

## 〔特集〕交通流

# 交通流の物理

## Physics of Traffic Flow

\*名古屋大学大学院情報科学研究科 杉 山 雄 規<sup>†</sup>  
Yuki SUGIYAMA

### 1 はじめに

現代社会において道路交通システムは、産業・生活の重要な基盤である。しかし、道路につきものの渋滞現象は、輸送効率の低下・エネルギー消費・環境悪化など、様々な形で経済損失を与えており、その額はわが国だけで年間 12 兆円にのぼると言われている。渋滞の解消は交通システムの大きな課題だが、ではなぜ渋滞は発生するのか？特に興味があるのは、高速道路などで遭遇する“自然渋滞” (phantom jam) と呼ばれるもので、事故などの原因がないのにいつのまにか発生する渋滞である。この現象が第一原理から説明されるようになったのは、ごく最近のことである。

交通流の物理的研究は自動車普及し始めた 1950 年代に既に始まっていた。しかし、近年の物理学とコンピュータの発展に伴って 1990 年代に新たな局面を迎え、その後も多様な展開を見せている。本稿では、最近に至る交通流の物理的研究の成果と動向について概観したい。

### 2 交通流という現象

交通流は、物理学が対象とする“自然現象”と考えることができる。それを説明するために、まず交通流という現象を見よう。

図 1 は交通流の特性を示す基本的なもので、交通工学で基本図 (fundamental diagram) または

$Q$ - $k$  図と呼ばれ、交通流量  $Q$  と車両密度  $k$  との関係 (図では  $q$ - $\rho$ ) を表す。流量は高速道路の観測地点で単位時間あたり通過した車の台数で定義され、密度は単位長さあたりの車の台数である。図 1 は高速道路の 1 つの観測地点における 1 ヶ月分の集積データである。世界中の高速道路の様々な地点で、膨大な観測データによる同様の基本図が描かれている。図 1 はその典型例である。

基本図は 2 つの領域を示している。車両密度が小さい領域では、密度の増加にしたがって流量が増加している。これは車の流れがスムーズでほぼ一定の速度で走行していることを示しており、車の台数が増えてもその状態を維持できているので、流量が比例して増加しているのである。ところが流量がピークに達すると、それ以上に密度が大きくなっても流量は増加せず、逆に右下がりに減少している。またデータ点が広がっており複雑な挙動を暗示する。この密度領域では渋滞が発生していると理解される。(実際、渋滞の発生しない地点での基本図は、低密度領域の部分しか現れない。) 低密度領域部分を自由流、高密度領域を渋滞流と呼ぶ。このように交通流は密度によって異なる 2 種類の挙動を示す。この 2 つの流れは、ある密度 (臨界密度) で急激に移り変わる。しかもこの密度は、世界中のどの高速道路の基本図でも ~25 (1/km) で殆ど一致している。また、転移点付近では自由流部分のピークから渋滞流部分に移る間にギャップが認められ、この数値領域の不安定性を示唆し、オーバーシュートして渋滞流に

\*〒464-8601 名古屋市千種区不老町

<sup>†</sup>E-mail : genbey@eken.phys.nagoya-u.ac.jp

転移するという特徴を示している。

が充分可能な対象であることを意味している。

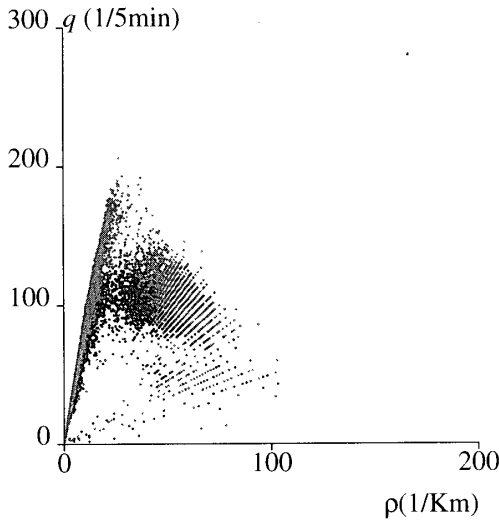


図1 交通流の基本図：東名高速道路の日本坂トンネル上流部 170.64kp 地点，1996 年 8 月のデータ

以上のような基本図から見た定性的・定量的な振る舞いは，かなりの普遍性を持っている．他にもこのような性質は数々ある<sup>注1)</sup>．交通流は，人間が意思を持って運転する車の集団の振る舞いで，これまで自然科学が扱ってきたような物質的対象ではない．また，道路の形状・車線数，運転者の個性・車両性能，各国の交通ルールなど，様々な違いがある．それにも拘わらず上記のような普遍性が観測されるのは，それらの相違には依らない交通流の基本特性が存在するからである．それは，モデルを設定し解析するという物理的研究

注1) 例えば，渋滞が伝播する速度だが，車の進行方向と逆向きに日本のデータで12～13km/h，ドイツのデータで12～15km/hと概ね一致している．巻頭写真参照．

### 3 交通流モデルのいろいろ

交通流の物理的研究は歴史が古く 1950 年代に遡る．そのモデルも様々であるが，大きく巨視的モデルと微視的モデルに分けられている．車の流れをどうという物質の流れになぞらえて考えるか，また物理量を連続量とするか離散的にするかで，更に分類される．(一覧表参照.)

“川の流れ”を調べるのに水分子の個々の運動から出発することが必ずしも必要ないように，“交通流”という対象を調べるのに必ずしも個々の車の運動を考えず，気体・流体の類推で考えるという立場があり得る．もちろん，個々の車の運動を基礎に考える立場も当然ある．しかし，多数からなる集団を解析するのは容易ではない．いずれの立場にしても，初期の研究では自由流と渋滞流の個別の運動学的 (kinematical) な性質を調べるにとどまり，現象論的研究の側面が強かった．

しかしコンピュータの発達によって，多数の構成分子の個々の運動を直接シミュレーションによって解析し，その総体として巨視的現象を導くことが可能となった．この観点に立って，交通流を「車両を構成分子とする多体相互作用系」と捉え，渋滞発生のような巨視的現象を集団運動による協同現象として動力的 (dynamical) に説明し，自由流と渋滞流を統一的に理解するという試みが 1990 年代に入って急速に発展した<sup>1)</sup>．

