^{t+1} - U_j^t = \min\left(\sum_{k=0}^{V-1} U_{j-1-k}^t, \sum_{k=0}^{P-1} (L - U_{j+k}^t)\right) - \min\left(\sum_{k=0}^{V-1} U_{j-k}^t, \sum_{k=0}^{P-1} (L - U_{j+1+k}^t)\right)$$

変数変換 $U_j^t = S_j^t - S_{j-1}^t$ を施し, $k = -\infty$ で車はないものとすると, 次のように表せる.

$$S_j^{t+1} = \max(S_{j-V}^t, S_{j+P}^t - LP) \quad (12.1.1)$$

ここで,

$$S_j^t = \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t) \quad (12.1.2)$$

とする. ただし, $H(x)$ は step function とし, N はセル上の車の総台数とする. x_i^t は i 台目の車の場所を表す Lagrange 型変数で, $x_0^t < x_1^t < x_2^t < \dots < x_{N-1}^t$ を満たす. (12.1.1) を (14.1.2) で書き換えると,

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) = \max\left(\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t - V), \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t + P) - LP\right) \quad (12.1.3)$$

$$= \max\left(\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t - V), \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_{i+LP}^t + P)\right) \quad (12.1.4)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} H(j - \min(x_i^t + V, x_{i+LP}^t - P)) \quad (12.1.5)$$

両辺を比較して,

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= \min(x_i^t + V, x_{i+LP}^t - P) \\ &= x_i^t + \min(V, x_{i+LP}^t - x_i^t - P) \end{aligned}$$

これが, GBCA の Lagrange 表現である.

以下, 各モデルの Lagrange representation

- Generalized Burgers CA モデルの Lagrange representation

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(V, x_{i+LP}^t - x_i^t - P) \quad (12.1.6)$$

- Quick-Start モデル ($L = 1, V = 1$) の Lagrange representation

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(1, x_{i+P}^t - x_i^t - P) \quad (12.1.7)$$

- Fukui-Ishibashi モデル ($L = 1, P = 1$) の Lagrange representation

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(V, x_{i+1}^t - x_i^t - 1) \quad (12.1.8)$$

12.2 NoisyBCA 版 Euler-Lagrange 変換

\min の項に u_j^t と独立した変数 M_j^t が入った BurgersCA の Euler-Lagrange 変換を考える。NoisyBCA は (11.10.1) より次のように書ける。

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M_j^t, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M_{j+1}^t, U_j^t, L - U_{j+1}^t)$$

変数変換 $U_j^t = S_j^t - S_{j-1}^t$ を施し, $k = -\infty$ で車はないものとすると, 次のように表せる。

$$S_j^{t+1} = \max(S_j^t - M_{j+1}^t, S_{j-1}^t, S_{j+1}^t - L) \quad (12.2.1)$$

ここで, (12.2.1) を $H(x)$ で書き換えると,

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) = \max\left(\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t) - M_{j+1}^t, \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^t), \sum_{i=0}^{N-1} H(j + 1 - x_i^t) - L\right) \quad (12.2.2)$$

$$= \max\left(\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t) - M_{j+1}^t, \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^t), \sum_{i=0}^{N-1} H(j + 1 - x_{i+L}^t)\right) \quad (12.2.3)$$

$$= \max\left(\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_{i+M_{j+1}^t}^t), \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^t), \sum_{i=0}^{N-1} H(j + 1 - x_{i+L}^t)\right) \quad (12.2.4)$$

両辺を比較して,

$$x_i^{t+1} = \min(x_{i+M_{j+1}^t}^t, x_i^t + 1, x_{i+L}^t - 1) \quad (12.2.5)$$

これが, NoisyBCA の Lagrange 表現である。

第13章 Euler-Lagrange 変換の問題点

前章までで、交通流理論の導入やそのための用語、また交通流に対するモデル化のアプローチについて述べ、特にCAモデルにおけるアプローチについて詳しく述べてきた。

しかし1.2節や10.3節で述べたように、BurgersCAモデルとOVモデルとの対応はまだ形式的なものにすぎない。確かに、Euler-Lagrange変換によって、擾乱に対して安定なBurgersCAと不安定性を持つOVモデルとに形式的な対応があることが見られた。しかしこの対応はあくまでBurgersCAモデルがOVモデルの安定な部分だけに対応していると考えられる。そこで、不安定性が見られるCAモデル、つまり、メタ安定分岐を持つCAモデルに対してOVモデルとの対応を見てみるのは重要なことである。

そのため、ここからの章ではメタ安定分岐を持つ基本的なモデルとしてSISCAモデルに焦点を当て、Euler表現とLagrange表現の対応を考えていく。

そもそもSISCAモデルは過去2時刻($t, t-1$)の車の状態によって次の時刻 t の配置が決まるモデルであり、2車線以上になると追い越しの効果が入ってしまう。すると、Euler-Lagrange変換のキーとなる車のポジションの単調性(10.1.6)が車の追い越しの効果によって失われてしまい、Euler-Lagrange変換そのものができなくなる。そこで、この不具合を解決する方法を探っていく。

第14章 Slow-Start モデルの Euler-Langrange 変換

一般的に, SlowStart の効果を入れたモデルでは, 多車線になると追い越しの効果が入ってしまう,SIS モデルの Euler-Lagrange 変換は完成していない. そこで, まず 1 車線に限定し, 追い越しの効果をなくした場合の Euler-Lagrange 変換できたので示す.

14.1 1 車線 Slow-Start モデルの Euler-Lagrange 変換

車の慣性を考慮したモデルとして,SISCA モデルの Euler-Lagrange 変換を考える.SISCA は次のように書ける.

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min \left[U_{j-1}^t - \left(U_{j-1}^{t-1} - \min(U_{j-1}^{t-1}, L - U_j^{t-1}) \right), L - U_j^t \right] \\ - \min \left[U_j^t - \left(U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1}) \right), L - U_{j+1}^t \right]$$

変数変換 $U_j^t = S_j^t - S_{j-1}^t$ を施し, $k = -\infty$ で車はないものとすると, 次のように表せる.

$$S_j^{t+1} = \max(S_{j-1}^t, S_{j-1}^t - S_{j-1}^{t-1} + S_{j+1}^{t-1} - L, S_{j+1}^t - L) \quad (14.1.1)$$

ここで,

$$S_j^t = \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t) \quad (14.1.2)$$

とする. ただし, $H(x)$ は step function とし, N はセル上の車の総台数とする. x_i^t は i 台目の車の場所を表す Lagrange 型変数で, $x_0^t < x_1^t < x_2^t < \dots < x_{N-1}^t$ を満たす. (14.1.1) を (14.1.2) で書き換えると,

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) = \max \left(\sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^t), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^t) - \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^{t-1}) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j + 1 - x_i^{t-1}) - L, \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{N-1} H(j + 1 - x_i^t) - L \right) \quad (14.1.3)$$

となる。

†L=1 のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) &= \max \left(\sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^t), \right. \\
 &\quad \sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^t) - \sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^{t-1}) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j+1 - x_i^{t-1}) - 1, \\
 &\quad \left. \sum_{i=0}^{N-1} H(j+1 - x_i^t) - 1 \right) \tag{14.1.4}
 \end{aligned}$$

これを, Euler-Lagrange 変換したい。

(14.1.4) より,

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^{t-1})}_{(A)} &= \max \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^t) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^{t-1})}_{(B)}, \right. \\
 &\quad \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^t) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j+1 - x_i^{t-1}) - 1}_{(C)}, \\
 &\quad \left. \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} H(j+1 - x_i^t) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^{t-1}) - 1}_{(D)} \right) \tag{14.1.5}
 \end{aligned}$$

と变形できる。

(14.1.5) のように分類し, 各グループをそれぞれで一つの Σ にまとめることを考える。(それぞれの Σ の中身の x_i^t などの大小関係が各 i に対して保持されていれば, 二つの Σ をまとめると, 小さい順に改めて index を振りなおすことができる。)

(A) (左辺) について

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j-1 - x_i^{t-1}) \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^{t-1} + 1)) \tag{14.1.6}
 \end{aligned}$$

x_i^{t+1} と $x_i^{t-1} + 1$ との大小関係をある $i, i+1$ について考えると,

$$\begin{cases} x_i^{t+1} & < x_{i+1}^{t+1} \\ x_i^{t-1} + 1 & < x_{i+1}^{t-1} + 1 \\ x_i^{t+1} & \leq x_{i+1}^{t-1} + 1 \\ x_i^{t-1} + 1 & \leq x_{i+1}^{t+1} \end{cases} \tag{14.1.7}$$

の関係が満たされる (上二つの式はある time での i 番目と $i+1$ 番目との車の関係よりわかる)

ので, 一般的に (14.1.6) は

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^{t+1}) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^{t-1} + 1)) = \sum_{i=0}^{2(N-1)} H(j - a_i) \quad (14.1.8)$$

$$a_i = \begin{cases} \min(x_n^{t+1}, x_n^{t-1} + 1) & (i = 2n) \\ \max(x_n^{t+1}, x_n^{t-1} + 1) & (i = 2n + 1) \end{cases} \quad (14.1.9)$$

と表せることがわかる. さらに, 各 $a_i (i = 0, 1, 2 \dots, 2N-2)$ について (14.1.7) より

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{2N-2} \quad (14.1.10)$$

がわかる.

(B) (max の中身の第一項) について

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^t) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^{t-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^t + 1)) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^{t-1} + 1)) \end{aligned} \quad (14.1.11)$$

$x_i^t + 1$ と $x_i^{t-1} + 1$ との大小関係をある $i, i+1$ について考えると,

$$\begin{cases} x_i^t + 1 & < x_{i+1}^t + 1 \\ x_i^{t-1} + 1 & < x_{i+1}^{t-1} + 1 \\ x_i^{t-1} + 1 & \leq x_i^t + 1 \\ x_{i+1}^{t-1} + 1 & \leq x_{i+1}^t + 1 \\ x_i^t + 1 & \leq x_{i+1}^{t-1} + 1 \end{cases} \quad (14.1.12)$$

の関係が満たされるので, 一般的に (14.1.11) は

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^t + 1)) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^{t-1} + 1)) = \sum_{i=0}^{2(N-1)} H(j - b_i) \quad (14.1.13)$$

$$b_i = \begin{cases} x_n^{t-1} + 1 & (i = 2n) \\ x_n^t + 1 & (i = 2n + 1) \end{cases} \quad (14.1.14)$$

と表せることがわかる. さらに, 各 $b_i (i = 0, 1, 2 \dots, 2N-2)$ について (14.1.12) より

$$b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{2N-2} \quad (14.1.15)$$

がわかる.

(C) (max の中身の第二項) について

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^t) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j + 1 - x_i^{t-1}) - 1 \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^t + 1)) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_{i+1}^{t-1} - 1)) \end{aligned} \quad (14.1.16)$$

$x_i^t + 1$ と $x_{i+1}^{t-1} - 1$ との大小関係がある $i, i+1$ について考えると,

$$\begin{cases} x_i^t + 1 & < x_{i+1}^t + 1 \\ x_{i+1}^{t-1} - 1 & < x_{i+2}^{t-1} - 1 \\ x_{i+1}^{t-1} - 1 & < x_{i+1}^t + 1 \\ x_i^t + 1 & \leq x_{i+2}^{t-1} - 1 \end{cases} \quad (14.1.17)$$

の関係が満たされるので, 一般的に (14.1.16) は

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^t + 1)) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_{i+1}^{t-1} - 1)) = \sum_{i=0}^{2(N-1)} H(j - c_i) \quad (14.1.18)$$

$$c_i = \begin{cases} \min(x_n^t + 1, x_{n+1}^{t-1} - 1) & (i = 2n) \\ \max(x_n^t + 1, x_{n+1}^{t-1} - 1) & (i = 2n + 1) \end{cases} \quad (14.1.19)$$

と表せることがわかる. さらに, 各 $c_i (i = 0, 1, 2 \dots, 2N-2)$ について (14.1.17) より

$$c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{2N-2} \quad (14.1.20)$$

がわかる.

(D) (max の中身の第三項) について

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} H(j + 1 - x_i^t) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - 1 - x_i^{t-1}) - 1 \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_{i+1}^t - 1)) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^{t-1} + 1)) \end{aligned} \quad (14.1.21)$$

$x_i^t - 1$ と $x_{i+1}^{t-1} + 1$ との大小関係がある $i, i+1$ について考えると,

$$\begin{cases} x_{i+1}^t - 1 & < x_{i+2}^t - 1 \\ x_i^{t-1} + 1 & < x_{i+1}^{t-1} + 1 \\ x_i^{t-1} + 1 & \leq x_{i+2}^t - 1 \\ x_{i+1}^t - 1 & \leq x_{i+1}^{t-1} + 1 \end{cases} \quad (14.1.22)$$

の関係が満たされるので, 一般的に (14.1.21) は

$$\sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_{i+1}^t - 1)) + \sum_{i=0}^{N-1} H(j - (x_i^{t-1} + 1)) = \sum_{i=0}^{2(N-1)} H(j - d_i) \quad (14.1.23)$$

$$d_i = \begin{cases} \min(x_{n+1}^t - 1, x_n^{t-1} + 1) & (i = 2n) \\ \max(x_{n+1}^t - 1, x_n^{t-1} + 1) & (i = 2n + 1) \end{cases} \quad (14.1.24)$$

と表せることがわかる. さらに, 各 $d_i (i = 0, 1, 2 \dots, 2N-2)$ について (14.1.22) より

$$d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_{2N-2} \quad (14.1.25)$$

がわかる.

以上をあわせると,(14.1.5) は次のように書きかえることができる.

$$\sum_{i=0}^{2(N-1)} H(j-a_i) = \max\left(\sum_{i=0}^{2(N-1)} H(j-b_i), \sum_{i=0}^{2(N-1)} H(j-c_i), \sum_{i=0}^{2(N-1)} H(j-d_i)\right) \quad (14.1.26)$$

ここで, 各 a_i, b_i, c_i, d_i について,(14.1.10),(14.1.15),(14.1.20),(14.1.25) より単調増加性があるので, (14.1.26) から, 次の関係がわかる.

$$a_i = \min(b_i, c_i, d_i) \quad (14.1.27)$$

これを偶数番目・奇数番目で分けて書くと

$$\begin{cases} \min(x_n^{t+1}, x_n^{t-1} + 1) = \min(x_n^{t-1} + 1, \min(x_n^t + 1, x_{n+1}^{t-1} - 1), \min(x_{n+1}^t - 1, x_n^{t-1} + 1)) & (i = 2n) \\ \max(x_n^{t+1}, x_n^{t-1} + 1) = \min(x_n^t + 1, \max(x_n^t + 1, x_{n+1}^{t-1} - 1), \max(x_{n+1}^t - 1, x_n^{t-1} + 1)) & (i = 2n + 1) \end{cases} \quad (14.1.28)$$

となる.

右辺を簡単に整理すると,

$$\begin{cases} \min(x_n^{t+1}, x_n^{t-1} + 1) = \min(x_{n+1}^{t-1} - 1, x_n^{t-1} + 1) & (i = 2n) \\ \max(x_n^{t+1}, x_n^{t-1} + 1) = \min(x_n^t + 1, \max(x_{n+1}^t - 1, x_n^{t-1} + 1)) & (i = 2n + 1) \end{cases} \quad (14.1.29)$$

この上式と下式を足してみると,

$$\begin{aligned} & x_n^{t+1} + x_n^{t-1} + 1 \\ &= \min(x_{n+1}^{t-1} - 1, x_n^{t-1} + 1) + \min(x_n^t + 1, \max(x_{n+1}^t - 1, x_n^{t-1} + 1)) \end{aligned} \quad (14.1.30)$$

$$= \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t, x_n^{t-1} + x_n^t + 2, \max(x_{n+1}^{t-1} + x_{n+1}^t - 2, x_{n+1}^{t-1} + x_n^{t-1}), \max(x_n^{t-1} + x_{n+1}^t, 2x_n^{t-1} + 2)) \quad (14.1.31)$$

ここで \min の第四項の \max について場合わけすると,

$$(\dagger 1) \quad x_n^{t-1} + x_{n+1}^t \geq 2x_n^{t-1} + 2 \iff x_{n+1}^t - 2 \geq x_n^{t-1} \text{ のとき}$$

第三項は $\max(x_{n+1}^{t-1} + x_{n+1}^t - 2, x_{n+1}^{t-1} + x_n^{t-1}) = x_{n+1}^{t-1} + x_{n+1}^t - 2$ となり,

$$(14.1.31) = \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t, x_n^{t-1} + x_n^t + 2, x_{n+1}^{t-1} + x_{n+1}^t - 2, x_n^{t-1} + x_{n+1}^t) \quad (14.1.32)$$

今,(14.1.32) の第三項は, 第一項または第四項のどちらか以上になるので, 落とすことが出来て,

$$(14.1.31) = (14.1.32) = \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t, x_n^{t-1} + x_n^t + 2, x_n^{t-1} + x_{n+1}^t) \quad (14.1.33)$$

となる.

$$(\dagger 2) \quad x_n^{t-1} + x_{n+1}^t < 2x_n^{t-1} + 2 \iff x_{n+1}^t - 2 < x_n^{t-1} \quad (\iff x_n^t = x_n^{t-1}, x_{n+1}^t = x_{n+1}^{t-1}) \text{ のとき}$$

第三項は $\max(x_{n+1}^{t-1} + x_{n+1}^t - 2, x_{n+1}^{t-1} + x_n^{t-1}) = x_{n+1}^{t-1} + x_n^{t-1}$ となり,

$$(14.1.31) = \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t, x_n^{t-1} + x_n^t + 2, x_{n+1}^{t-1} + x_n^{t-1}, 2x_n^{t-1} + 2) \quad (14.1.34)$$

今,(14.1.34) の第四項は, 第三項以上になるので落とすことが出来て, $x_{n+1}^t = x_{n+1}^{t-1}$ とあわせて

$$(14.1.31) = (14.1.34) = \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t, x_n^{t-1} + x_n^t + 2, x_{n+1}^t + x_n^{t-1}) \quad (14.1.35)$$

となる.

以上のことから、どちらの場合についても

$$(14.1.31) = \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t, x_n^{t-1} + x_n^t + 2, x_{n+1}^t + x_n^{t-1}) \quad (14.1.36)$$

を満たす。つまり、

$$x_n^{t+1} + x_n^{t-1} + 1 = \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t, x_n^{t-1} + x_n^t + 2, x_{n+1}^t + x_n^{t-1}) \quad (14.1.37)$$

となり、さらに変形すると、

$$\begin{aligned} x_n^{t+1} &= \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t, x_n^{t-1} + x_n^t + 2, x_{n+1}^t + x_n^{t-1}) - x_n^{t-1} - 1 \\ &= \min(x_{n+1}^{t-1} + x_n^t - x_n^{t-1} - 1, x_n^t + 1, x_{n+1}^t - 1) \\ &= x_n^t + \min(1, x_{n+1}^t - x_n^t - 1, x_{n+1}^{t-1} - x_n^{t-1} - 1) \quad (\text{Lagrange rep. of Slow-StartCA}) \end{aligned} \quad (14.1.38)$$

となり、これが Slow-StartCA 版 (L=1)Lagrange Representation となる。

第15章 SISCA モデルの変換

15.1 2 時刻 2 値 3 近傍 SISCA モデルから 1 時刻 3 値 3 近傍 SISCA モデルへ

SISCA モデルの式 (11.2.1) は 2 時刻 $(t-1, t)$ 2 値 (0, 1) 3 近傍 (left, center, right) モデルの式であった. その 2 時刻のために SISCA モデルでは 2 車線以上になると追い越しの効果が入ってしまう. そこで, SISCA モデルを 1 時刻のモデルに作り直す. つまり 1 時刻 (t) 3 値 (0, 1, 2) 3 近傍 (left, center, right) で表現するモデルを作る. 具体的なルールは下の通りに決める.