本稿では，4 節以降で追従モデルを中心に上記のような観点で，どのように交通流が理解されてきたかを述べたい．まずこの節では，最近 10 年間

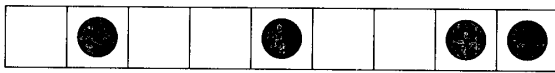
	車の集団	模 型	時間	空間	速度
巨視的模型 (macroscopic)	気 体	Kinetic Gas Theory	連続	連続	連続
	流 体	Fluid Dynamical Model			
微視的模型 (microscopic)	粉 体 (離 散)	Car Following Model (追従模型)	連続	連続	連続
		Coupled Map Lattice Model (結合写像模型)	離散		
		Cell Automaton Model		離散	離散

に一定の成功を納めた研究として CA 模型と流体模型を簡単に紹介する<sup>注2)</sup>。また、4 節への導入として追従模型について過去の研究を概観する<sup>2)</sup>。

### 3.1 セルオートマトン (CA) 模型

交通流の物理的研究が盛んになる契機を作ったのは、1992 年の Nagel-Schreckenberg (NS) による CA 模型であり<sup>4)</sup>、まずそれを簡単に紹介しよう。一般に CA 模型は、すべての物理量を離散量として単純化し、ダイナミックスを記述するためのルールを設定する。時間・空間など独立変数の離散化を差分化というが、従属変数まで離散化することを“超離散化”と呼んでいる。

図のように道路 (1 次元空間) をセルに区切り、時間発展をステップの更新とする。各セルには 1 つの車しか入れず、時間ステップの更新とともにセルを移動して行く。いわゆる“箱玉系”である。さらに速度も離散化し、 $v=0, 1, 2, 3, 4, 5 (=v_{\max})$  とする。NS 模型は、以下の 4 つルールによって与えられる。



- 1) if  $v > gap$  (前方の空のセル数)  $\rightarrow v := gap$  [減速過程]
- 2) if  $v < gap, v < v_{\max} \rightarrow v := v + 1$  [加速過程]
- 3) 1), 2) の結果により, if  $v > 0 \rightarrow$  確率  $p$  で  $v := v - 1$  [ランダム化]
- 4) 以上で決めた  $v$  の数だけ前方のセルに進む。

以上のルールを各車について適用する。要するに、前のセルが空いていれば前に進み、追い越すは許されず、前に車があれば減速し停止することになる。車の全台数が少なければ全体はスムーズに移動していくが、多くなると直前の車の後ろに付いて停止する事態が予想される。実際周期系でシミュレーションしてみると、臨界的な車の台数を境に渋滞と見なせる車の列が幾つか形成され

る。つまり、非常に簡単ながら渋滞発生を相転移現象として理解できるのである。

NS 模型の原型は、CA というものを考案した Wolfram によって与えられている。彼が作った 1 次元 CA の 2 状態 3 近傍の計  $2^3 = 256$  種類のルールの一つ、184CA 模型がそれである<sup>5)</sup>。車がセルを移るか否かのルールは同じだが、速度が 2 状態 (0 と 1 のみ) である。この場合はセルの排他律のみのルールで車は移動していくのだが、それでも渋滞の固まりは形成され後方に伝播して行く<sup>注3)</sup>。しかし、これだとあまりに単純化され過ぎていて現実的でないので、速度を 0~5 にしてステップ更新の際に車両挙動の揺らぎとしてのランダム化を導入したのが NS 模型である。この程度の変更でもまだかなり単純だが、現実の解析にも充分適応可能で、ヨーロッパを中心に基本模型として広く使われている。

CA のルールだけでは物理とは無関係に思えるだろう。しかし最近、ソリトン解を持つ非線型微分方程式に対応する、“箱玉ソリトン”を持つ CA 模型が超離散化によって構成され、非線型現象の解析的性質と CA のルールのような代数的性質との関係が注目されている。交通流の CA 模型もこういう枠組みでの理解が進んでおり、この方面の発展も興味深い<sup>6)</sup>。(5.2 節を参照。)

### 3.2 流体模型

1950 年代に Lighthill-Whitham による、 $Q-k$  関係を現象論的に導入した 1 次元流体 (Kinematical Wave) が最初の流体模型である<sup>7)</sup>。この模型をはじめとして、 $Q-k$  関係を前提とした流れの挙動を調べる多くの研究がなされた。武者-樋口による Burgers 方程式の適用もそのひとつである<sup>8)</sup>。この方程式は、1 次元流体の衝撃波を示す厳密解を持つことで知られている。渋滞の境界端 (キंक) の伝播を衝撃波と見なすという立場である。また Navier-Stokes 方程式を基礎に置く模型も考えられ

注2) 気体模型としては、Prigogine<sup>3)</sup> らの先駆的仕事がある。

注3) 日本でも、高安-高安模型や福井-石橋模型など 184CA に基礎を置く先駆的な模型が知られている。

た。これらの考え方は現在でも続いており、交通流の特徴を記述するために KW 模型や Navier-Stokes 方程式に様々な項を付け加えた放物型偏微分方程式の研究となっているが、逆流の発生など原理的な問題も議論されている。

Navier-Stokes 方程式を基礎に置く模型で渋滞の形成に成功した例は、Kerner-Konhäuser 模型が良く知られている<sup>9)</sup>。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V(\rho) - v}{\tau} - \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{l^2}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで定義される物理量は、 $\rho(x, t)$ : 車の密度分布関数、 $v(x, t)$ : 車の平均速度分布関数、 $V(\rho)$ : (車の密度で決まる) 速度関数、 $c_0, \tau, l$ : 定数である。この模型は交通流を 1 次元圧縮性流体 (compressible flow) と考え、臨界密度以上で形成される渋滞クラスタを数値的に示した。

流体力学的な研究については、本特集の佐宗氏の稿で解説されている。

### 3.3 追従模型

追従模型も歴史は古く 1950 年代に遡る。元々車は離散的存在なので、個々の車の運動方程式を基本に考えるのは自然である。1 列に連なって車が走行する状況の 1 次元模型を考える。模型構築の基本は、「運転者は直前方の車の挙動にตอบสนองして自分の車を制御する」というものであり、「追従」模型の所以である。問題はตอบสนองの仕方だが、その指針となったのは、前の車との「速度差」を感じて加速・減速を行う、というものだった。これは広く共通認識としてあったようで、そのまま定式化したのが、

$$\frac{d}{dt} v_n(t+T) = a \{v_{n+1}(t) - v_n(t)\} \quad (2)$$

という模型である<sup>10)</sup>。 $v_n$  は  $n$  番目の車の速度である。 $a$  は感応度 (sensitivity) と呼ばれ、速度差に対してどれくらい鋭敏にตอบสนองするかを与える。 $T$  はตอบสนองの時間遅れ (time lag) を意味している。

もし  $T=0$  とすると、この方程式は簡単に積分できて自明な結果しか得られない。 $T \neq 0$  はこの模型には本質的である。車の制御は人間が行うのだから反応が遅れる、というのは定性的にはもっともらしく聞こえる。遅れ付き微分方程式にしたことで、一挙に自由度が増え解析は難しくなった。ตอบสนองの遅れ  $T$  によって自由走行に不安定性が生じることは理解に難くない。しかし、それ以上の定性的理解には至らなかった<sup>注4)</sup>。

さらに  $a$  に対して  $v_n, \Delta x_n$  の依存性も導入された。ここで、 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$  は前方車間 (headway)、 $x_n$  は  $n$  番目の車の位置である。感応度は定数ではなく状況によって変化するということが、多くのパラメータを導入する口実となり、状況ごとにパラメータを切り替えて車両の運動に合わせるという作業が続けられ、複雑な模型が多数産み出された。そのような状況で、追従模型の研究は終息したとされた。

物理的観点から二つのことを指摘したい。一つは、(2) 式の型の方程式では基本的に車両密度 (もしくは車間距離) の要素が入らず、密度に依存した交通流の変化 (例えば渋滞発生) を記述することは難しい、ということである。実はもうひとつ、初期の頃 1960 年代に提案された模型がある<sup>11)</sup>。

$$\frac{d}{dt} x_n(t+T) = f(\Delta x_n(t)) \quad (3)$$

これは車間に応じて速度を決めるという思想の模型で、車間依存性が入っている。 $f$  は関数。但し、ここでも時間遅れ  $T$  がないと自明なので、遅れ付き方程式になっている。しかし、(2) 式は加速度を制御する方程式だが、(3) 式は速度を制御する方程式である。これが両者の根本的な違いである。この点の重要性は、60 年代に指摘されており「車両の運動は加速度の制御によるのであり、速度が直接制御されるのではない。」ということである。車とて個別の物体だから基本的には古典力学の運動方程式に従って運動状況の変化が支配される、というのがもう一つの点である。結局、交通流の挙動を記述し得る車両運動の基礎方程式

注4) 後続車になる程不安定になってカオス的になる。それが渋滞だ、という意見もある。しかし、それは大衝突事故になるのではないだろうか。

は、密度依存を反映して加速度を制御する方程式であるべきだ、というのが主張である。

そもそも従来の研究は、自由流や渋滞流を単一の基礎方程式から導き出す、というような考えは念頭になかったようである。「様々な巨視的現象を、構成分子に対する基礎方程式から多体系の協同現象として統一的に説明する」という物理的発想が交通流に適応されるには、90年代を待たねばならなかった。

#### 4 最適速度模型 (Optimal Velocity Model)

##### 4.1 基礎方程式

前節で紹介した追従模型の研究とは独立に1990年代半ばに、我々はOV模型を提案した<sup>12)</sup>。基本は、従来と同じ前方参照の1次元追従模型である。車の大きさは考えないで、運転手・車の性能もすべて同じとする。交通流を記述するために構成分子である車の運動が持つべき性質は、追従挙動と排除効果のみである。つまり、車は前方車間距離が詰まると減速する、という内容である。この思想に簡単な数学的表現を与えたのが、次の基礎方程式である。

$$\frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} = a \left\{ V(\Delta x_n(t)) - \frac{dx_n(t)}{dt} \right\} \quad (4)$$

車間によって運転を制御する情報としてOV関数 $V(\Delta x)$ というものを導入した。OV関数は、前方車間に応じた最適速度(安全速度)を与えるもので、運転者が個々に高速道路での交通規範として持っているとする。この速度と実際の速度を比較して加速度を制御する。最適速度(optimal velocity)は、車間が小さければ小さく取るべきで、車間が大きければ速度は大きくて構わない。しかし、実際は速度制限や車の性能のため、いくらでも大きいわけではないので最高速度が存在するであろう。よって、その関数形は単調増加関数で、車間無限大で最大速度 $v_{\max} = V(\Delta x_n \rightarrow \infty)$ に漸近する様な形である。また、車間が小さいときは衝突しないように徐々に加速するべきだろう<sup>注5)</sup>。これらの条件は、現実の運転の仕方を反映

した自然なものである。以上を満たす簡単な関数として、例えば $V(\Delta x) = \tanh(\Delta x - c) + \tanh c$ を選ぶことができる。 $c$ は定数である。

この模型の物理的位置付けは、排除効果(衝突回避)・相互作用の非対称性(追従挙動)・応答の非可逆性(散逸系)の性質より、「散逸的な非対称相互作用する排除的粒子流」といえる。OV模型は、この最小模型と考えられる。よって交通流に限らず、同様の基本的性格を持つと思われる他の対象にも広く適用可能であろう。

##### 4.2 一様流解と線型安定性

まず周期系で模型の性質を調べる。現実例えみると、サーキット上で追い越しなしで前の車に追従しながらぐるぐる回る状況である。後に4.5節で見るように、これで充分現実的であり本質は捉えられている<sup>注6)</sup>。

周期系の場合、サーキットの周囲の長さを $L$ 、全車両台数を $N$ として、一様流(homogeneous flow)解と呼ばれる自明な解が存在する。

$$x_n(t) = b \cdot n + V(b) \cdot t \quad (5)$$

ここで、 $b = L/N$ ：平均車両密度の逆数(平均車間)である。すべての車は一定の速さ $V(b)$ で等間隔 $b$ の車間で走行する。この解は、観測における自由流とみなすことができる。

一様流の解は車両密度 $1/b$ が小さいときは安定だが、ある値以上になると不安定になることが線型解析よりわかる。その条件は

$$V'(b) > \frac{a}{2} \quad (6)$$

であり(ここで、 $V'$ は導関数)、感応度 $a$ との関係で決まる。等号が成り立つとき臨界車両密度が

注5) それでも、非常に車間が詰まった状況から一斉に動き出せば、衝突は起こる。しかし、それは現実でも同じであろう。その場合は、初期条件として前方車両から順番に発進させれば、衝突は起こさず全体が流れ始める。衝突と渋滞は別ものである。