- ルールの基本 (表 15.1)
 - あるセルに車がいるとき.
 - * (一つ先のセルを見て) 車がいれば, 値を 2 にする.
 - * (一つ先のセルを見て) 車がないければ, 値を (自分の値-1) にする.
 - あるセルに車がないとき.
 - * (一つ手前のセルを見て) 車の値が 1 のときは, 今のセルの値を 1 にする.
 - * (一つ手前のセルを見て) 車の値が 2 のときは, 今のセルの値は 0 のままにする.

$U_{j-1}^t, U_j^t, U_{j+1}^t$	U_j^{t+1}	$U_{j-1}^t, U_j^t, U_{j+1}^t$	U_j^{t+1}	$U_{j-1}^t, U_j^t, U_{j+1}^t$	U_j^{t+1}
000	0	100	1	200	0
001	0	101	1	201	0
002	0	102	1	202	0
010	0	110	0	210	0
011	2	111	2	211	2
012	2	112	2	212	2
020	1	120	1	220	1
021	2	121	2	221	2
022	2	122	2	222	2

表 15.1: 1 時刻 3 値 3 近傍 SISCA モデル (parallel) の更新ルール ~ 1 車線版 ~

15.2 定式化へ

前節のルールの表を簡潔にすると次のような表 (15.2) のように書きなおすことが出来る. ここで, $U_j^t = 0, 1, 2$ の持っている情報をまとめると以下の通りになる.

U_{j-1}^t	U_j^t	U_{j+1}^t	U_j^{t+1}
0or2	0	★	0
★	1	0	0
1	0	★	1
★	2	0	1
★	1or2	1or2	2

表 15.2: 表 (15.1) を簡単にまとめたルール～1 車線版～

- $U_j^t = 0$ はサイトに車がない状態で, もちろん次の時刻に動くことはない.
- $U_j^t = 1$ はサイトに車がいる状態で, 次の時刻に動ける状態.
- $U_j^t = 2$ はサイトに車がいる状態で, 次の時刻には動けない状態.

このことから, もとの 2 時刻 2 値 3 近傍 SISCA モデルとの対応を見るために, 次のような判定式を考える.

$$(車がいる状態を 1, いない状態を 0 にする) = \min(U_j^t, 1) \quad (15.2.1)$$

$$(動ける車を 1, 動けない車を 0 とする) = U_j^t \bmod 2 \quad (15.2.2)$$

(11.2.1)において, 上の判定式で読み替えると,

$$U_{j-1}^t - (U_{j-1}^{t-1} - \min(U_{j-1}^{t-1}, 1 - U_j^{t-1})) = U_j^t \bmod 2 \quad (15.2.3)$$

と表すことが出来るので, 今の 1 時刻 SISCA モデルとして次のように立式することができる.

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} = & \min(U_j^t, 1) + \min[U_{j-1}^t \bmod 2, 1 - \min(U_j^t, 1)] \\ & - \min[U_j^t \bmod 2, 1 - \min(U_{j+1}^t, 1)] \\ & + \min(U_j^t, U_{j+1}^t, 1) \end{aligned} \quad (15.2.4)$$

ただし, 最後の $\min(U_j^t, U_{j+1}^t, 1)$ は前に車がいるときに 2 に増やすための調整項であり, この項が元の SISCA モデルにおいて 1 時刻前での配置で動けるかどうかを決める役割を読み替えていることになる.

ここで $\bmod 2$ を Max-Plus 代数で表現すると,

$$U_j^t \bmod 2 = \min(2 - U_j^t, U_j^t) \quad (15.2.5)$$

であるから, (15.2.4) を書き直すと,

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} = & \min(U_j^t, 1) + \min[\min(2 - U_{j-1}^t, U_{j-1}^t), 1 - \min(U_j^t, 1)] \\ & - \min[\min(2 - U_j^t, U_j^t), 1 - \min(U_{j+1}^t, 1)] \\ & + \min(U_j^t, U_{j+1}^t, 1) \end{aligned} \quad (15.2.6)$$

となる。

このモデルの物理的解釈をすると,

$$\begin{aligned}
 \underbrace{U_j^{t+1}}_{\text{時刻 } t+1 \text{ サイト } j \text{ での値}} &= \underbrace{\min(U_j^t, 1)}_{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ での車がいるかいないかの値}} \\
 &+ \min \left[\underbrace{\min(2 - U_{j-1}^t, U_{j-1}^t)}_{\text{時刻 } t \text{ サイト } j-1 \text{ で動ける車がいるかどうか}} , \underbrace{1 - \min(U_j^t, 1)}_{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ に車がいるかどうか}} \right] \\
 &\quad \underbrace{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ に流入してくる車の台数}}_{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ で動ける車がいるかどうか}} \\
 &- \min \left[\underbrace{\min(2 - U_j^t, U_j^t)}_{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ で動ける車がいるかどうか}} , \underbrace{1 - \min(U_{j+1}^t, 1)}_{\text{時刻 } t \text{ サイト } j+1 \text{ に車がいるかどうか}} \right] \\
 &\quad \underbrace{\text{時刻 } t \text{ サイト } j+1 \text{ に流出していく車の台数}}_{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ に車がいて, サイト } j+1 \text{ にも車がいて止まってしまう車がいれば } 1 \text{ を足す}} \\
 &+ \underbrace{\min(U_j^t, U_{j+1}^t, 1)}_{\text{時刻 } t \text{ でサイト } j \text{ に車がいて, サイト } j+1 \text{ にも車がいて止まってしまう車がいれば } 1 \text{ を足す}} \quad (15.2.7)
 \end{aligned}$$

と考えることができ、このモデルの基本図は図 15.1 のようになり、11.2 節で求めた SISCA モデルの基本図と同じになることがわかる。

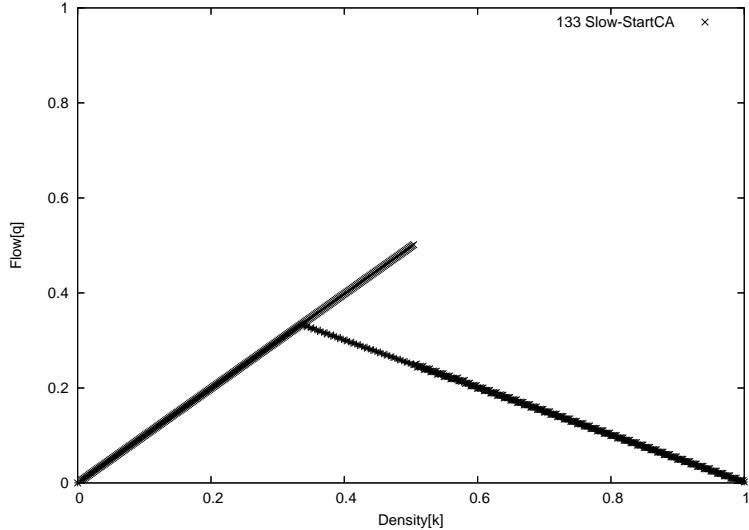


図 15.1: 1 時刻 3 値 3 近傍 Slow-Start CA の基本図

15.3 2 車線モデルの構成

2 車線モデルの構成を考える.[10], [56] できるだけもとの SISCA モデル (11.2.1) に近づけるため、見通しや最高速度は考えずに見通し ($P = 1$)、最高速度 ($V = 1$) とする。そこで SlowStart の効果を持つ 1 車線モデル (15.2.6) をカップリングして 2 車線モデルを構成することを考える。以下の図 15.2 のように Slowlane を U_j , Fastlane を V_j とし、車線変更のルールを以下のようなルール (図 15.3) で設定し、連立方程式で表現する。

ただし, lane によって速度の差を作っていないのであくまで, 形式的に Slowlane, Fastlane と呼んでいいだけである.

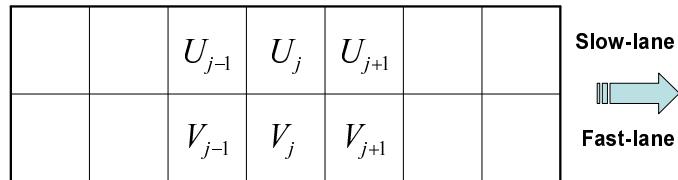


図 15.2: 1 車線モデルを二本並べる方法で拡張した 2 車線モデルの図

† 車線変更のルール

- 各車線において, 自分の前のセルが空いていれば隣の車線に関係なく前方に進む.
- 各車線において, もし自分の前に車がいれば, 隣の車線を見て
 - 真横と斜め前が空いていれば斜め前に移動する.
 - どちらかが空いていなければその場で車線変更せずに止まる.



図 15.3: 車線変更をするときの車の配置 (左の図だけ車線変更を行ない, 残りの二つの図は車線変更を行なわない.)

このような車線変更の元でそれぞれの車線について立式すると以下のようになる.

- Slow-lane について

$$\begin{aligned}
U_j^{t+1} = & \min(U_j^t, 1) \\
& + \min[\min(2 - U_{j-1}^t, U_{j-1}^t), 1 - \min(U_j^t, 1)] \\
& - \min[\min(2 - U_j^t, U_j^t), 1 - \min(U_{j+1}^t, 1)] \\
& + \min[\min(2 - V_{j-1}^t, V_{j-1}^t), \min(V_j^t, 1), 1 - \min(U_{j-1}^t, 1), 1 - \min(U_j^t, 1)] \\
& - \min[\min(2 - U_j^t, U_j^t), \min(U_{j+1}^t, 1), 1 - \min(V_j^t, 1), 1 - \min(V_{j+1}^t, 1)] \\
& + \min(U_j^t, U_{j+1}^t, 1, \max(V_j^t, V_{j+1}^t))
\end{aligned} \tag{15.3.1}$$

- Fast-lane について

$$\begin{aligned}
V_j^{t+1} = & \min(V_j^t, 1) \\
& + \min[\min(2 - V_{j-1}^t, V_{j-1}^t), 1 - \min(V_j^t, 1)] \\
& - \min[\min(2 - V_j^t, V_j^t), 1 - \min(V_{j+1}^t, 1)] \\
& + \min[\min(2 - U_{j-1}^t, U_{j-1}^t), \min(U_j^t, 1), 1 - \min(V_{j-1}^t, 1), 1 - \min(V_j^t, 1)] \\
& - \min[\min(2 - V_j^t, V_j^t), \min(V_{j+1}^t, 1), 1 - \min(U_j^t, 1), 1 - \min(U_{j+1}^t, 1)] \\
& + \min(V_j^t, V_{j+1}^t, 1, \max(U_j^t, U_{j+1}^t))
\end{aligned} \tag{15.3.2}$$

各式は今対照的な形をしているので, Slowlane について式を解釈すると, 以下のようになる. 1 車線モデルと異なるのは, 第四項・第五項において車線変更の効果を入れ, 第六項で車の動いたか止まったかを数字化するための調整項を入れている点である.

$$\begin{aligned}
\overbrace{U_j^{t+1}}^{\substack{\text{時刻 } t+1 \text{ サイト } j \text{ での値} }} = & \underbrace{\min(U_j^t, 1)}_{\substack{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ での車がいるかいないかの値}}} \\
& + \underbrace{\min[\min(2 - U_{j-1}^t, U_{j-1}^t), 1 - \min(U_j^t, 1)]}_{\substack{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ に流入してくる車の台数}}} \\
& - \underbrace{\min[\min(2 - U_j^t, U_j^t), 1 - \min(U_{j+1}^t, 1)]}_{\substack{\text{時刻 } t \text{ サイト } j+1 \text{ に流出していく車の台数}}} \\
& + \underbrace{\min[\min(2 - V_{j-1}^t, V_{j-1}^t), \min(V_j^t, 1), 1 - \min(U_{j-1}^t, 1), 1 - \min(U_j^t, 1)]}_{\substack{\text{時刻 } t \text{隣のサイト } j-1 \text{ からサイト } j \text{ に流入してくる車の台数}}} \\
& - \underbrace{\min[\min(2 - U_j^t, U_j^t), \min(U_{j+1}^t, 1), 1 - \min(V_j^t, 1), 1 - \min(V_{j+1}^t, 1)]}_{\substack{\text{時刻 } t \text{ サイト } j \text{ から隣のサイト } j+1 \text{ へ流出していく車の台数}}} \\
& + \underbrace{\min(U_j^t, U_{j+1}^t, 1, \max(V_j^t, V_{j+1}^t))}_{\substack{\text{時刻 } t \text{ でサイト } j \text{ に車がいて,隣のレーンにも移ることなく時刻 } t+1 \text{ でサイト } j \text{ に車止まったままになる車がいれば } 1 \text{ を足す}}}
\end{aligned} \tag{15.3.3}$$

このカップリングした 2 車線モデルで数値計算して求めた基本図が図 15.4 である. この図を見るに前節で求めた基本図 15.1 の流量を二倍したものに等しく, 単純ではあるが 2 車線モデルを構成しているといえる.

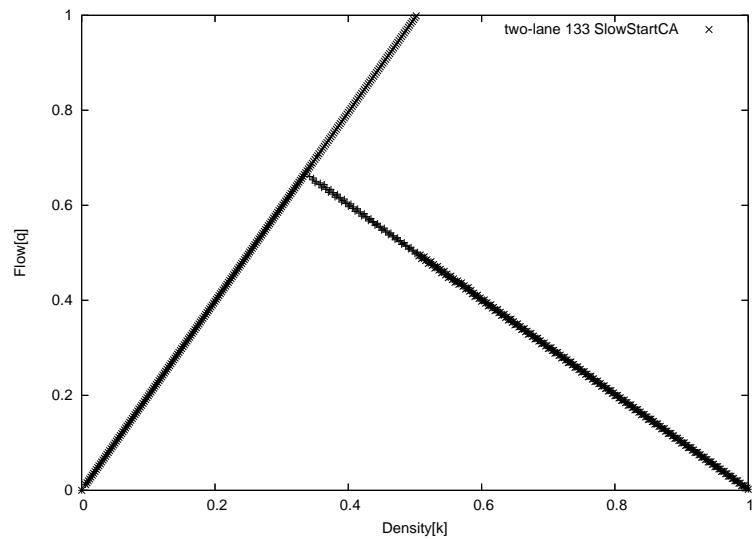


図 15.4: 1 時刻 3 値 3 近傍 Slow-StartCA(2 車線版) の基本図

しかし, このモデルでは SlowStart の効果を持った単純なモデルしか構成できていない。Euler 型変数と Lagrange 型変数との対応を見るにはいいかもしれないが, 実際の 2 車線モデルを構成しているとはいえない。その理由は次の節で述べることにする。

15.4 実際の2車線モデルの特徴

実際の2車線モデルの特徴を考える。[57], [58], [59] 2車線モデルの特徴として、車線の利用率が挙げられる。つまり、走行車線を走っている車の台数と追い越し車線を走っている車の台数の比率に注目することが重要である。予想としては、

- 法律によってできる限り走行車線を走らなければならない。
- 渋滞の時は、2車線とも同じ台数の車が走っている状態になるはず。

しかし、実際のデータでは走行車線より追い越し車線の割合が多い時がある。(図 15.5)

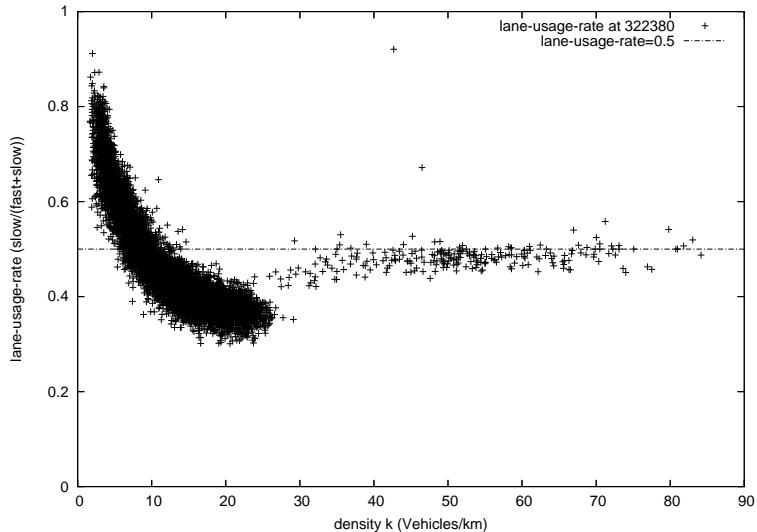


図 15.5: 2車線交通流の各車線にいる車の比率 (at 東名高速道路の 322.38km point)(縦軸が車線占有率、横軸が密度。縦軸は 1 に近づくほど走行車線にいる車の比率 が多くなる。)

この図からわることは、「逆転現象が起こり始める状況は、密度が低く渋滞がまだ形成されていない状態。」つまり、走行車線を走っている車は渋滞が起こる前に前方の渋滞を感じて車線変更をし始める。また、2車線とも渋滞が形成され始めると、2車線が同じ台数になろうとするが、まだ追い越し車線のほうの割合が多い。これは、追い越し車線を走っている車はなかなか走行車線に戻ろうとしない。ということがわかる。そのため、実際の現象をモデル化するためには、この特徴を表現するような車線変更モデルでなければいけないと考えられる。さらに、図 15.6 と比較すると、車線の逆転現象は基本図における metastable state が現れる密度付近で一致しているようである。

しかし、前節で紹介した SlowStart の効果を持つ 2車線モデルの車線占有率は、図 15.7 のようになってしまい、逆転現象を見ることはできていない。これは、車線の優位性や車線ごとの平均速度差が関係してくると思われ、その効果も含むモデルの構成が必要になると考えられる。このような理由で、前節で紹介した SlowStart の効果を持つ 2車線モデルは、現実の 2車線交通流を表現するための満足できるモデルではないことがわかる。

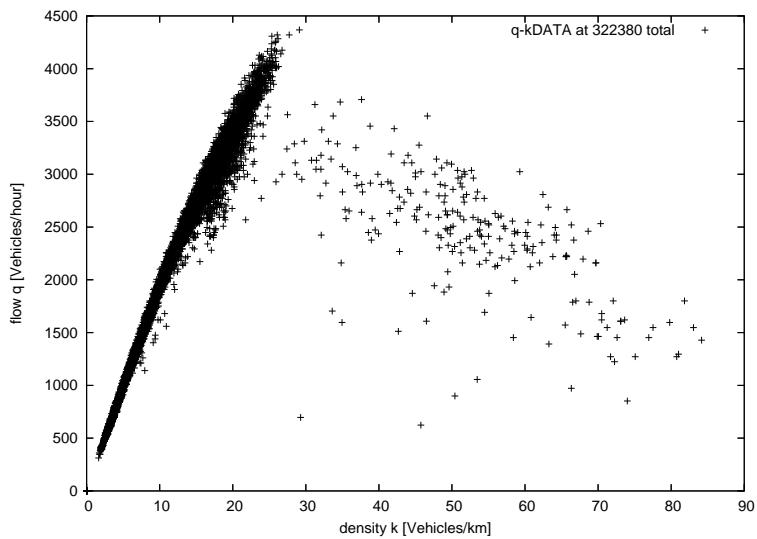


図 15.6: 2 車線交通流 (各車線の流量の合計) の基本図 (at 東名高速道路の 322.38km point)

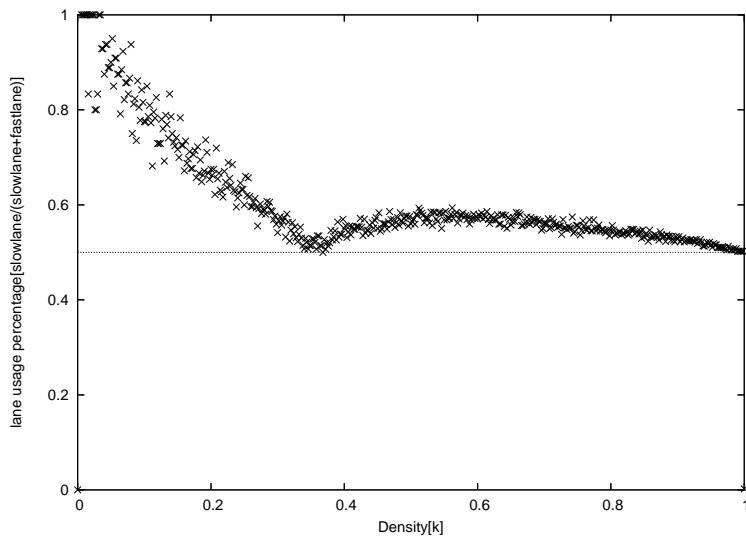


図 15.7: 前節で構成した SlowStart の効果を持つ 2 車線モデルの各車線にいる車の比率 (図 15.5 に見られるような車線の占有率の逆転現象は見られない。)

第16章 結論

本論文では、交通流現象に対して近年のコンピューターの進歩に伴って、特に盛んに研究されている超離散化法とセルオートマトンモデルを用いたアプローチを紹介した。中でも交通流の大きな特徴として、自由相から渋滞相への相転移現象がある。この渋滞相転移は基本図において metastable state として表現され、交通流セルオートマトンモデルにおける基本図ではメタ安定分岐として表現することができる。さらにこのメタ安定分岐こそが、車列の不安定性を表現しており OV モデルとの対応を見る必要がある。そこでメタ安定分岐を持つ単純なモデルである SlowStart モデルに注目し、その Euler-Lagrange 変換を考えた。しかし、メタ安定分岐を持つ最も単純な SISCA モデルは一般的に Euler-Lagrange 変換は完成していない。そこでまず 1 車線に限定した場合の Euler-Lagrange 変換を考え、示すことができた。ところが、2 車線に拡張すると SISCA モデルでは追い越しの効果が入ってきてしまい、今のままでは Euler-Lagrange 変換はできない。そこで追い越しの影響をなくすように 2 時刻 2 値 3 近傍モデルであった SISCA モデルを 1 時刻 3 値 3 近傍モデルで表現しようと試み、立式化することができた。このモデルでは Euler 型変数の値の拡張が車線数の拡張には対応していないので、従来の車線数拡張の方法では 2 車線には拡張できない。そのため 1 車線モデルをカップリングし、車線変更のルールを導入することによって、もとの SISCA モデルの 2 車線版に対応する新しいモデルを式によって構成することができた。そこで Euler 型変数と Lagrange 型変数の対応を見る必要があるが、従来の Lagrange 型変数のままではある時刻 t で止まっている車が動き出せる状態か動き出せない状態なのか判断できず 1 時刻 SISCA モデルは表現できない。そこで、Lagrange 型変数を (position, speed) のベクトル値で表現するといった新しい Lagrange 変数を作り出す必要があり、今後の課題である。さらに、この 2 車線モデルでは現実の車線の占有率を表現できていないという問題も残っている。これは今回提案した 1 時刻 3 値 3 近傍 2 車線 SISCA モデルが車線ごとの速度差、法律による車線の優位性といった、実際の道路走行の特徴を導入していないからであると考えられる。そのため、これからより現実的な車線変更ルールを式に組み込んだモデルの構成も今後の課題である。

謝辞

本論文を作成するにあたり、終始暖かい激励と指導を頂いた茶碗谷毅先生に心から感謝します。また、本研究を遂行するにあたり、様々なデータ及び有益なアドバイスを頂いた菊池誠先生、西成活裕先生、高橋大輔先生、日頃セミナーにおいて討議していただいた松村昭孝先生、小田中紳二先生、降旗大介先生に感謝いたします。最後に、様々な議論、協力をして頂きました研究室の皆様にも心から御礼申し上げます。

参考文献

- [1] 国土交通省道路局のホームページ <http://www.mlit.go.jp/road/ir/ir-data/ir-data.html>
- [2] 応用数理 vol.12, No.2, June, 2002
- [3] 湯川諭, “計算物理学および統計力学的手法をもちいた一次元交通流の研究－交通渋滞の統計力学－” 物性研究 65-1, 117(1995)
- [4] T.Musha and H.Higuchi: “Traffic Current Fluctuation and the Burgers Equation” Jpn.J.App.Phy, **17**, 811(1978)
- [5] B.S.Kerner and P.Konhauser: “Cluster effect in initially homogeneous traffic flow” Phy.Rev.E **48**, 2335(1993)
- [6] Pipes, L.A., Journal of Applied Physics, 23(1953), 274
- [7] G.F.Newell: “NONLINEAR EFFECTS IN THE DYNAMICS OF CAR FOLLOWING” Oper.Res. **9**, 209(1961)
- [8] M.Bando, et al. “Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation” Phys.Rev.E **51**, 1035(1995)
- [9] R.Haberman, 「交通流の数学モデル」 現代数学社
- [10] K.Nishinari and D.Takahashi: “Multi-value cellular automaton models and metastable states in a congested phase” J.Phys.A:Math.Gen. **33**, 7709(2000)
- [11] 橋詰真美, 志田篤彦, 高橋大輔: “信号機付き Burgers Cellular Automaton” 九大応力研研究集会 報告, **13ME S46-11**(2002)
- [12] K.Nishinari: “Euler and Lagrange Representation of Traffic Models”, Traffic and Granular Flow '01, Springer, 3
- [13] K.Nagel and M.Schreckenberg: “A cellular automaton model for freeway traffic”, J.Phys.I France **2**, 2221(1992)
- [14] M.Fukui and Y.Ishibashi: “Traffic Flow in 1D Cellular Automaton Model Including Cars Moving with High Speed”, J.Phys.Soc.Jpn. **65**, No.6, 1868(1996)
- [15] 広田良吾, 高橋大輔, 「差分と超離散」 共立出版 (2003)
- [16] J.Matsukidaira and K.Nishinari: “Euler-Lagrange Correspondence of Cellular Automaton for Traffic-Flow Models”, PHY.REV.LETT, **90**, NUM.8, 088701(2003)
- [17] 佐々木綱, 飯田恭敬編著, 「交通工学」 国民科学社 (1992)

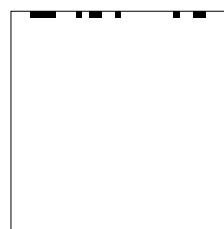
- [18] 越正毅,「交通工学通論」技術書院
- [19] B.Derrida, M.R.Evans, V.Hakim and V.Pasquier:"Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation",J.Phys.A:Math.Gen.**26**,1493(1993)
- [20] O.J.O'Loan, M.R.Evans, and M.E.Cates:"Jaming transition in a homogeneous one-dimensional system:The bus route model"Phy.Rev.E **58**,1404(1998)
- [21] M.Kanai, K.Nishinari, T.Tokihiko:"Stochastic optimal velocity model and its long-lived metastability"Phy.Rev.E **72**,035102-1(2005)
- [22] 東日本高速道路のホームページ <http://www.e-nexco.co.jp/service/challenge/index.shtml>
- [23] Y.Sugiyama,et al.:"Observation, Theory and Experiment for Freeway Traffic as Physics of Many-Body System",Traffic and Granular Flow'03,Springer,45
- [24] 杉山雄規:" 交通流の物理" ながれ, **22**,95(2003)
- [25] 数理科学 NO.429,March,66(1999)
- [26] 日本物理学会誌 Vol**55**,No.3(2000)
- [27] Y.Sugiyama and H.Yamada:"Simple and exactly solvable model for queue dynamics",PHY.REV.E,**55**,NUM.6,7749(1997)
- [28] K.Nakanishi, K.Itoh, Y.Igarashi and M.Bando:"Solvable optimal velocity models and asymptotic trajectory",PHY.REV.E,**55**,NUM.6,6519(1997)
- [29] N.Mitarai and H.Nakanishi:"Convective Instability and Structure Formation in Traffic Flow",J.Phys.Soc.Jpn.**69**,No.11,3752(2000)
- [30] K.Nishinari and D.Takahashi:"A new deterministic CA model for traffic flow with multiple states" J.Phys.A:Math.Gen.**32**,93(1999)
- [31] R.Barlovic, L.Santen, A.Schadschneider, and M.Schreckenberg:"Metastable states in cellular automata for traffic flow" Eur.Phys.J.B **5**,793(1998)
- [32] S.C.Benjamin, N.F.Johnson, and P.M.Hui:"Cellular automata models of traffic flow along a highway containing a junction" J.Phys.A:Math.Gen.**29**,3119(1996)
- [33] R.Barlovic, A.Schadschneider, M.Schreckenberg:"Random walk theory of jamming in a cellular automaton model for traffic flow" Phy.A **294**,525(2001)
- [34] K.Nassab, M.Schreckenberg, S.Ouaskit, A.Boulmakoul:"Impacts of different types of ramps on the traffic flow" Phy.A **352**,601(2005)
- [35] 笹本智弘(東工大)物性研究 2003, 講義ノート
- [36] N.Rajewsky, A.Schadschneider and M.Schreckenberg:"The asymmetric exclusion model with sequential update",J.Phys.A:Math.Gen.**29**,L305(1996)

- [37] Cecile Appert and Ludger Santen:"Boundary induced Phase Transitions in Driven Lattice Gases with Metastable State" *Phy.Rev.Lett* **86**,2498(2001)
- [38] A.schadschneider, and M.Schreckenberg:"Cellular automaton models and traffic flow" *J.Phys.A:Math.Gen* **26**,L679(1993)
- [39] A.B.Kolomeisky, G.M.Schuts, E.B.Kolomeisky and J.P.Straley:"Phase diagram of one-dimensional driven lattice gases with open boundaries" *J.Phys.A:Math.Gen* **31**,6911(1998)
- [40] K.Klauck and A.Shadshneider:"On the ubiquity of matrix-product states in one-dimensional stochastic processes with boundary interactions" *Physica A* **271**,102(1999)
- [41] *Phy.D* **45** 1990
- [42] S.Wolfram:"Theory and application of cellular automata" World Scientific, Singapore,1986
- [43] S.WOLFRAM, "Cellular Automata and Complexity" Addison Wesley, 457(1985)
- [44] 加藤恭義, 光成友孝, 築山洋, 「セルオートマトン法」森北出版 (1998)
- [45] S.Wolfram:"Twenty Problems in the Theory of Cellular Automata",*Physica Scripta* **T9**,170(1985)
- [46] 中村佳正, 「可積分系の応用数理」裳華房 (2000)
- [47] K.Nishinari and D.Takahashi:"Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 Cellular Automaton" *J.Phys.A:Math.Gen* **31**,5439(1998)
- [48] *数理科学* NO.435,September(1999)
- [49] 広田良吾, 「差分方程式講義」 サイエンス社 (2000)
- [50] *数理科学* NO.405,MARCH,33(1997)
- [51] T.Yajima, K.Nakajima and N.Asano:"Max-Plus Algebra for Complex Variables and Its Applications to Discrete Fourier Transformation and Partial Difference Equations" *J.Phys.Soc.Jpn.* arXiv"nlin:SI/0505056", May(2005)
- [52] 巽友正, 「流体力学」 培風館
- [53] K.Nishinari:"A Lagrange representation of cellular automaton traffic-flow models",*J.Phys.A:Math.Gen* **34**,10727(2001)
- [54] M.Takayasu and H.Takayasu:"1/f NOISE IN A TRAFFIC MODEL",*Fractals*,**1**,No.4,860(1993)
- [55] J.Matsukidaira and K.Nishinari:"Euler-Lagrange Correspondence of Generalized Burgers Cellular Automaton" *Int.J.Mod.Phys.C* **15**,507(2004)
- [56] M.Fukui, K.Nishinari, D.Takahashi, Y.Ishibashi:"Metastable flows in a two-lane traffic model equivalent to extended Burgers cellular automaton" *Phy.A* **303**, 226(2002)
- [57] W.Knospe, L.Santen, A.shadschneider and M.Shreckenberg:"A realistic two-lane traffic model for highway traffic" *J.Phys.A:Math.Gen* **35**,3369(2002)

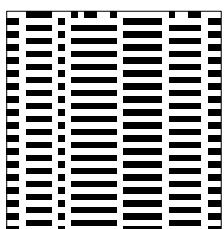
- [58] K.Nagel, D.E.Wolf, P.Wagner and P.Simon:"Two-lane traffic rules for cellular automata:ASystematic approach" PHY.REV.E,**58**,NUM.2,1425(1998)
- [59] S.Tadaki, K.Nishinari, M.Kikuchi, Y.Sugiyama and S.Yukawa:"Observation of congested Two-lane Traffic Caused by a Tunnel" J.Phys.Soc.Japan **71**,2326(2002)