注6) 逆に、円形のサーキットで車を走らせて実験することもできる。実際、渋滞が発生するが、一定の緩和時間を経て発生する点が重要である。

与えられる。直感的には、車間が小さくなると反応良く前方の車との距離を保つことができなくなるのである。解析は、一様流解からの線型近似した微小揺らぎを車両の粗密波のモードで展開し、揺らぎが増幅していくモードの存在を調べる。その結果、最も長波長のモードから解を不安定にすることがわかる。これは物理的にはもっともだが、運転者が気づかないような長い周期の揺らぎで、いつのまにか全体の流れが不安定になってしまうことを意味している。

### 4.3 渋滞流解と極限閉軌道 (limit cycle)

では、一様流が不安定の場合には何が起こるのか？ 数値シミュレーションの結果が図2である。図2は、サーキット上のすべての車の位置の時間変化をプロットしたものである。渋滞が形成されていく典型的な様子を示している。初期条件として設定した一様流が崩れて渋滞クラスタ（濃い所）が形成され、緩和時間を経て安定化している。渋滞クラスタはどれも同じ速度で車両の進行方向とは逆向きに移動している。この図では、渋滞クラスタの個数は5個だが、同じ感応度  $a$  と平均車間  $b$  の設定でも初期条件の違いによって渋滞形成の様子は異なり、完成した渋滞クラスタの大きさや個数も様々である。しかし、これら渋滞クラスタは本質的に同一であることが、車間 (headway) と速度 (velocity) の相空間でシミュレーション

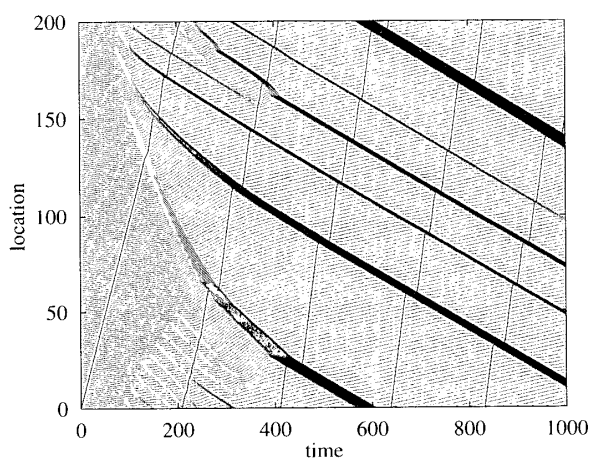


図2 渋滞発生の時空間プロット：縦軸がサーキット上の位置、横軸が時間経過。細い線は、ある1台の車の軌跡である。

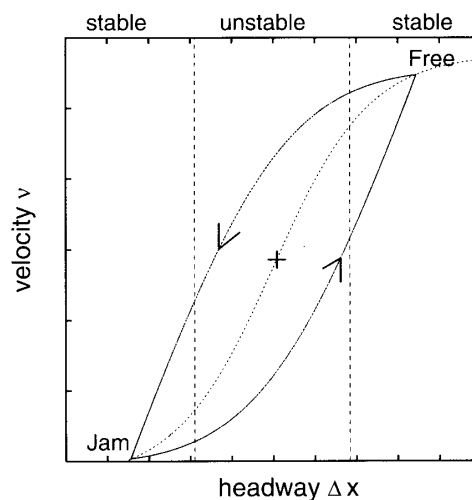


図3 渋滞流解の相空間プロット：背景の点線はOV関数。2本の破線の区間は、一様流解の不安定な車間領域。

データをプロットしてみると理解できる (図3)。

一様流の初期条件では、すべての車は相空間の1点 (図では真ん中) に集中しているが、時間経過とともに拡散していき、渋滞が形成され安定になると、図3のように一定の閉軌道 (limit cycle) 上をすべての車が矢印の向きに回る。この閉軌道の下側の頂点 Jam (速度・車間が小さい) は渋滞クラスタを示し、上の頂点 Free (速度・車間が大きい) がスムーズに走行している領域を示す。時空間プロット図からわかるように、殆どどの車は渋滞クラスタ内か走行領域に存在し、相空間では閉軌道の2つの頂点に位置している。

では、閉軌道を形作っている殆んどすべての部分は何かということ、車が走行領域から渋滞へ入り込む、もしくは渋滞から走行領域へ抜け出す、時空間的には極僅かな部分の運動を示している。車は一列に並んでおり順番に渋滞に入り暫くして渋滞から出る。つまり、ある一定の時間“遅れて”順次全く同一の運動を繰り返している。これはすべての渋滞クラスタで同じであり、1つのクラスタを車が通過する毎に閉軌道を一周する。それは

注7) あまりに密度が大きいとき、すなわち  $\Delta x_f(a) > b$  では、limit cycle で特徴付けられる渋滞はできない。しかし、この場合の一様流は非常に高密度・低速度  $V(b) \sim 0$  であり、現実的な自由流としての意味はない。

クラスタの大きさには依らない．2つの頂点に留まっている時間が違うだけである．渋滞クラスタの両端での車の出入りという微視的構成分子の非平衡的な運動のバランスが，巨視的な渋滞クラスタを安定に存在させていることが理解できる．

この時間遅れは，基礎方程式の渋滞流解として自然に導入 (induce) されたもので，この特徴的な時間スケールによって巨視的クラスタのすべての性質 (クラスタ内の車両密度，クラスタの移動速度など) が決定される．この閉軌道は同じ OV 関数・感応度  $a$  でシミュレーションすれば，サーキットや車の台数の設定 (つまり平均車間  $b$ ) や初期条件に依らず，渋滞が発生するならば同一のプロフィールを持った渋滞クラスタが現れる．この意味で渋滞は普遍的な性格を持っている．

以上の性質は，OV 関数を ( $\tanh$  関数の極限としての) step 関数  $V(\Delta x_n) = v_{\max} \cdot \theta(\Delta x_n - d)$  ;  $\theta(x) = 0 (x < 0)$ ,  $1 (x \geq 0)$  に選んだ模型では，渋滞流解が厳密に得られるため解析的に理解できる．結果のみを記す<sup>13)</sup>．

$$\begin{aligned} \text{特徴的な時間の遅れ } \tau: \quad a\tau &= 2(1 - e^{-a\tau}) \\ &\rightarrow a\tau = 1.59.. \end{aligned}$$

$$\text{走行領域の車間:} \quad \Delta x_F = d + v_{\max} \tau / 2$$

$$\text{渋滞内の車間:} \quad \Delta x_J = d - v_{\max} \tau / 2$$

$$\text{渋滞クラスタの移動速度:} \quad v_{\text{jam}} = -\Delta x_J / \tau$$

OV 関数が  $\tanh$  関数のときは， $d$  を変曲点として上の結果は良い近似で成り立つ．また，OV 関数の変曲点における傾きを任意に変えたとき， $1.59.. \leq a\tau \leq 2$  の範囲にあることがわかる．下限は step 関数 OV 模型の厳密解から，上限は 4.2 節の線型解析の結果から，いずれも解析的に決まる<sup>14)</sup>．