APPENDIX

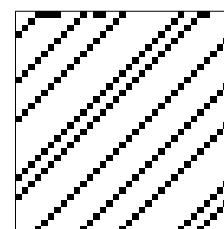
APPENDIX A:
初期配置を'0','1'の混ざり合った状態とする



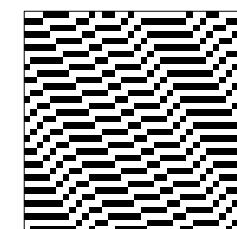
rule=0



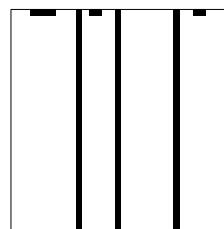
rule=1



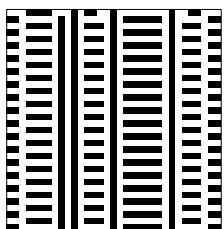
rule=2



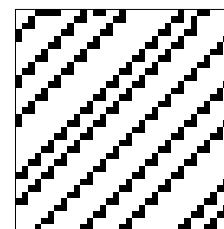
rule=3



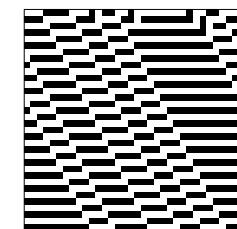
rule=4



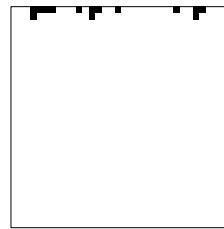
rule=5



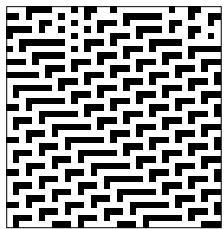
rule=6



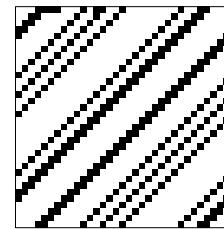
rule=7



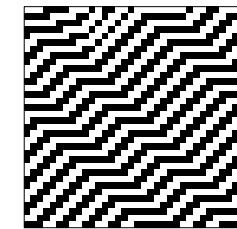
rule=8



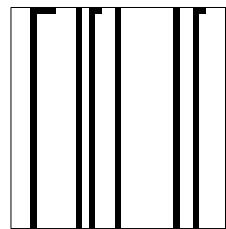
rule=9



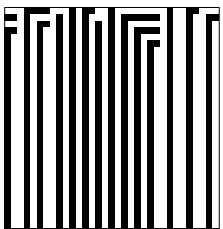
rule=10



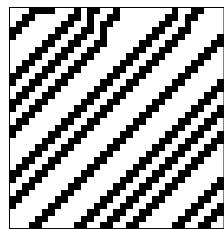
rule=11



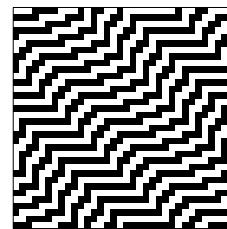
rule=12



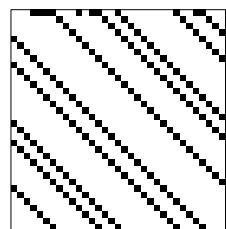
rule=13



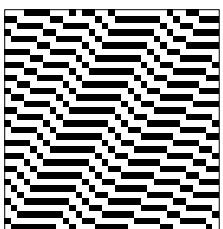
rule=14



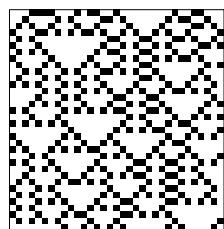
rule=15



rule=16



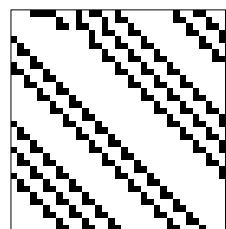
rule=17



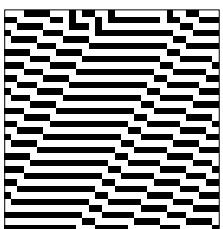
rule=18



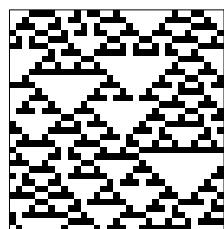
rule=19



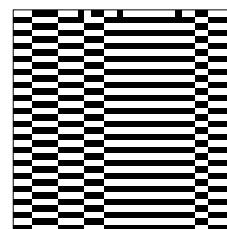
rule=20



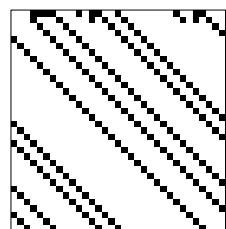
rule=21



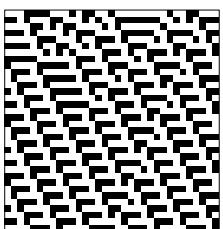
rule=22



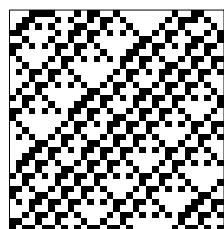
rule=23



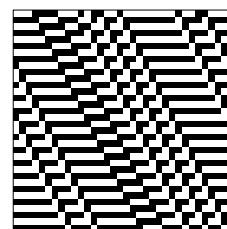
rule=24



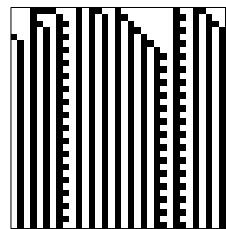
rule=25



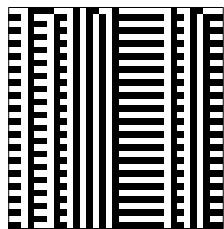
rule=26



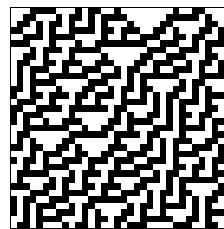
rule=27



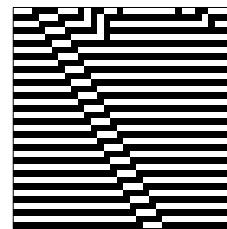
rule=28



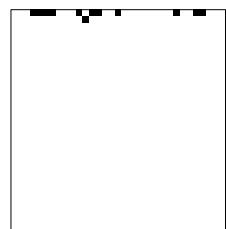
rule=29



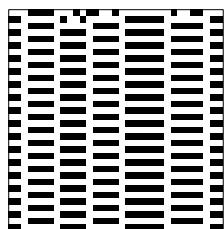
rule=30



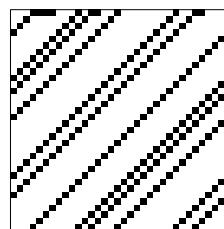
rule=31



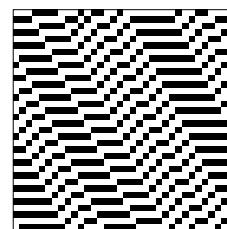
rule=32



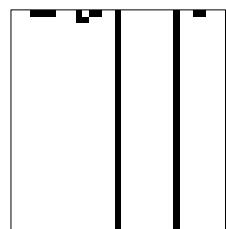
rule=33



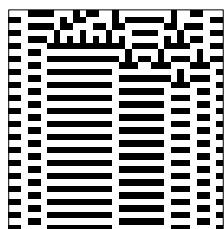
rule=34



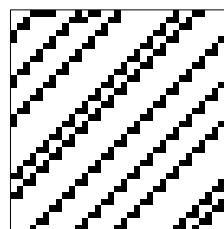
rule=35



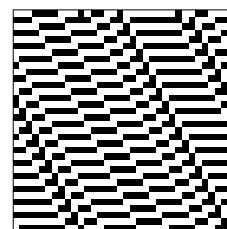
rule=36



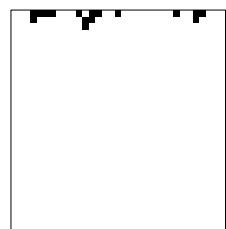
rule=37



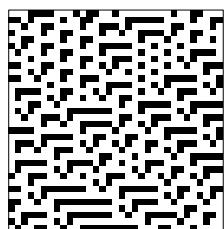
rule=38



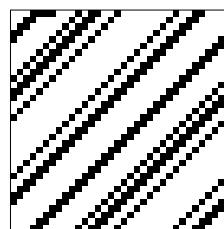
rule=39



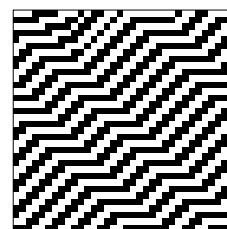
rule=40



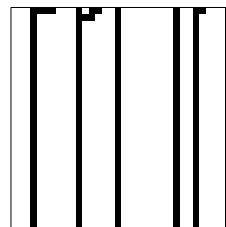
rule=41



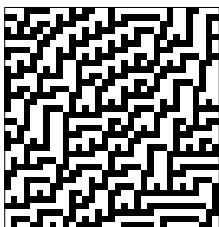
rule=42



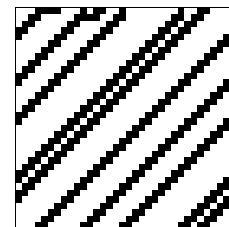
rule=43



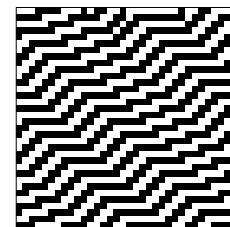
rule=44



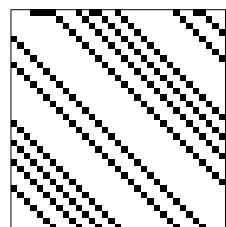
rule=45



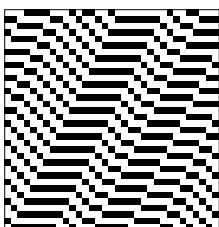
rule=46



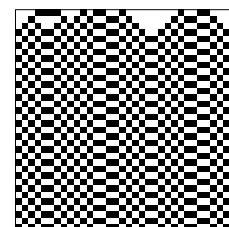
rule=47



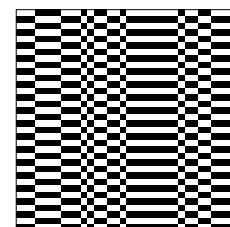
rule=48



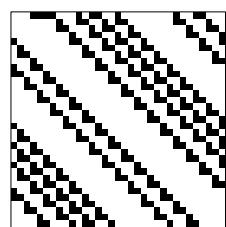
rule=49



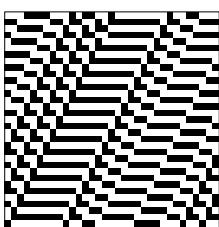
rule=50



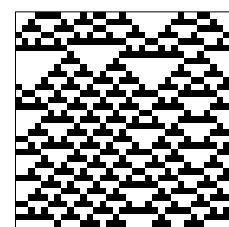
rule=51



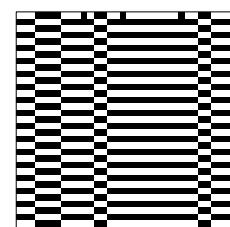
rule=52



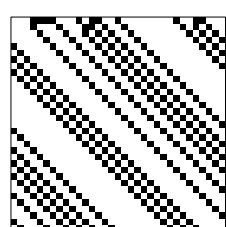
rule=53



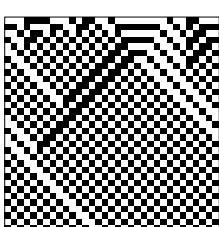
rule=54



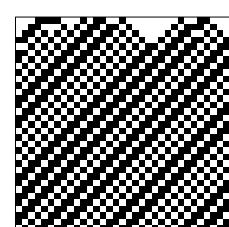
rule=55



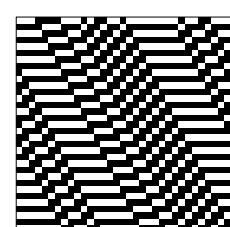
rule=56



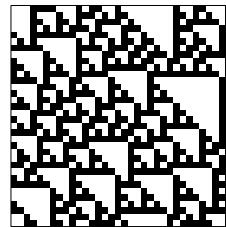
rule=57



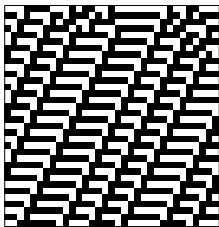
rule=58



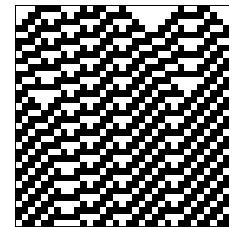
rule=59



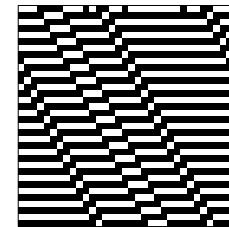
rule=60



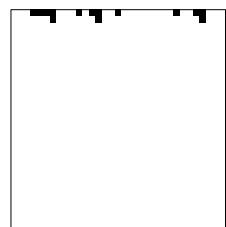
rule=61



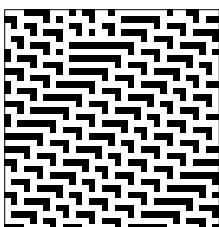
rule=62



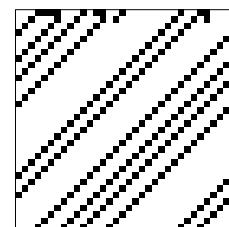
rule=63



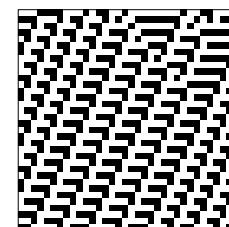
rule=64



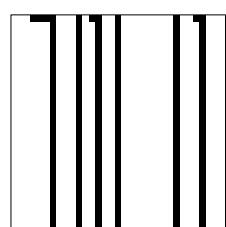
rule=65



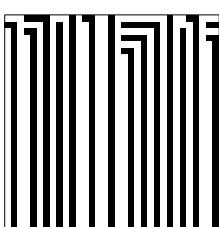
rule=66



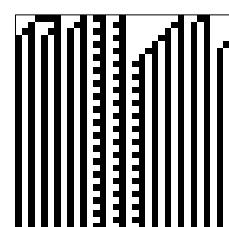
rule=67



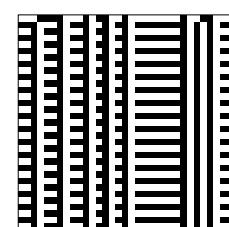
rule=68



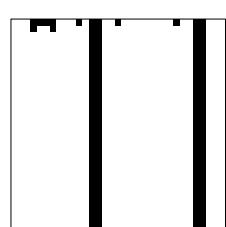
rule=69



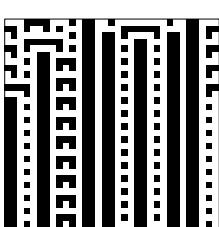
rule=70



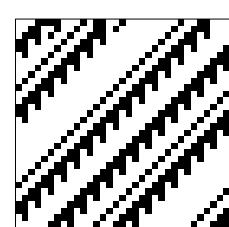
rule=71



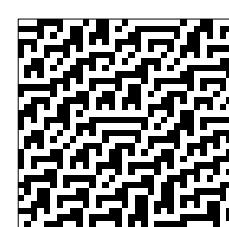
rule=72



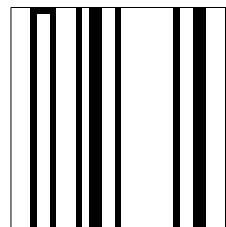
rule=73



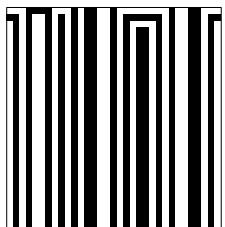
rule=74



rule=75



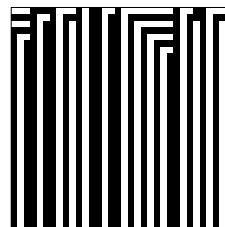
rule=76



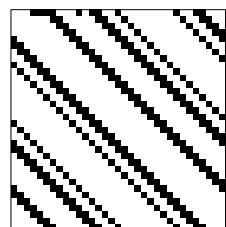
rule=77



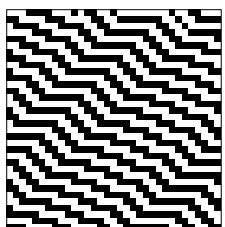
rule=78



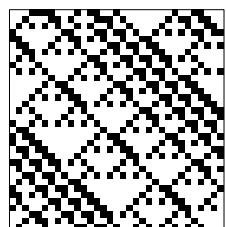
rule=79



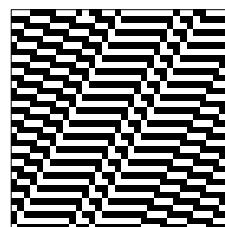
rule=80



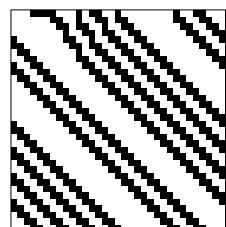
rule=81



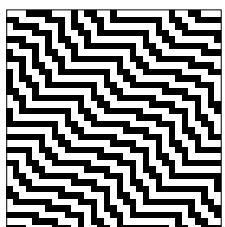
rule=82



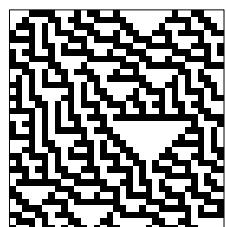
rule=83



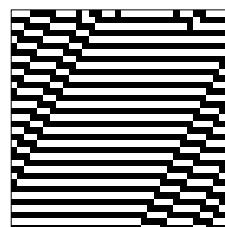
rule=84



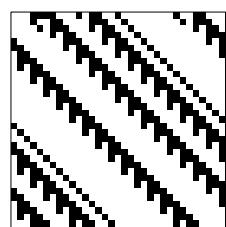
rule=85



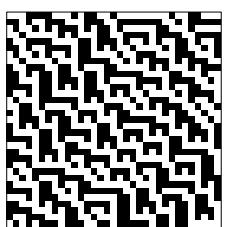
rule=86



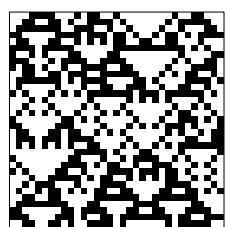
rule=87



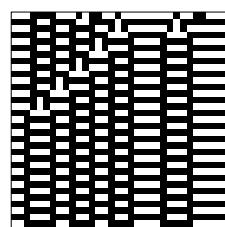
rule=88



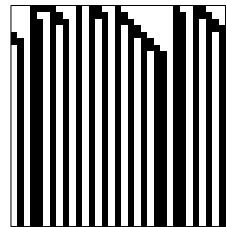
rule=89



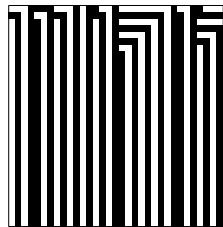
rule=90



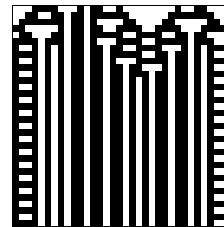
rule=91



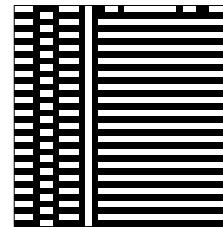
rule=92



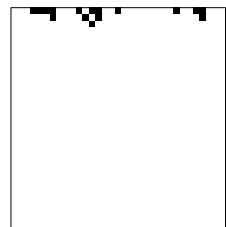
rule=93



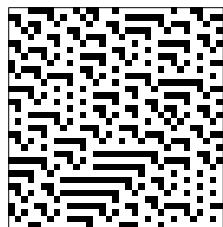
rule=94



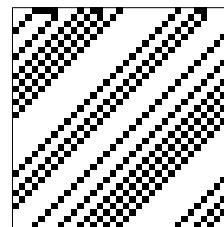
rule=95



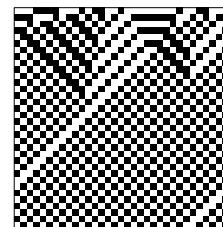
rule=96



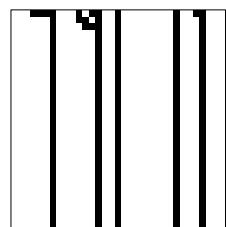
rule=97



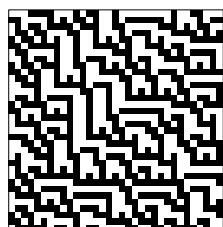
rule=98



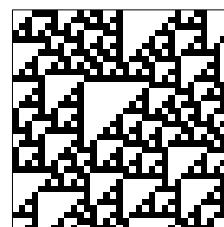
rule=99



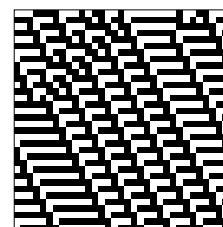
rule=100



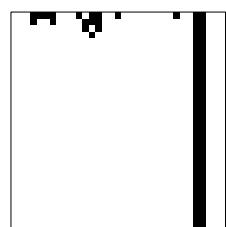
rule=101



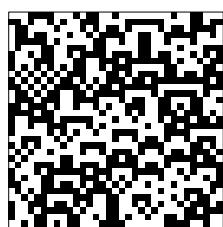
rule=102



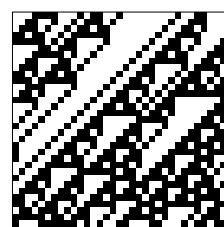
rule=103



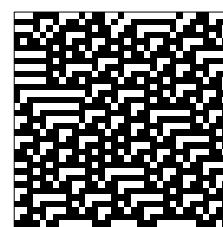
rule=104



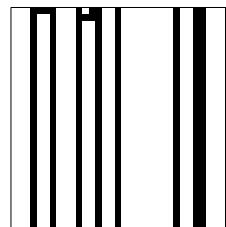
rule=105



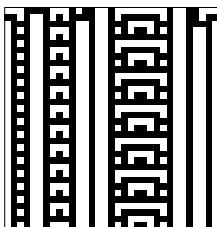
rule=106



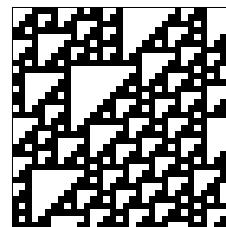
rule=107



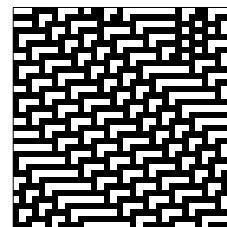
rule=108



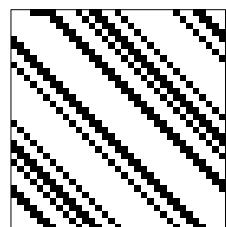
rule=109



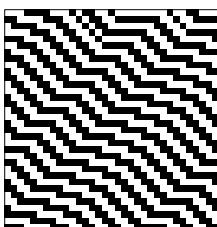
rule=110



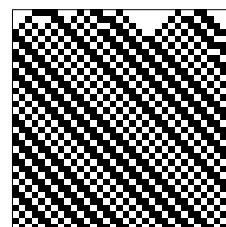
rule=111



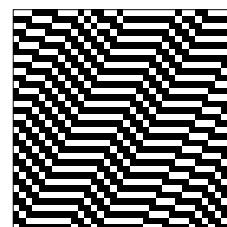
rule=112



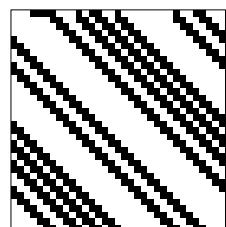
rule=113



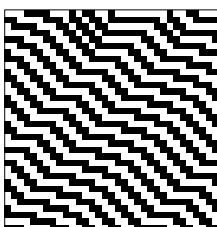
rule=114



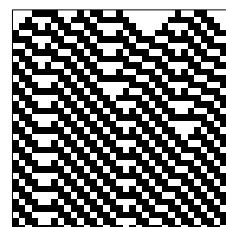
rule=115



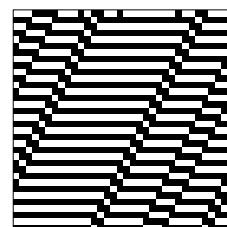
rule=116



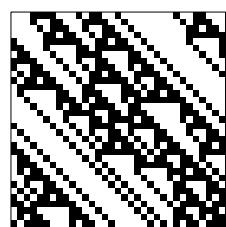
rule=117



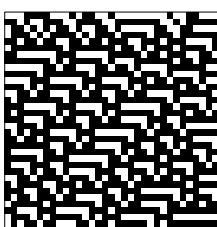
rule=118



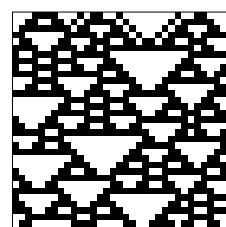
rule=119



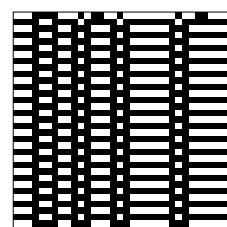
rule=120



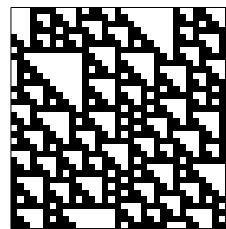
rule=121



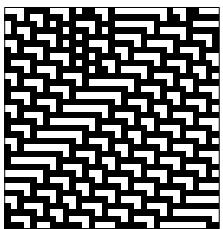
rule=122



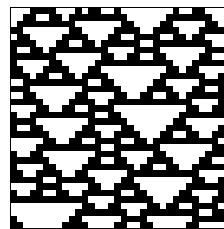
rule=123



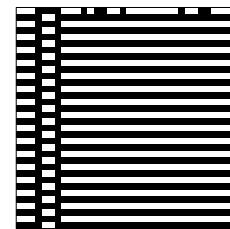