#### 4.4 渋滞転移の性質と相構造

OV 模型の相構造をまとめておく<sup>14)</sup>．相図は感応度 (sensitivity)  $a$  と平均車間 (mean headway)  $b$  とのパラメータ空間に描かれ，渋滞発生に関して図 4 のように 3 つの相に分けられる．

(i) は一様流解が安定で渋滞の発生しない領域．  
(iii) は一様流は不安定で渋滞流解のみが安定な領域である．(ii) の領域は，一様流解も渋滞流解も

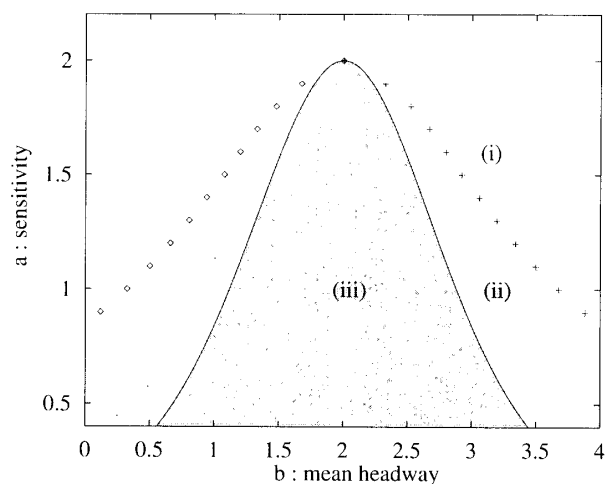


図 4 OV 模型の相図

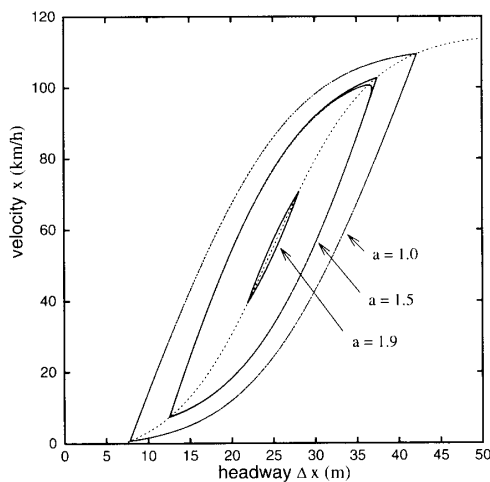
共に安定な領域で共存相という．どちらの解が実現するかは初期条件に依る．一様流の状態から徐々に車両密度が大きくなると状態はこの相に入り，ある程度持ち堪えるが僅かな擾乱で渋滞流に移行する．統計力学における 1 次相転移的な“過冷却”の状態が生ずる相である．この相の存在が，基本図 (2 節を参照) における自由流状態から渋滞流状態への転移点のピーク部分でオーバーシュートしている様子を説明する．

(ii) と (iii) を区分する実線は，線型解析で与えられる臨界線  $V'(b) = a/2$  である．(i) と (ii) を区分する点線は，limit cycle 解から与えられる渋滞クラスタ内の車間・走行領域の車間の  $a$  依存性と平均車間  $b$  との関係  $\Delta x_F(a) = b$ ,  $\Delta x_J(a) = b$  で与えられる<sup>注7)</sup>．

相図で頂点  $(a_c, b_c) = (2, 2)$  は特別な点で supercritical point という<sup>注8)</sup>． $a > a_c$  では全く渋滞は発生しない．この領域では，そもそも limit cycle 自体が存在しないからである．自明 (trivial) な解である一様流解のみが存在している． $a < a_c$  になると limit cycle が現れ (図 5 を参照)，はじめて両方の解が存在する．そして  $V'(b) > a/2$  を満たす時，limit cycle 解のみが安定化し，そのプロフィールを持つ渋滞が発生する．この過程は， $a$  を

注8) 但し，この数値自体には意味はない，簡単のため

$V(x) = \tanh(x - 2) + \tanh 2$  にしたからである．

図5 パラメータ  $a$  による limit cycle の変化

コントロールパラメータとすると、力学系における Hopf 分岐 (bifurcation) と理解される。但し、共存相を持つので単純なものではなく、 $b \neq b_c$  で  $a$  を小さくしていくと、まず trivial 解のみが存在し、次いで trivial 解と limit cycle 解が存在し、ともに安定で共存する。さらに  $a$  を小さくしていくと、trivial 解は不安定になり limit cycle 解のみが安定となる。これは、subcritical という分岐現象を含むことを意味し、共存相におけるもうひとつ別な不安定解の存在を予想させる。

#### 4.5 実測データとの比較

実測データと比較するために、OV 関数を現実のスケール次元を持った形にする。

$$V(\Delta x) = v_0 [\tanh m(\Delta x - d) - \tanh m(l_c - d)] \quad (7)$$

ここで、 $l_c$ : 車両の長さ、 $d$ : OV 関数の変曲点、 $m$ : 変曲点での傾き、 $v_0$ : 最大速度  $v_{\max} = v_0 [1 - \tanh m(l_c - d)]$  であり、現実には数値を設定する。

図6は、OV 模型の一様流解と渋滞流解から導出した  $Q$ - $k$  関係

$$Q = k \cdot V(1/k) : \text{一様流}$$

$$Q = \frac{V(\Delta x_F) - V(\Delta x_J)}{\Delta x_F - \Delta x_J} - |v_{\text{jam}}| \cdot k : \text{渋滞流}$$

を描いたもので、プロット点は平均車両密度  $k$  (平均車間  $b$  の逆数) ごとにシミュレーションを

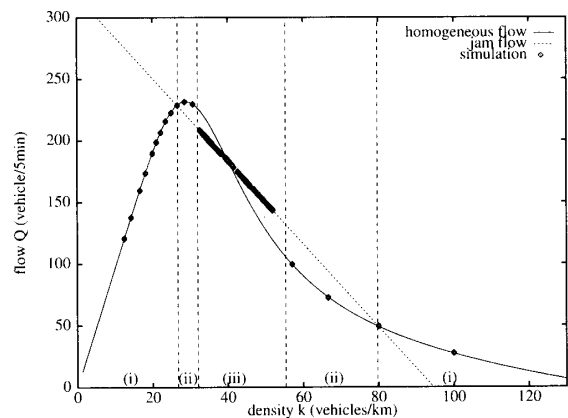


図6 OV模型の基本図

行い、緩和後の流量  $Q(k)$  を数値的に求めたものである<sup>注9)</sup>。一様流 (homogeneous flow) 解から渋滞流 (jam flow) 解へ転移していることがわかる。

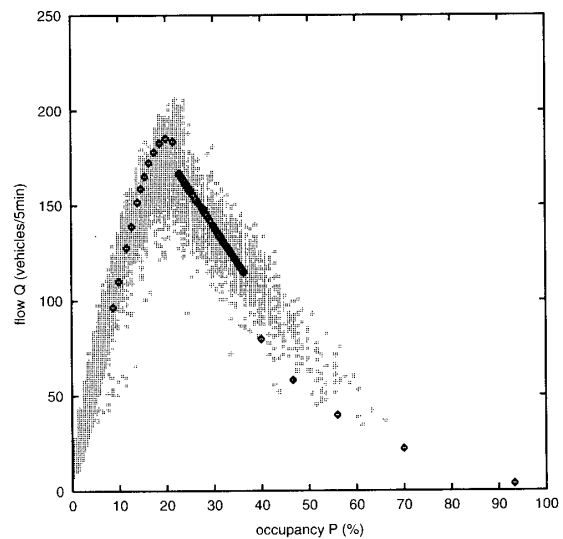


図7 実測の基本図との比較：シミュレーションの結果(プロット点)と実測データ(背景)を重ねたものである。

図7は、実測の基本図と比較したものである。シミュレーションデータは一車線周期系で充分緩和した状態での車両密度ごとの流量をプロットしたものであり、実測データは1ヶ月間の二車線高速道路上の定点観測による密度と流量の関係を集

注9) 初期条件は一様流にしたので、共存相(ii)では一様流が実現している。



積したものである。周期系のシミュレーションによる緩和後のデータを用いて、長時間統計平均の実測データと照合することは充分意味がある。基本図の定性的・定量的振る舞いや転移点の車両密度など非常に良く再現している<sup>注10)</sup>。

もうひとつ実測との比較を見る。図8は、車両が前方の車の運動にどう応答して追従していくかを見たものである。前方の先導車 (Lead Car) の運動をインプットとして、追従する車の運動は模型によって計算し、その結果と実際の車の追従挙動とを比較したものである。この実験はドイツの自動車メーカーである Bosch が行ったものであり、3節で紹介したものも含め幾つかの模型について同じ実験を行った結果、OV 模型が最も良く実際の挙動を再現したことを報告してくれた。

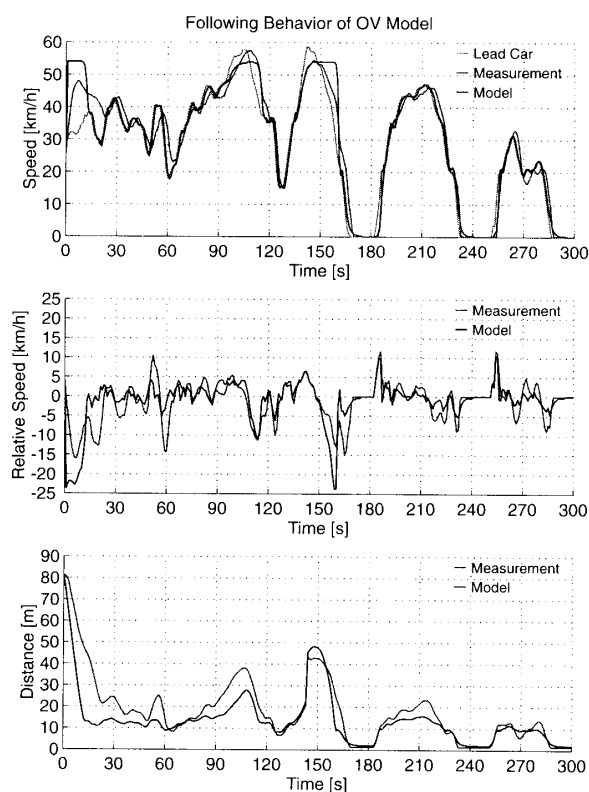


図8 追従挙動の実測との比較

## 5 OV 模型の周辺

### 5.1 時間遅れ付き OV 模型

厳密な渋滞流解を持つ step 関数 OV 模型は前節で触れたが、厳密解を持つもう一つのタイプの

OV 模型を紹介する。それは時間遅れ付きの1階微分方程式の OV 模型で、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}x_n(t+T) = \tanh(\Delta x_n(t)) \quad (8)$$

これは3.3節でみた(3)式の模型で関数  $f$  を  $\tanh$  型にしたものである。この模型は形式的には、左辺を  $T$  で展開して1次の項  $T \frac{d^2}{dt^2}x_n$  までを残すと OV 模型に他ならない。この型の模型は3.3節で述べたように以前から考えられており、1990年には一様流解の安定性の議論もされていた。しかし、 $\tanh$  関数を考えなかったためか、渋滞形成については議論されず、その厳密解は求められるべくもなかった<sup>注11)</sup>。

この模型は、時間遅れのパラメータが  $T_c = 1/2$  より大きくなると一様流解が不安定になり、渋滞クラスタが形成される。また、クラスタはすべて同じ速度  $v = 1/(2T)$  で後方に伝播していく。渋滞形成についての基本的振舞いは2階微分方程式の OV 模型と同様である。

周期系で解かれた渋滞流の厳密解は、楕円関数 (theta 関数<sup>15)</sup> や Jacobi 関数<sup>16)</sup>) で記述される。楕円関数は2重周期関数 (複素空間での周期性) であり、一つはサーキットの周期性だが、もう一つの周期性は、Jacobi の楕円関数の modulus と呼ばれる実数パラメータ  $k$  と関係付けられる。 $k=0$  で三角関数になり、 $k=1$  で双曲線関数になる。このパラメータは元々の基礎方程式ではなく、渋滞流解によって自然に導入され、渋滞クラスタ内の車間とサーキットの長さとの兼ね合いで、サーキット上に現れる事が許されるクラスタの大きさと個数を規定するものである。2階微分方程式の OV 模型では、渋滞クラスタの性格は決まっていたが、現われるクラスタの大きさと個数についての法則はわかっていない。この模型の解析より