rule=124



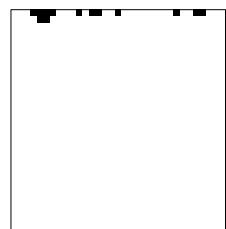
rule=125



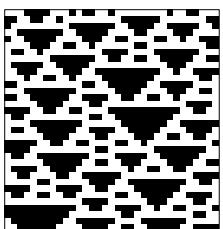
rule=126



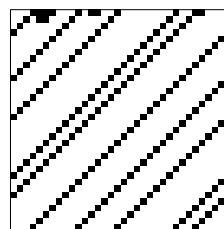
rule=127



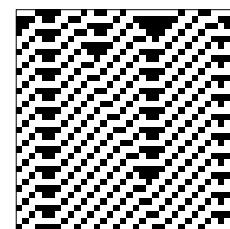
rule=128



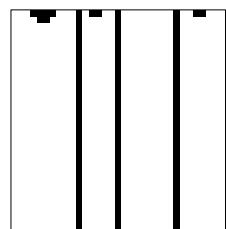
rule=129



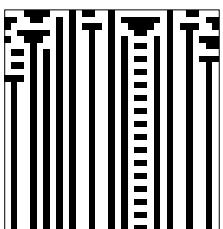
rule=130



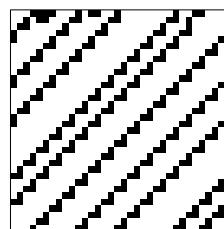
rule=131



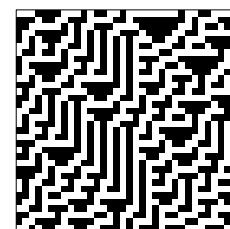
rule=132



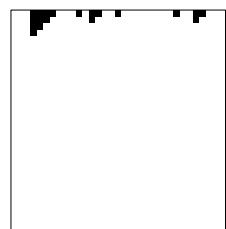
rule=133



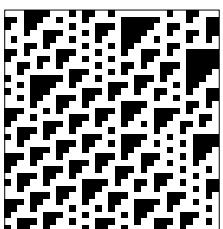
rule=134



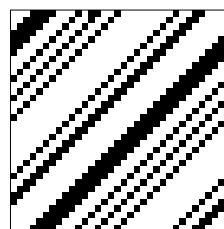
rule=135



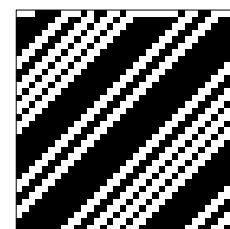
rule=136



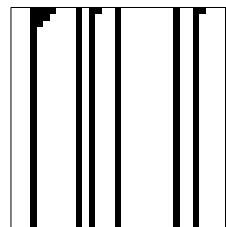
rule=137



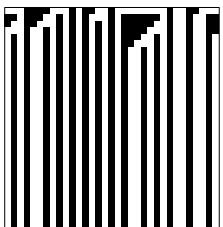
rule=138



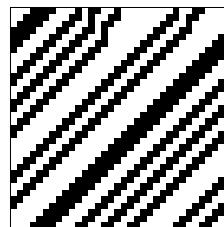
rule=139



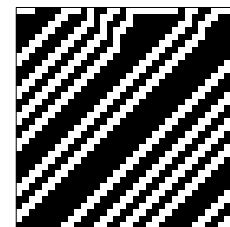
rule=140



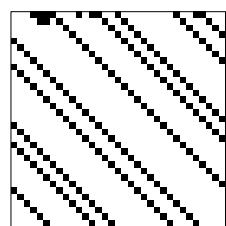
rule=141



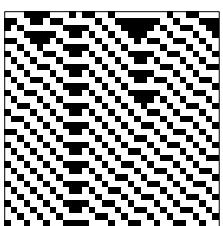
rule=142



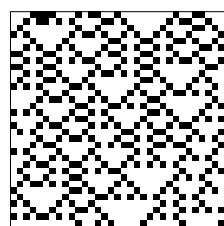
rule=143



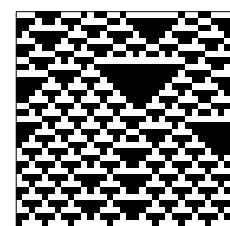
rule=144



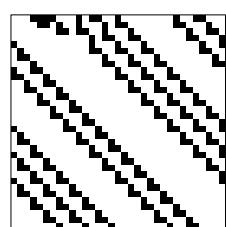
rule=145



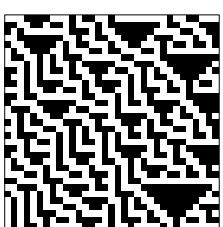
rule=146



rule=147



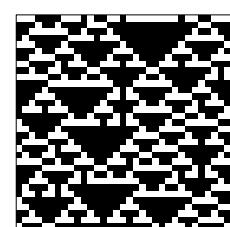
rule=148



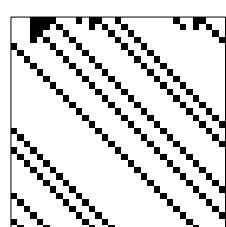
rule=149



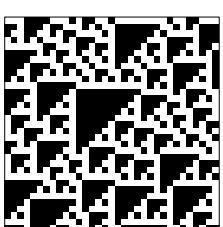
rule=150



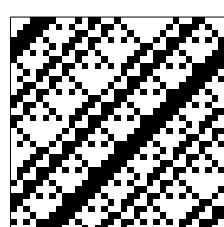
rule=151



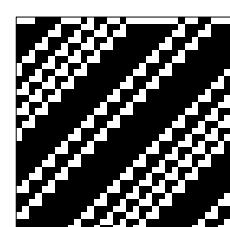
rule=152



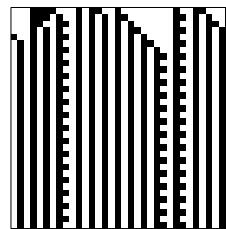
rule=153



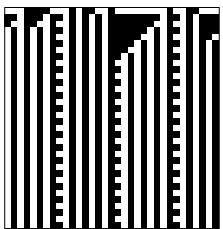
rule=154



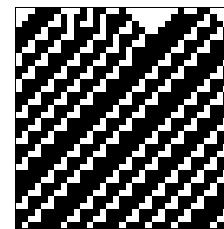
rule=155



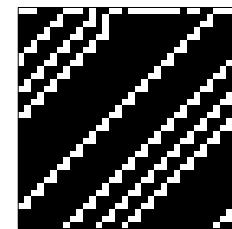
rule=156



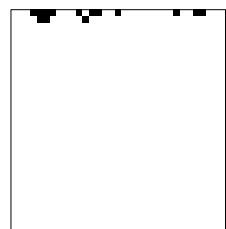
rule=157



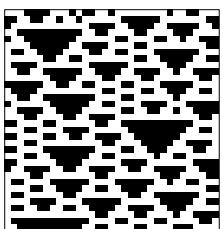
rule=158



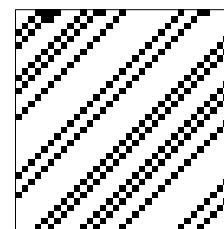
rule=159



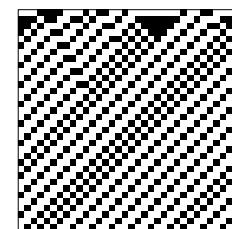
rule=160



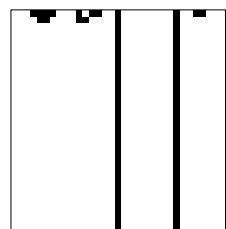
rule=161



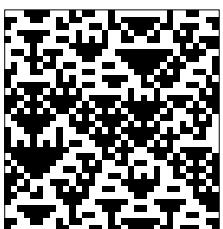
rule=162



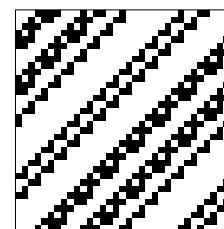
rule=163



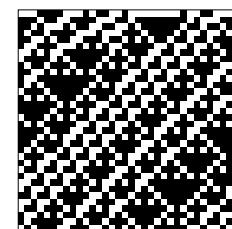
rule=164



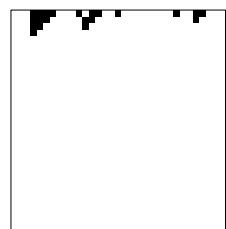
rule=165



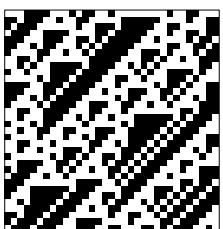
rule=166



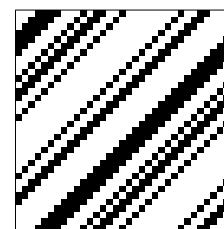
rule=167



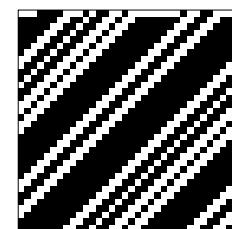
rule=168



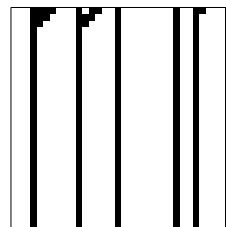
rule=169



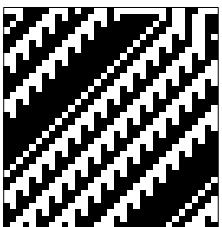
rule=170



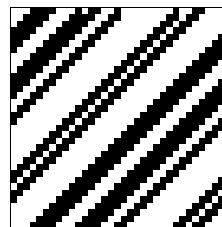
rule=171



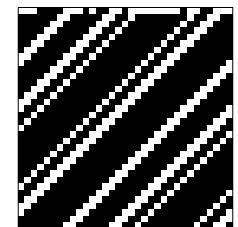
rule=172



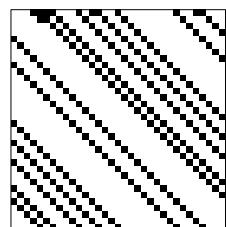
rule=173



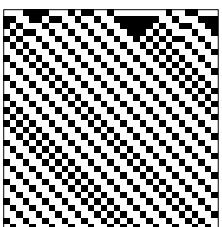
rule=174



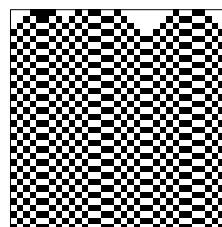
rule=175



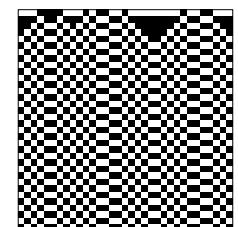
rule=176



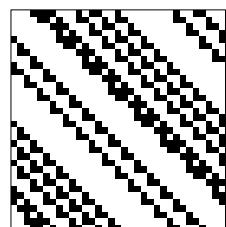
rule=177



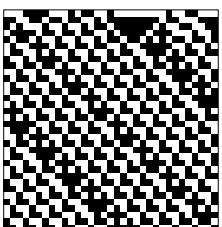
rule=178



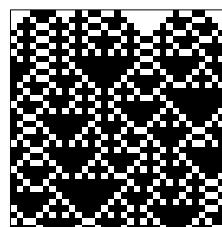
rule=179



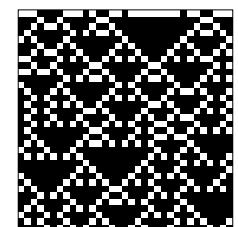
rule=180



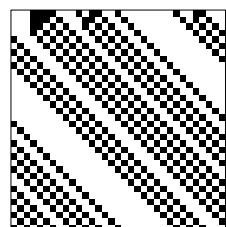
rule=181



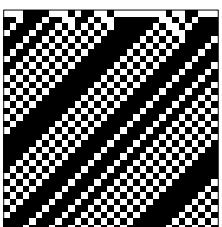
rule=182



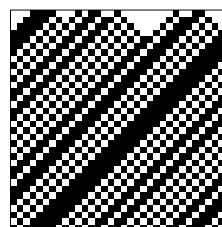
rule=183



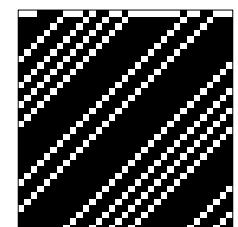
rule=184



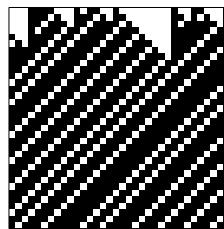
rule=185



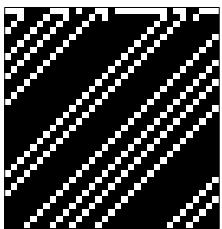
rule=186



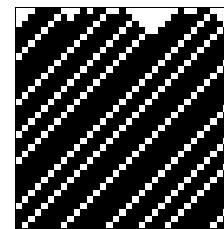
rule=187



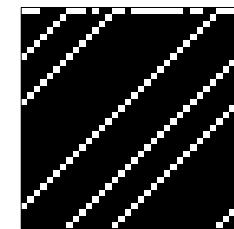
rule=188



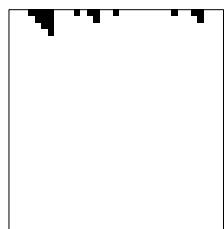
rule=189



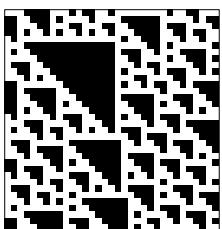
rule=190



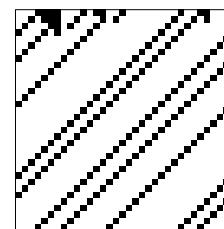
rule=191



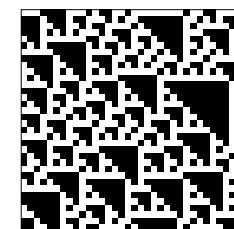
rule=192



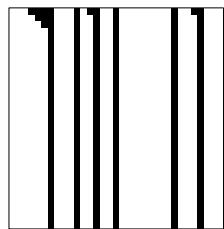
rule=193



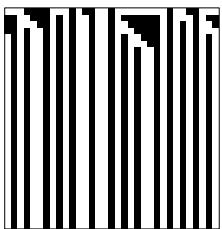
rule=194



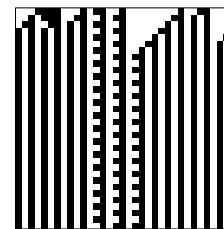
rule=195



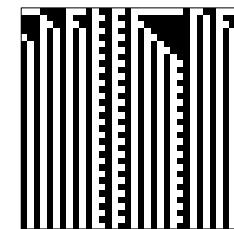
rule=196



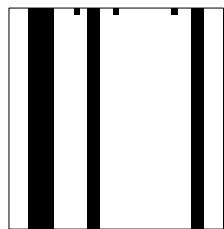
rule=197



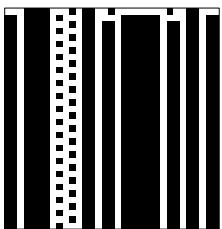
rule=198



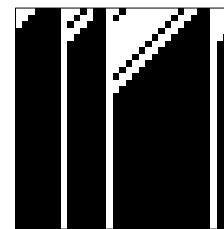
rule=199



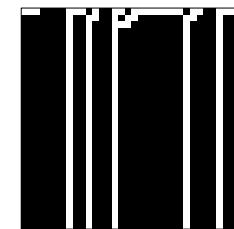
rule=200



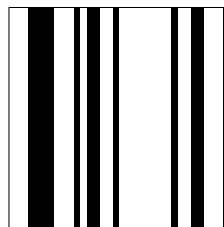
rule=201



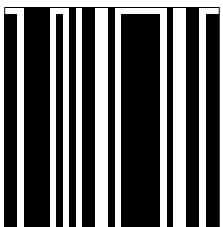
rule=202



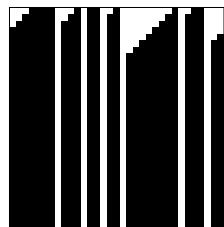
rule=203



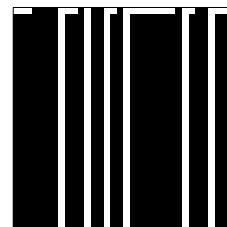
rule=204



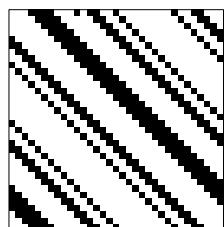
rule=205



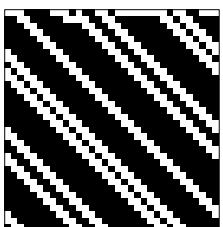
rule=206



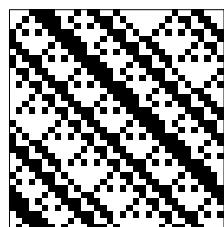
rule=207



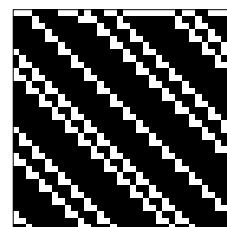
rule=208



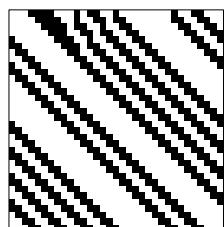
rule=209



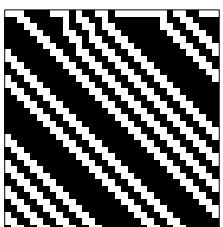
rule=210



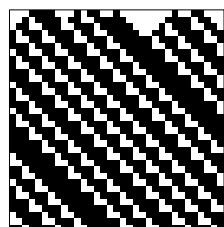
rule=211



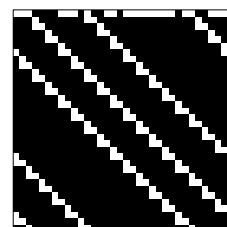
rule=212



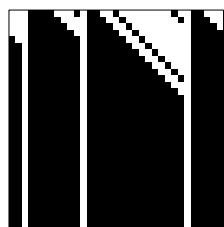
rule=213



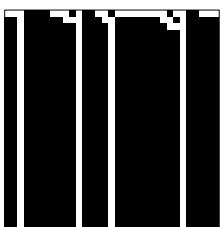
rule=214



rule=215



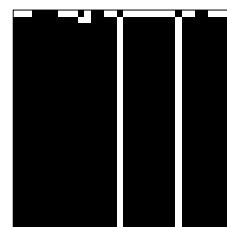
rule=216



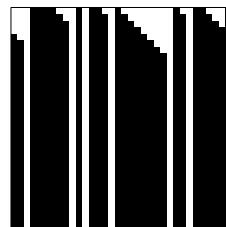
rule=217



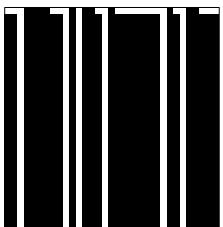
rule=218



rule=219



rule=220



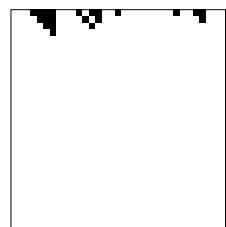
rule=221



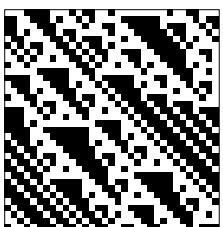
rule=222



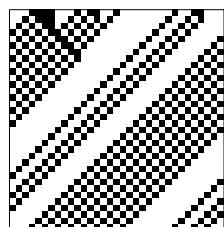
rule=223



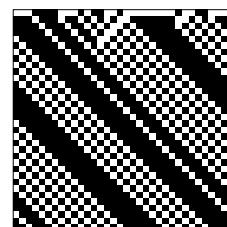
rule=224



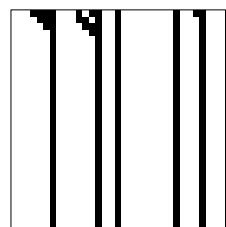
rule=225



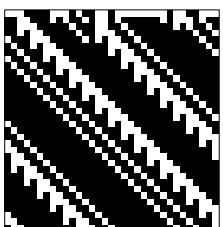
rule=226



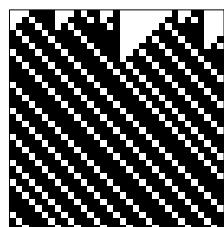
rule=227



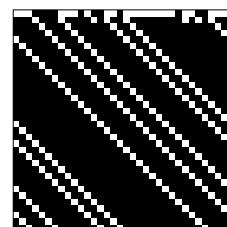
rule=228



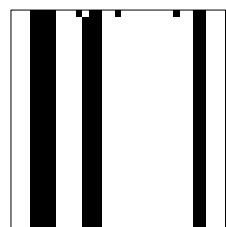
rule=229



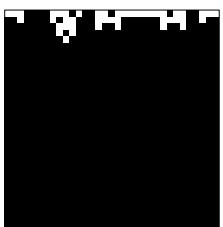
rule=230



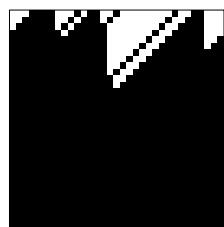
rule=231



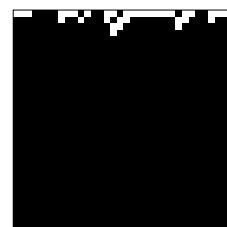
rule=232



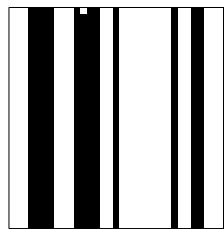
rule=233



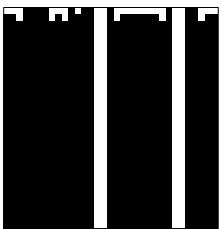
rule=234



rule=235



rule=236



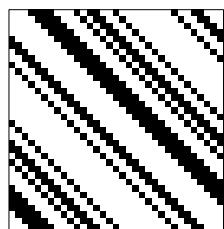
rule=237



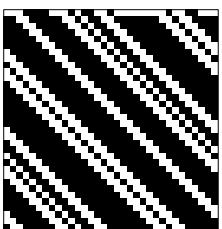
rule=238



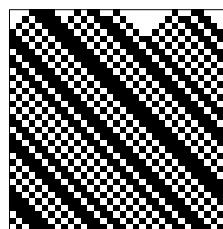
rule=239



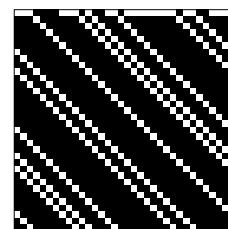
rule=240



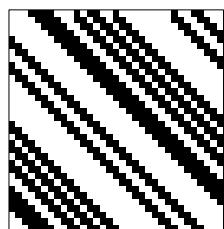
rule=241



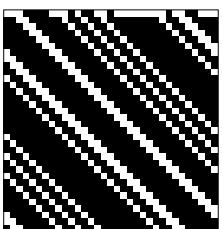
rule=242



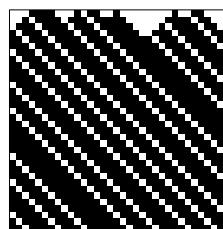
rule=243



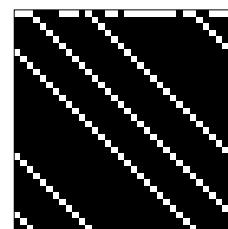
rule=244



rule=245



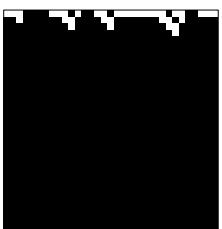
rule=246



rule=247



rule=248



rule=249



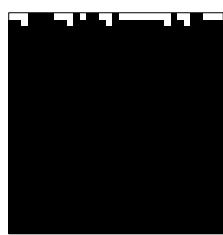
rule=250



rule=251



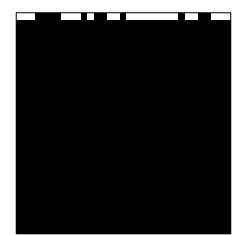
rule=252



rule=253



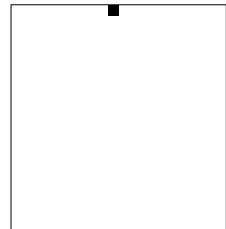
rule=254



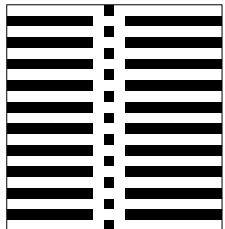
rule=255

APPENDIX B:

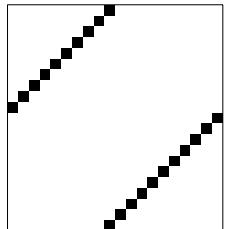
初期配置においてある1点のみ'1'を与えてそれ以外は'0'とする



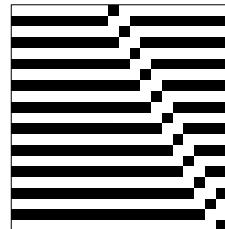
rule=0



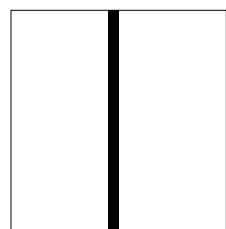
rule=1



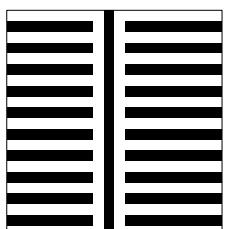
rule=2



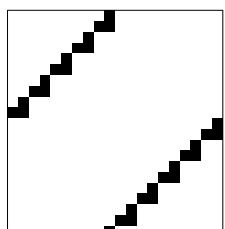
rule=3



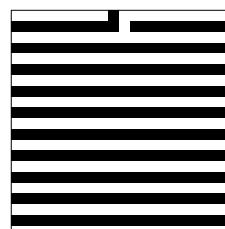
rule=4



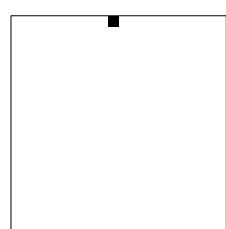
rule=5



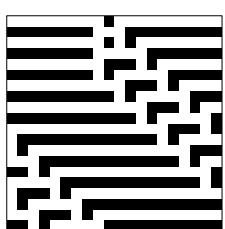
rule=6



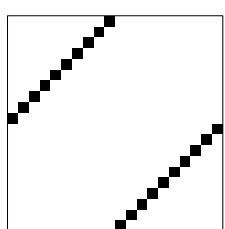
rule=7



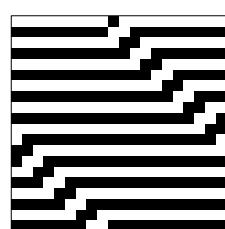
rule=8



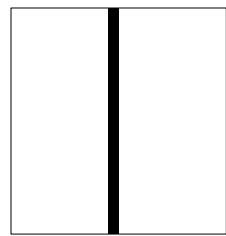
rule=9



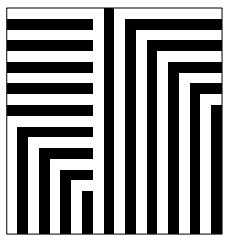
rule=10



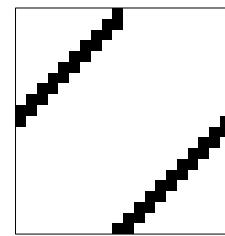
rule=11



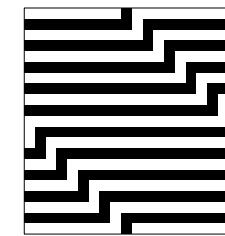
rule=12



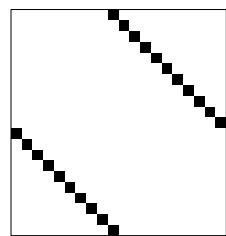
rule=13



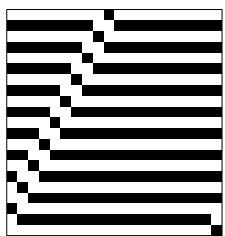
rule=14



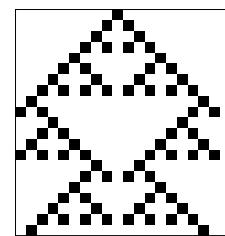
rule=15



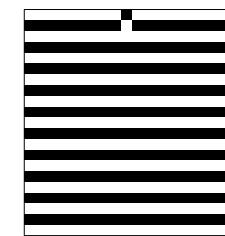
rule=16



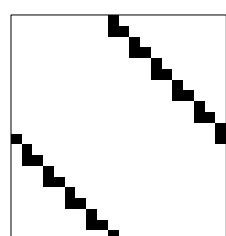
rule=17



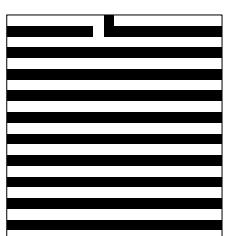
rule=18



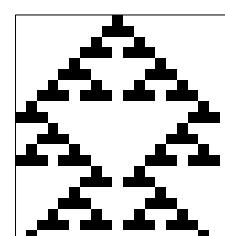
rule=19



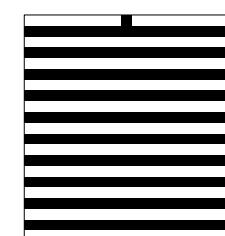
rule=20



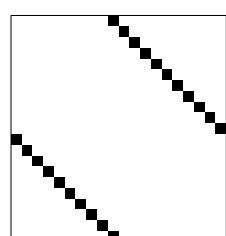
rule=21



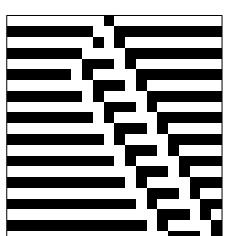
rule=22



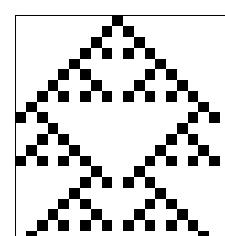
rule=23



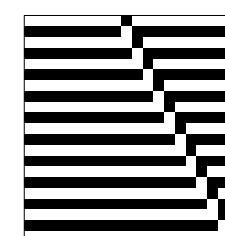
rule=24



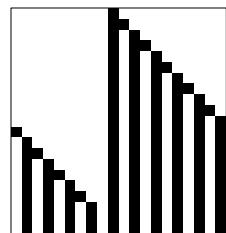
rule=25



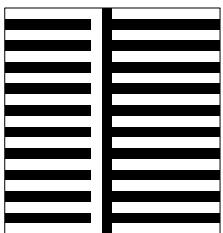
rule=26



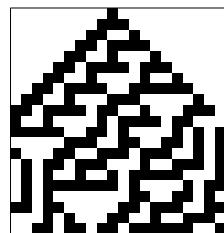
rule=27



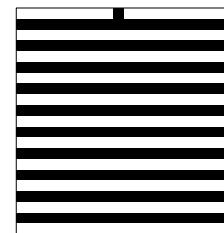
rule=28



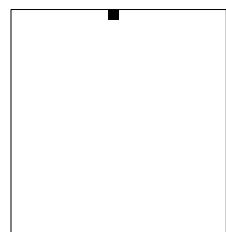
rule=29



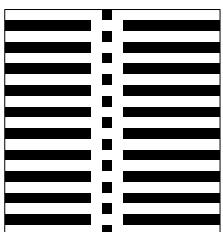
rule=30



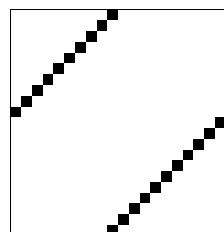
rule=31



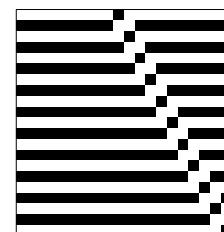
rule=32



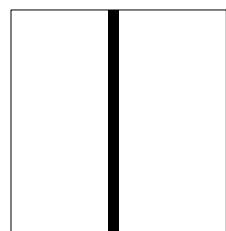
rule=33



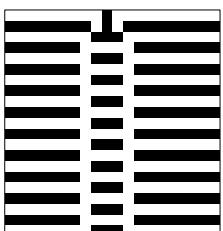
rule=34



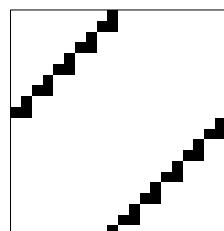
rule=35



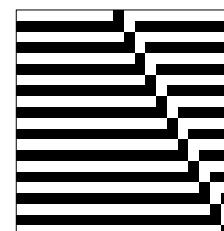
rule=36



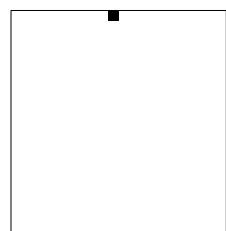
rule=37



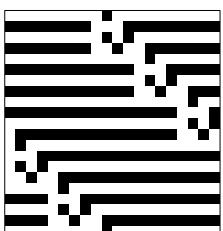
rule=38



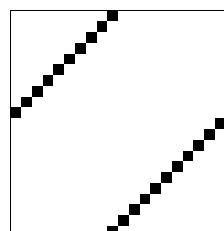
rule=39



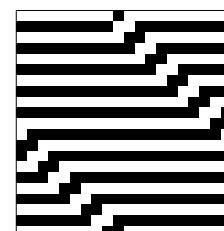
rule=40



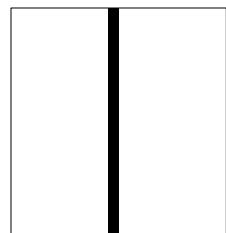
rule=41



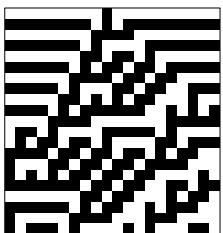
rule=42



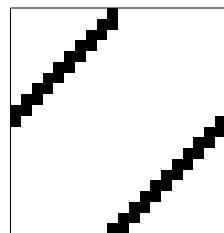
rule=43



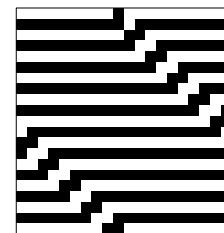
rule=44



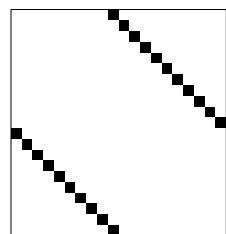
rule=45



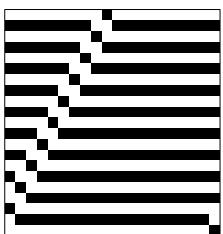
rule=46



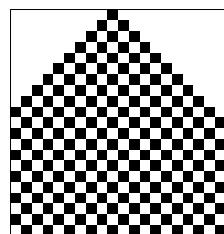
rule=47



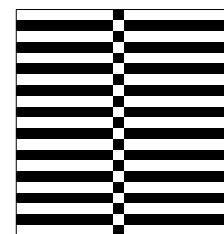
rule=48



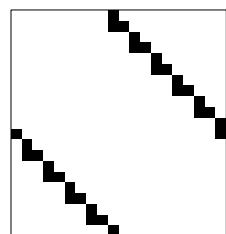
rule=49



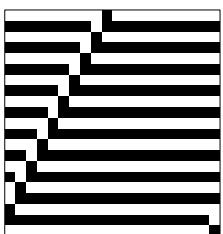
rule=50



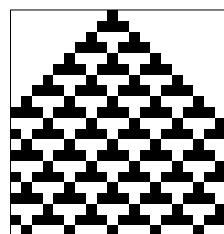
rule=51



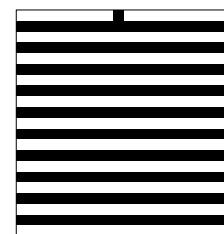
rule=52



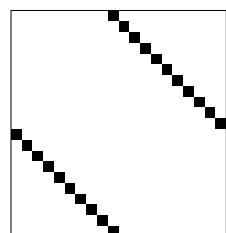
rule=53



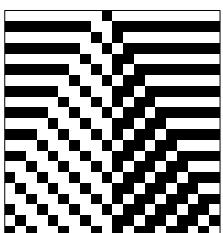
rule=54



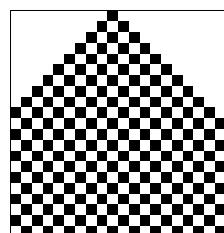
rule=55



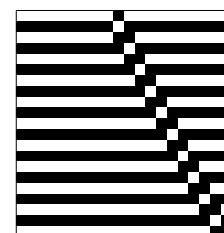
rule=56



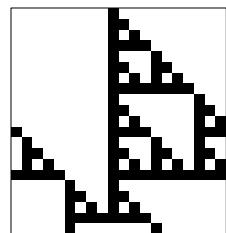
rule=57



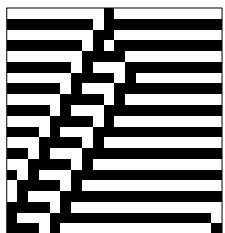
rule=58



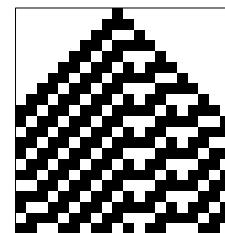
rule=59



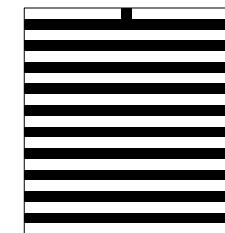
rule=60



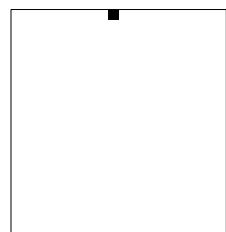
rule=61



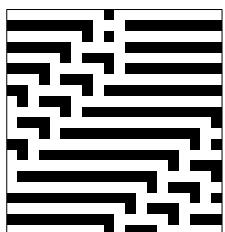
rule=62



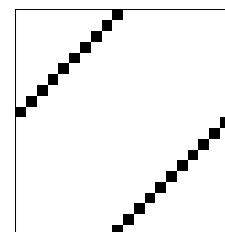
rule=63



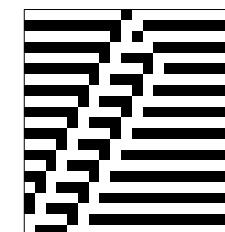
rule=64



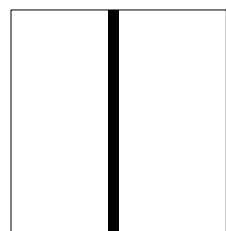
rule=65



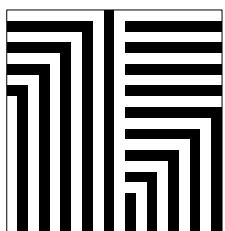
rule=66



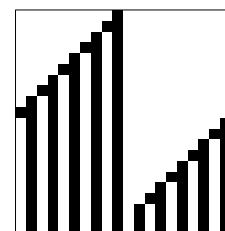
rule=67



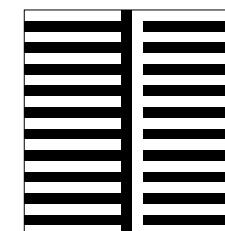
rule=68



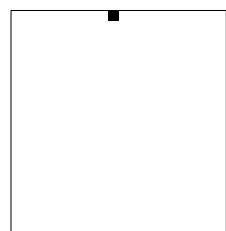
rule=69



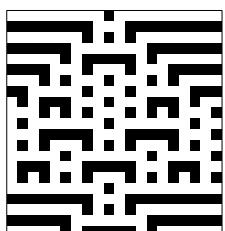
rule=70



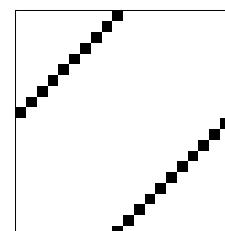
rule=71



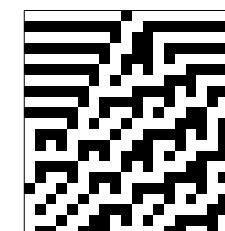
rule=72



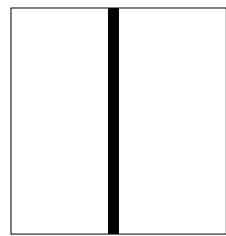
rule=73



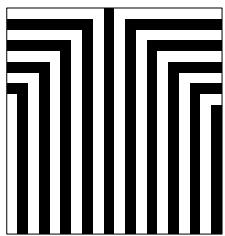
rule=74



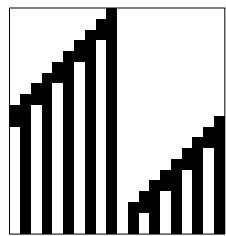
rule=75



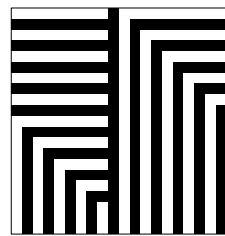
rule=76



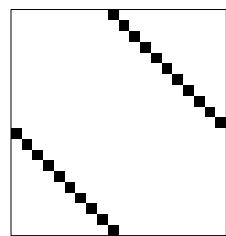
rule=77



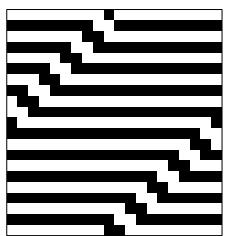
rule=78



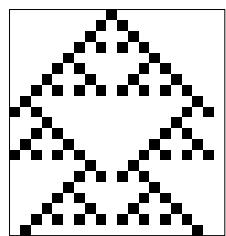
rule=79



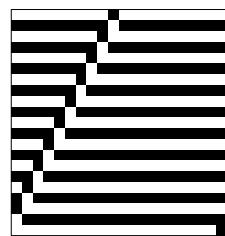
rule=80



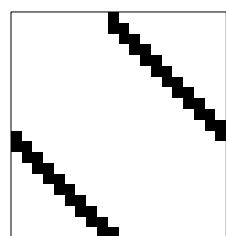
rule=81



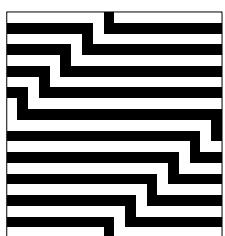
rule=82



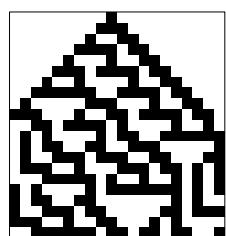
rule=83



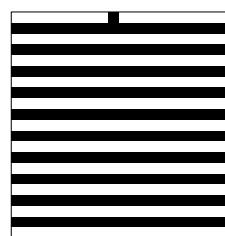
rule=84



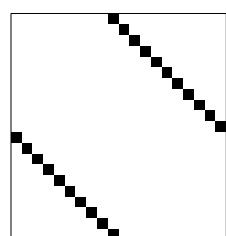
rule=85



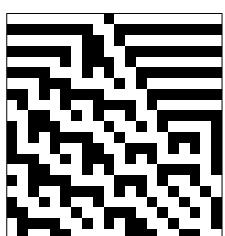
rule=86



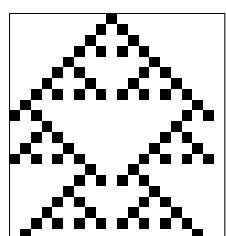
rule=87



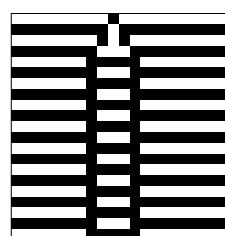
rule=88



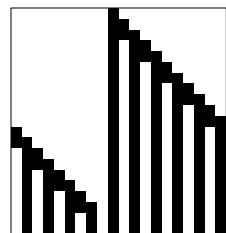
rule=89



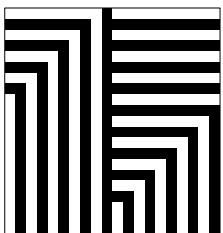
rule=90



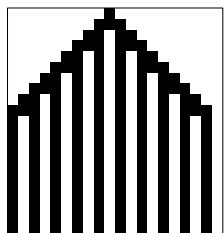
rule=91



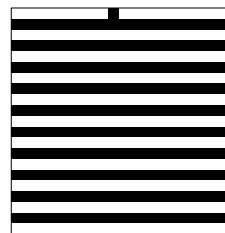
rule=92



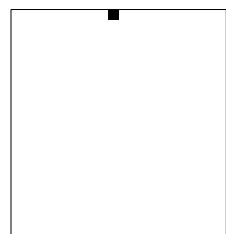
rule=93



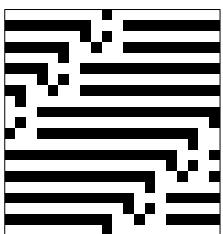
rule=94



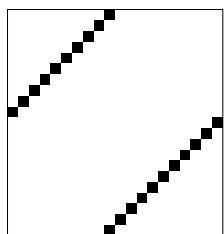
rule=95



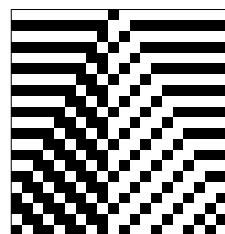
rule=96



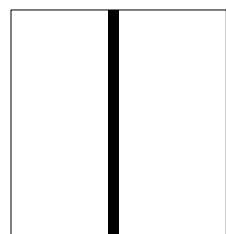
rule=97



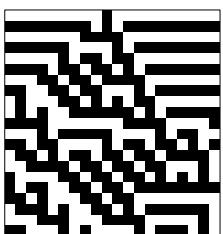
rule=98



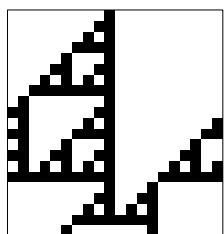
rule=99



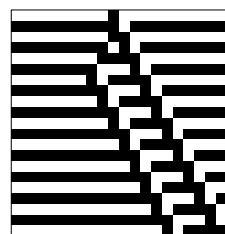
rule=100



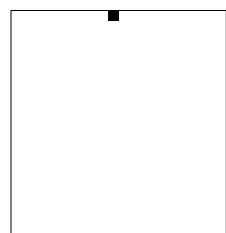
rule=101



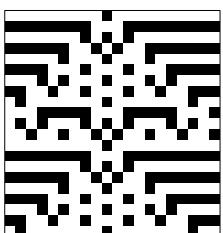
rule=102



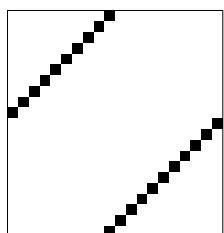
rule=103



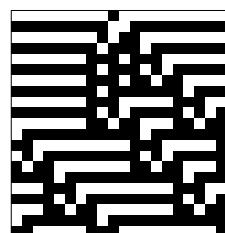
rule=104



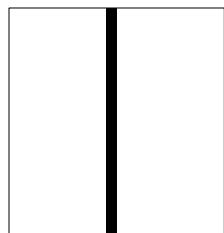
rule=105



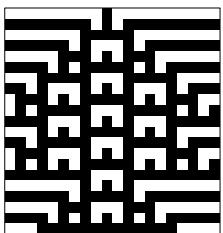
rule=106



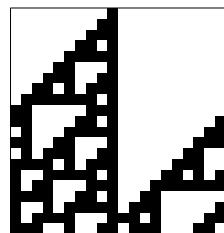
rule=107



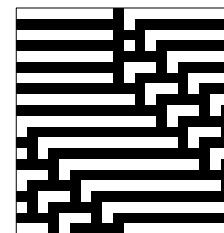
rule=108



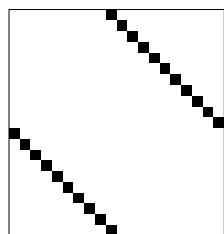
rule=109



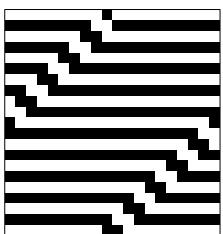
rule=110



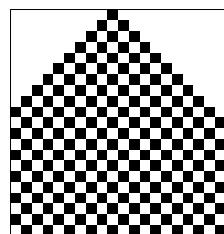
rule=111



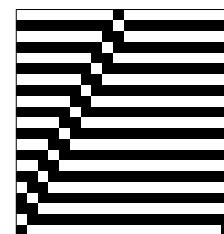
rule=112



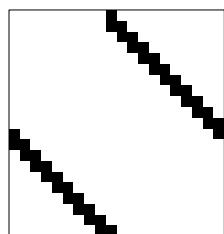
rule=113



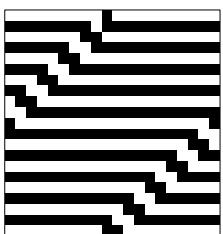
rule=114



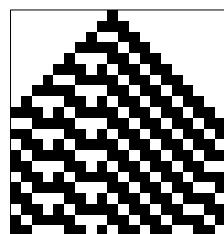
rule=115



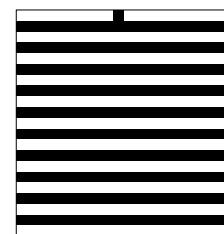
rule=116



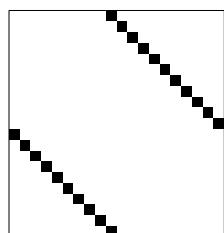
rule=117



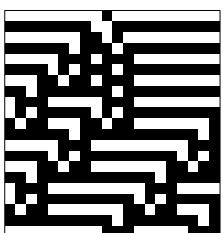
rule=118



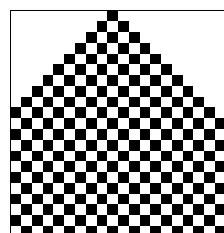
rule=119



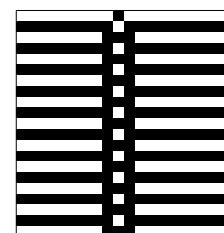
rule=120



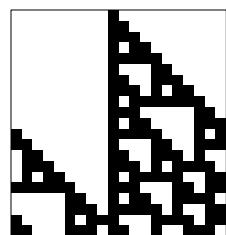
rule=121



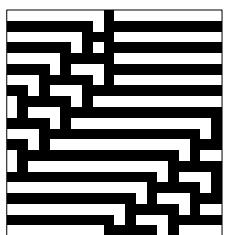
rule=122



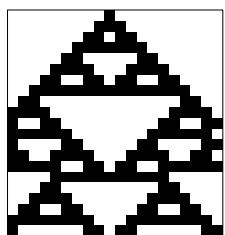
rule=123



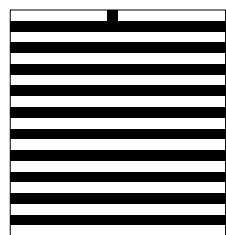
rule=124



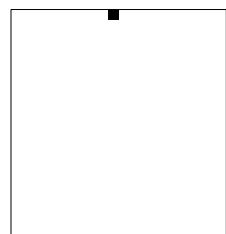
rule=125



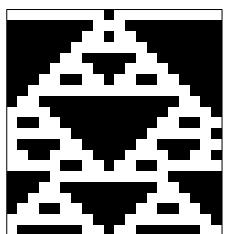
rule=126



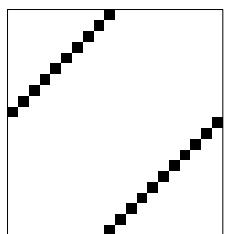
rule=127



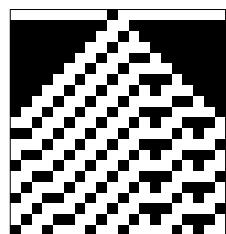
rule=128



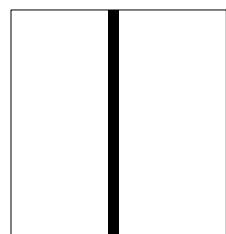
rule=129



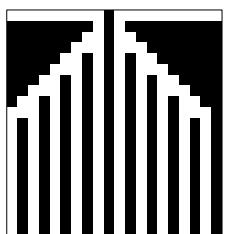
rule=130



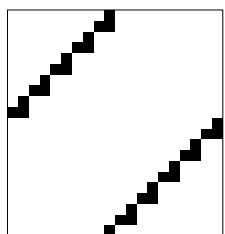
rule=131



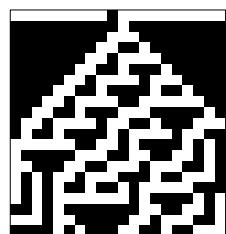
rule=132



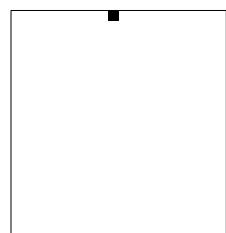
rule=133



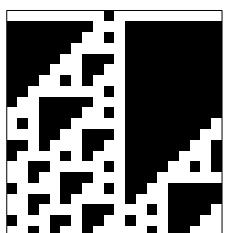
rule=134



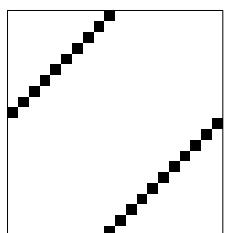
rule=135



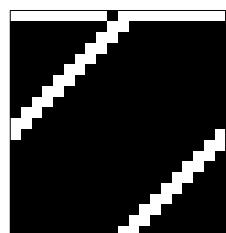
rule=136



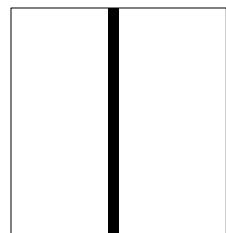
rule=137



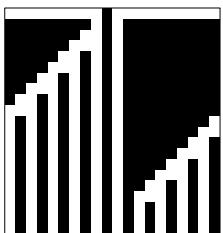
rule=138



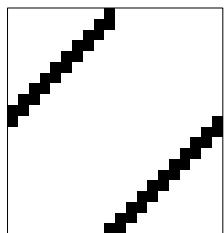
rule=139



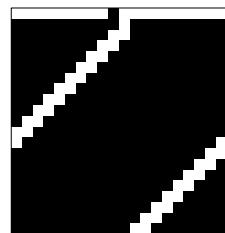
rule=140



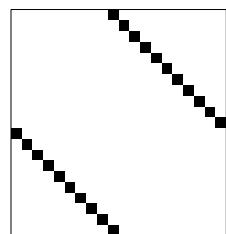
rule=141



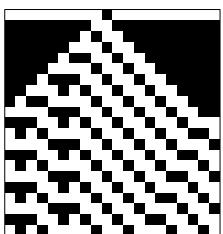
rule=142



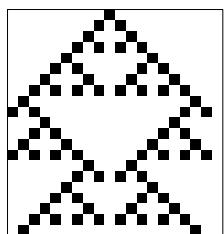
rule=143



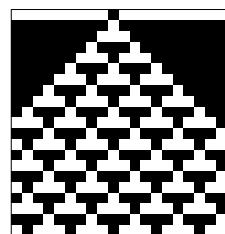
rule=144



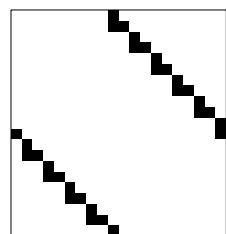
rule=145



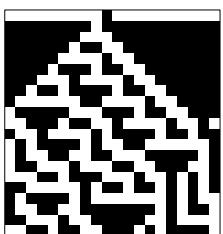
rule=146



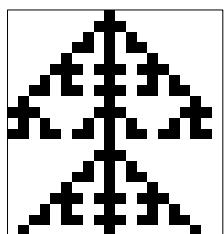
rule=147



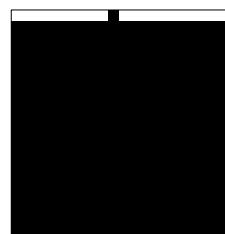
rule=148



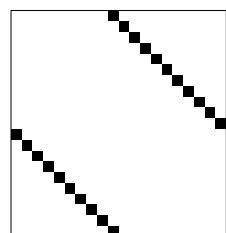
rule=149



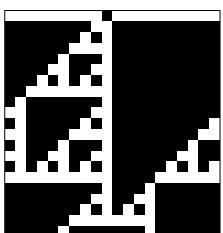
rule=150



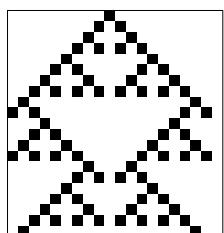
rule=151



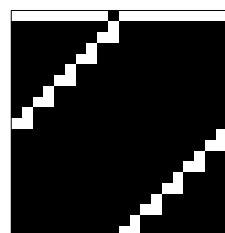
rule=152



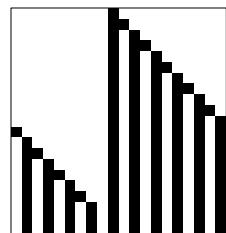
rule=153



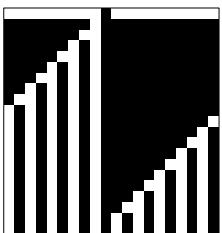
rule=154



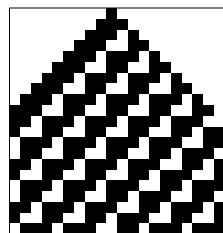
rule=155



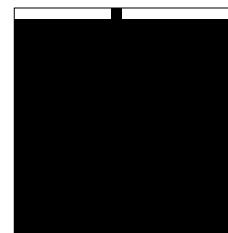
rule=156



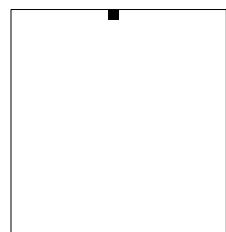
rule=157



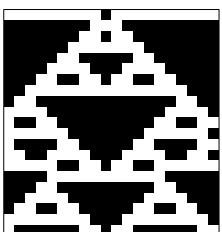
rule=158



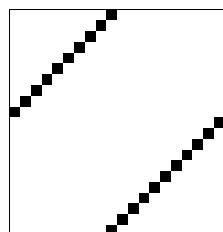
rule=159



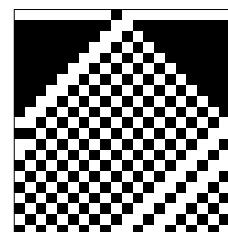
rule=160



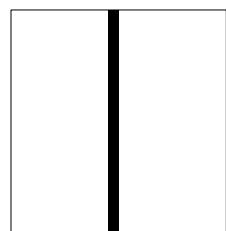
rule=161



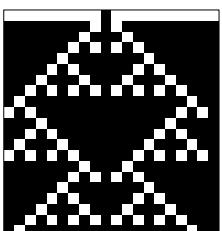
rule=162



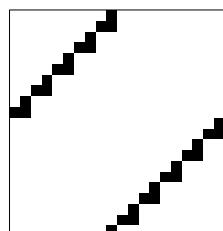
rule=163



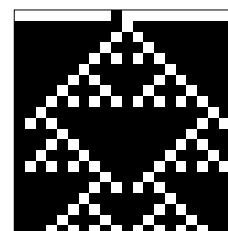
rule=164



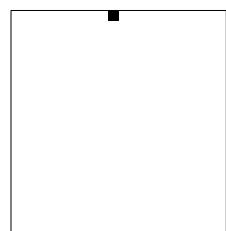
rule=165



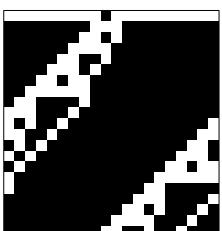
rule=166



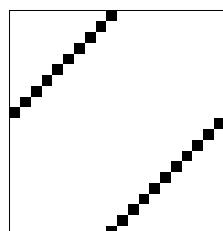
rule=167



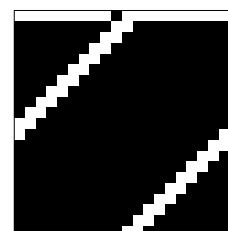