注10) 長時間平均の基本図では、車線数の違いは重要ではない。追い越し・走行の各車線ごとの基本図はピークの高さが違う程度で本質的に同じである。二車線の効果はもっと短時間の非平衡現象に現れる。(5.3節参照)

注11) 定性的には  $\tanh$  型は本質ではなく、4.1節の条件を満たす関数ならば同じ動力学を示す。しかし、(8)式が厳密解を持つためには、 $\tanh$  型であることが重要である<sup>15)</sup>。

modulus が重要な役割を演じていることが示唆される。

Jacobi の楕円関数解を求める場合に、元の基礎方程式は次のような微差分方程式に帰着される<sup>16)</sup>。

$$v \frac{dG(u)/du}{1 \mp G(u)^2} = G(u + \frac{1}{2}) - G(u - \frac{1}{2}) \quad (9)$$

この方程式の (+) 型は、Ablowitz-Ladik 方程式と同じで<sup>注12)</sup>、ソリトン解を持つ可積分な非線型系で広く研究されている。さらに AL 方程式は Bäcklund 変換によって生態系の基礎方程式として良く知られた Lotka-Volterra 系と結びついていることも示唆的である。散逸系のクラスタ解がソリトン系と関係していることは非常に興味深い。

## 5.2 他の模型との関係

Kerner-Konhäuser 模型と OV 模型は、Nagel-Schreckenberg 模型と違って、渋滞転移付近での双安定な構造（一様流解と渋滞流解がともに安定な領域：共存相）を持っている。この点で動力学的に同じクラスに属すると思われる。両者の比較は、転移点付近での弱結合展開により導かれる非線型方程式（MKdV 方程式）により調べられている。（本特集の小松氏の稿を参照。）

また、1次元流体模型を記述する Burgers 方程式は旨く超離散化することができて、1つのサイトに複数個車が入ることができる 184CA 模型を拡張した模型（BCA 模型と呼ばれる。）になっており、衝撃波解に対応する CA でのキंक解を保持している。さらに、この模型を流体力学で云うところの Euler-Lagrange 変換することにより、区分線型 OV 模型（極限として step 関数 OV 模型）と関連づけることが調べられている<sup>17)</sup>。

## 5.3 開放系・ボトルネック・二車線交通流の物理現象

現実の道路は開放系であり、トンネル・オンラ

ンプ・サグなどのボトルネックが存在し、普通は二車線以上である。これらの付加的要因が加わると、周期系で見た基本的性格に更に興味ある現象が加わる。その一例として、ボトルネックのある開放系について紹介する。

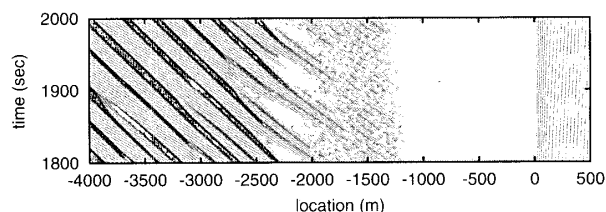


図9 トンネル上流の流れの時空間図：緩和後の安定状態を示す。0点から右向きに100mトンネルがある。

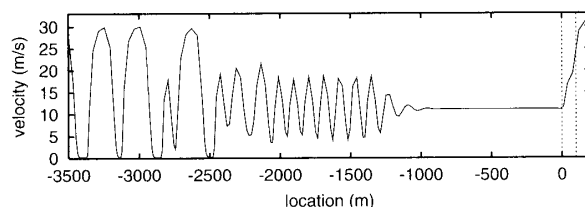


図10 トンネル上流部の車両の速度分布のスナップショット：点線の間がトンネル

図9はOV模型によるトンネル上流部の交通流のシミュレーション結果である。トンネル内では速度を落すと思われるので、最大速度を若干小さくしてOV関数全体をスケールダウンしている。この部分がボトルネックとなり流れが制限される<sup>注13)</sup>。そのため現実の高速道路に見られるように、トンネル上流部に渋滞が発生する。車は右へ流れておりトンネル上流部で発生した渋滞は後方へ伝播していく。この渋滞は、4節の周期系で得た渋滞と同じものである。図11(a)の相空間での limit cycle は4節の図3と同一である。

注目すべきは、渋滞はトンネル直前ではなく、ある程度離れた所から発生していることである。トンネルに入る直前は渋滞流ではなく、一様流（低速・高密度だが）になっている。その少し後方では小さい振幅を持つ振動的な流れが安定に存

注12) (+)型は $f(x) = \tan(x)$ の場合であり、(-)型が $f(x) = \tanh(x)$ の場合で(8)式の模型に対応する。

注13) しかし、緩和後の安定状態では図10に見るように、車はトンネルに入ってから速度を増していく。これは観測と一致している。

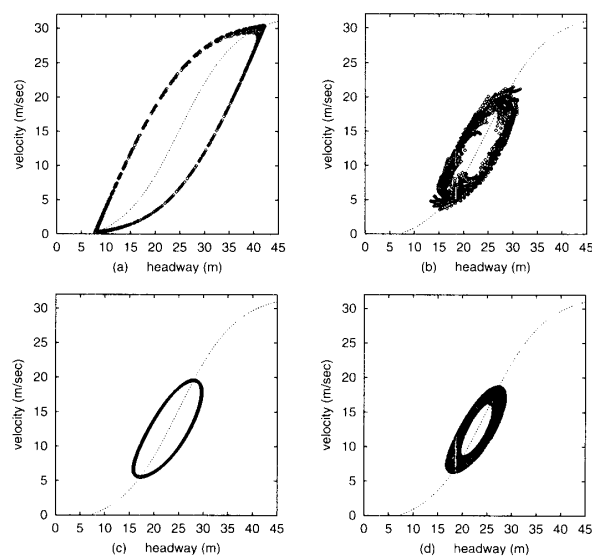


図11 トンネル上流部4地点の流れの相空間プロット：(a) -3500m, (b) -2300m, (c) -1500m, (d) -1200 m の各地点

在している（図10）。この現象は現実の高速道路でも観測されており、同期流（synchronized flow）<sup>18)</sup>と呼ばれる二車線道路における現象の一側面が現れている。ここでは小さい limit cycle が現れており（図11(c)）、周期系では不安定であった解が開放系ボトルネックという境界条件で安定化されるという“移流安定化”現象を示しており<sup>19,20)</sup>、非平衡物理現象としての交通流の面白さを見せている。