rule=168



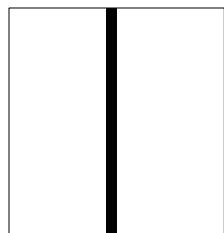
rule=169



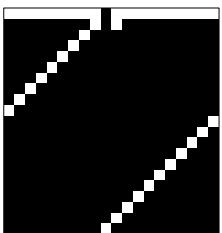
rule=170



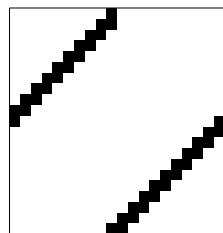
rule=171



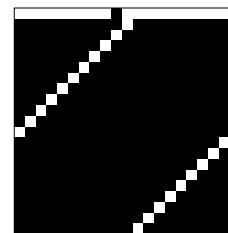
rule=172



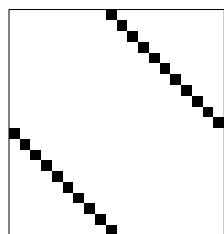
rule=173



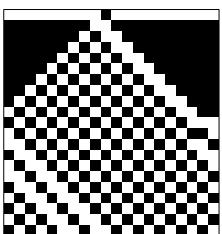
rule=174



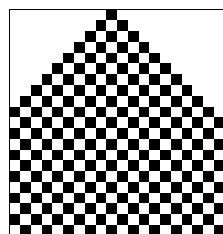
rule=175



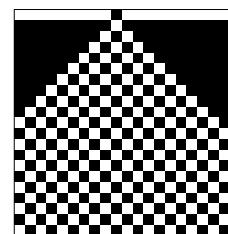
rule=176



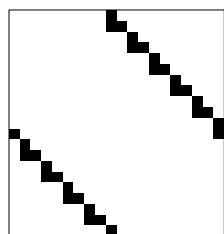
rule=177



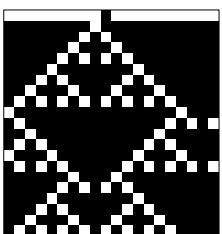
rule=178



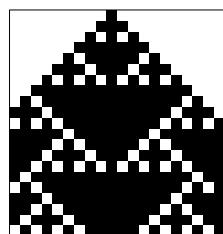
rule=179



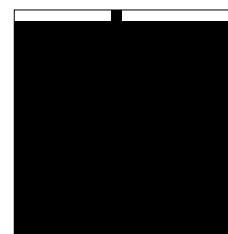
rule=180



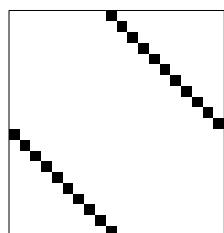
rule=181



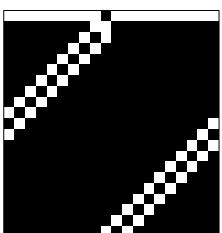
rule=182



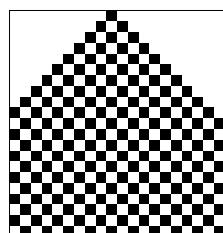
rule=183



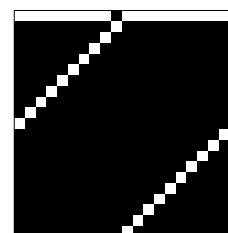
rule=184



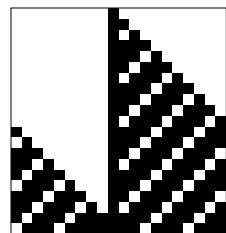
rule=185



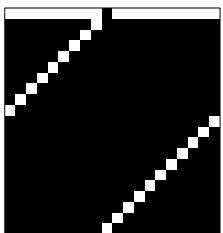
rule=186



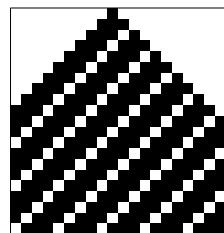
rule=187



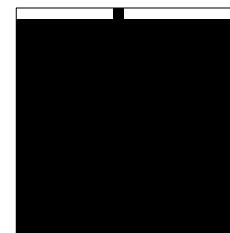
rule=188



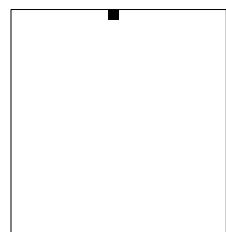
rule=189



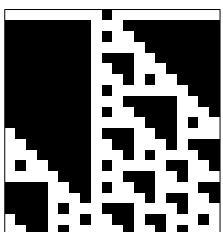
rule=190



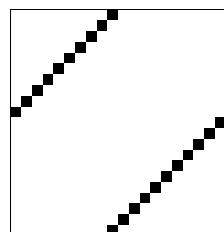
rule=191



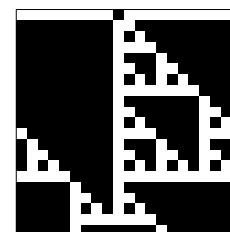
rule=192



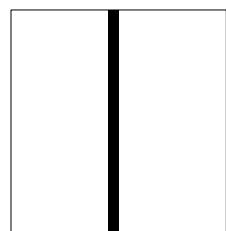
rule=193



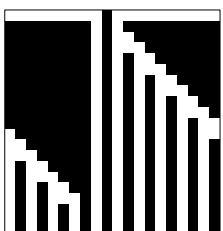
rule=194



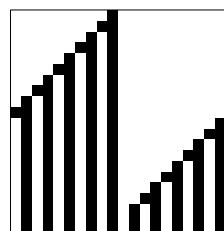
rule=195



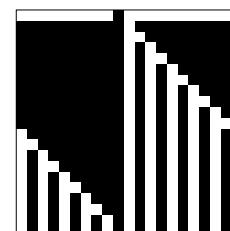
rule=196



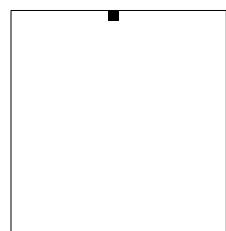
rule=197



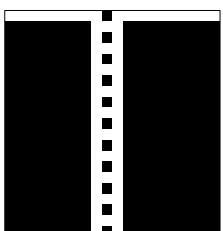
rule=198



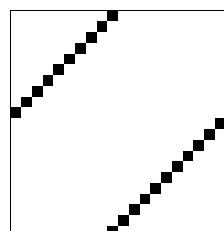
rule=199



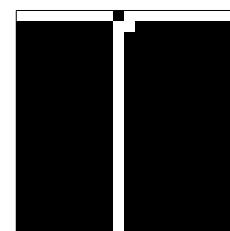
rule=200



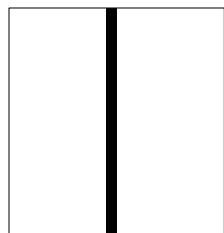
rule=201



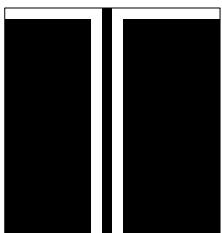
rule=202



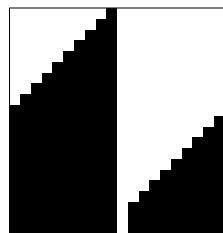
rule=203



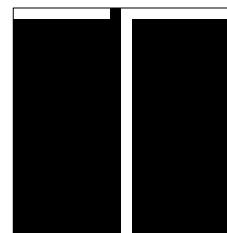
rule=204



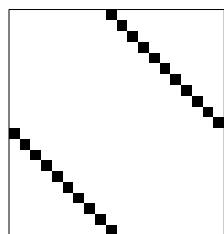
rule=205



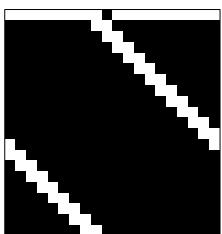
rule=206



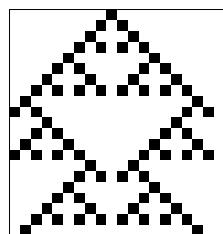
rule=207



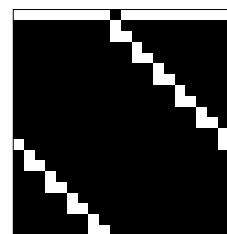
rule=208



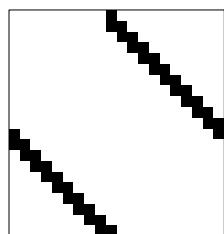
rule=209



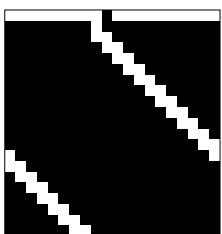
rule=210



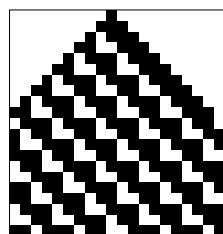
rule=211



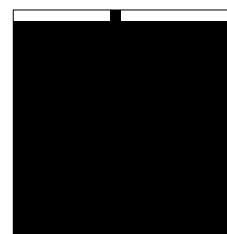
rule=212



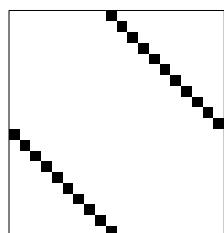
rule=213



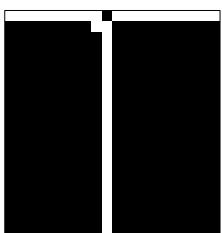
rule=214



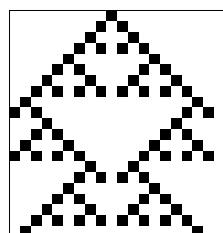
rule=215



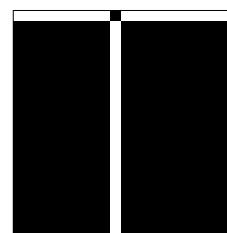
rule=216



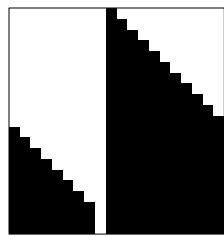
rule=217



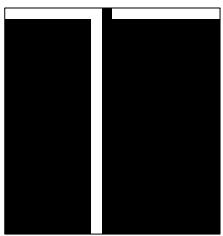
rule=218



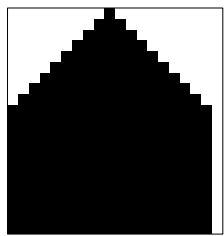
rule=219



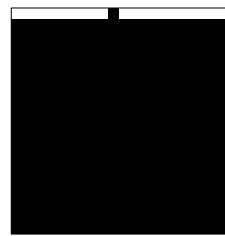
rule=220



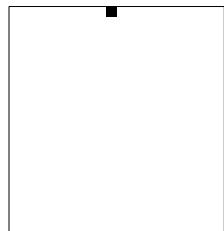
rule=221



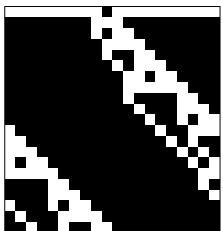
rule=222



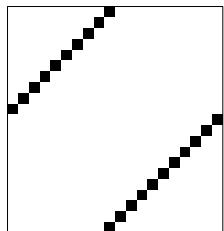
rule=223



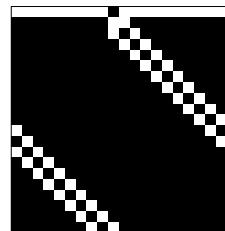
rule=224



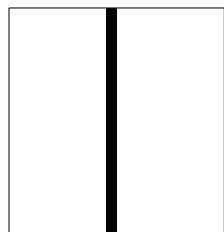
rule=225



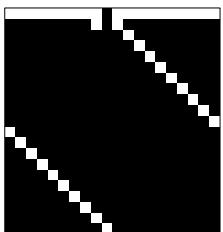
rule=226



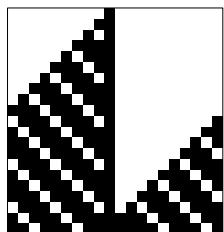
rule=227



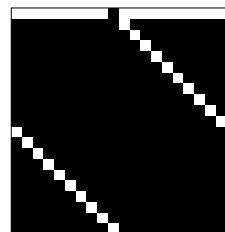
rule=228



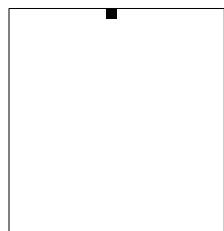
rule=229



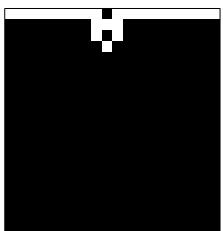
rule=230



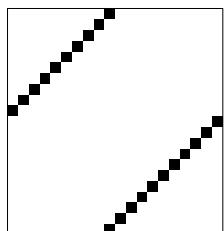
rule=231



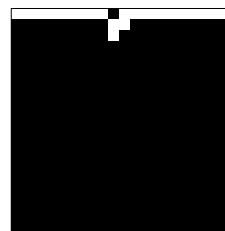
rule=232



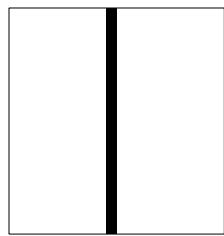
rule=233



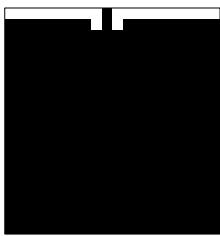
rule=234



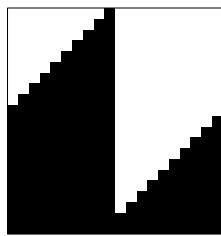
rule=235



rule=236



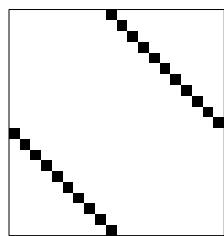
rule=237



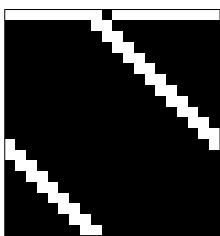
rule=238



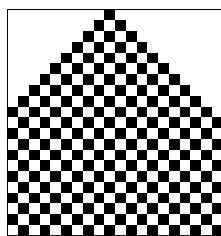
rule=239



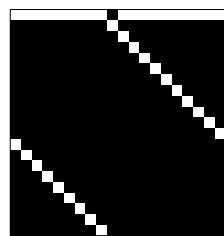
rule=240



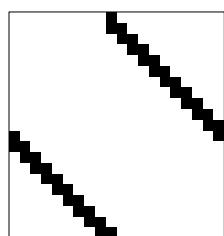
rule=241



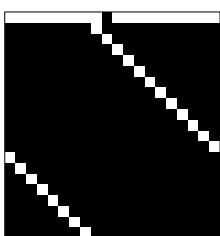
rule=242



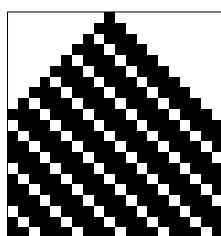
rule=243



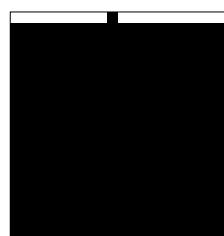
rule=244



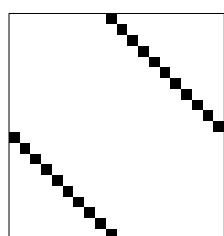
rule=245



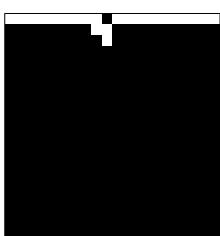
rule=246



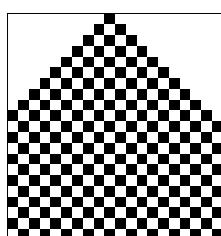
rule=247



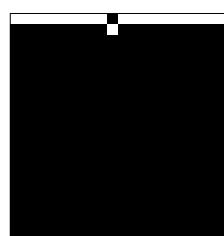
rule=248



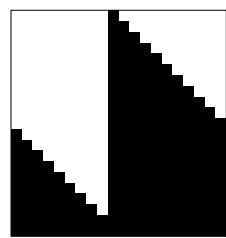
rule=249



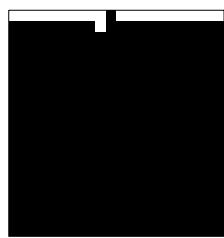
rule=250



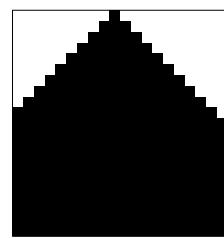
rule=251



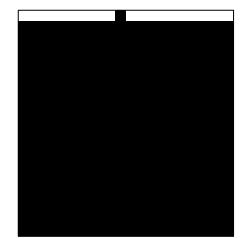
rule=252



rule=253



rule=254



rule=255