また、OV 模型を基礎に開発したシミュレータ（結合写像型 OV 模型）を使って、現実の道路状況での交通流の挙動を解析する研究も進められている<sup>21)</sup>。

#### 5.4 2次元化された OV 模型と粉体流・歩行者流・生物集団の運動

最後に、交通流と関連した研究について紹介しよう。そのひとつは、交通流模型は基本的に1次元系であったが、2次元の広がりの中で交通流のような非対称排除的相互作用によって運動する集団の巨視的様相を調べようというものである。その対象は、粉体流や歩行者・避難者流や生物集団の動き（バクテリア等の微生物集団から昆虫・魚・鳥の群れ）などである<sup>22)</sup>。

例えば、液体の入ったパイプ中を小さい金属球のような粒の集団が重力で落下して行くとき、車の渋滞と全く同様のクラスタが形成され、上方へ伝播していく様子を見ることができる。これは、2つの球が接近するとき液体を排除する反作用で減速する効果による協同現象であり、交通流の現象と原理的に同じである。実際、その模型として考えられた擬1次元模型はOV 模型と酷似している。粉体流については小松氏の稿に譲るとして、ここでは別の例を紹介しよう。

パイプ中の粉体流と類似の対象に、通路中の歩行者の流れがある。一方向に流れる場合は、基本的にパイプ中の粉体流と同じで、密度が大きくなると渋滞ができる。歩行者の特徴は、互いに対面する二方向の流れが共存可能な点にある。歩行者は反対方向から歩いてくる人を避けるように自分の運動を変える。それをすべての歩行者が相互に行なう。これが集団となったとき、歩行者の流れにはどのような巨視的様相が現れるだろうか？これも物理の問題とみなせる。

我々はOV 模型を2次元に拡張し、このシミュレーションを試みた<sup>20)</sup>。シミュレーションは周期系で行う。通路に沿った方向に一定の推進力を与え、一人ならばその方向に一定速度で進む粒子（歩行者）を  $N$  個用意し、半分ずつの人数を互いに反対方向に運動させる。粒子の個数を変えてシミュレーションを実行し、緩和した状態を見たのが図12である。結果は初期条件（半分ずつ両側

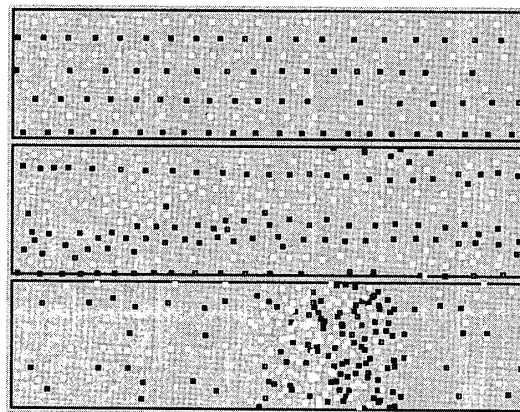


図12 対面歩行者流のシミュレーション：黒点が左へ動く歩行者，白点が右へ動く歩行者．上から  $N = 150, 200, 250$ 。

に分けた場合や、ランダムに混ぜた場合など）に依らない。

粒子の個数が少ないとき ( $N=150$ )、左右に移動する歩行者の流れは交互に幾つかのレーンを形成し、整然とそれぞれの方向に流れていく。この現象 (lane separation) は現実でも観察することができる。個数が増えると ( $N=200$ )、レーンがだんだん太くまとまって、流れは蛇行を始め不安定になってくる。そして、さらに個数が増えると ( $N=250$ )、ついには2つの流れが互いの進行を妨げ合って流れなくなる状態 (blocked state) になってしまう。粒子には大きさは持たせてないので、僅かな隙間をウネウネ動いて少しづつブロックの向こう側に逃れていくが、ブロックは安定に存在している。このような歩行者流の挙動も、非平衡系の相転移現象と理解できるだろう。

## 6 おわりに

交通流の物理的研究は1990年代に新たな局面を迎え、その後の数理解の進展と伴に関連する領域も拡大している。それは、近年世界各国で交通流の数理解の研究を主題とする国際会議が頻繁に開かれていることから頷ける。1995年に始まり2001年には名古屋で開催された「Traffic and Granular Flow」の国際会議<sup>23)</sup>でも、回を重ねるにつれて前節の例など様々なテーマが加わっている。これらの主題は、“Cooperative Transportation Dynamics”としての分野を形成しつつあり、従来の物理学では扱われなかった社会工学的対象から生物系にまで及ぶ対象を、数理的に研究する物理の分野として広がりつつある。興味のある方は以下のサイトをご覧ください。

交通流数理研究会 <http://wwwsoc.nii.ac.jp/mstf/>

また国際的交流の場として

<http://www.trafficforum.org> があり、オンラインジャーナルも運営されている。

## 引用文献

- 1) 以下のレビューがある。D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider: Phys. Rep. **329** 4-

- 6, 199, Statistical Physics of Vehicular Traffic and Some Related Systems (2000) 199-329 ; D. Helbing: Rev. Mod. Phys. **73**, 1067, Traffic and related self-driven many particle systems (2001) 1067-1141; 日本語の解説としては、長谷隆: 交通渋滞はなぜ起きるか, 科学, **66** (1996) 617; 只木進一, 菊池誠, 杉山雄規, 湯川諭: 交通流の科学, 日本物理学会誌, **55** (2000) 166-171; 応用数理 (日本応用数理学会誌) vol.**12**. No.2 特集:交通流の数理 (2002) 2-73.
- 2) 過去の模型についてのレビュー。湯川諭: 計算物理学における統計力学手法を用いた一次元交通流の研究, 物性研究 **65** (1995) 117.
- 3) I. Prigogine, F.C. Andrews: A Boltzmann-like approach for traffic flow, Ops. Res. **8** (1960) 789; I. Prigogine, R. Hermann: *Kinetic Theory of vehicular traffic* (Elsevier, New York, 1971).
- 4) K. Nagel and M. Schreckenberg: A cellular automaton model for freeway traffic, *J. Phys. I France* **2** (1992) 2221-2229.
- 5) S. Wolfram: *Theory and application of cellular automata* (World Scientific, Singapore, 1986).
- 6) 広田良吾, 高橋大輔: 差分と超離散 (共立出版, 2003).
- 7) M.J. Lighthill and G.B. Whitham: On kinematical waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads, Proc. R. Soc. London A **299** (1955) 317.
- 8) T. Musha and H. Highchi: Traffic current fluctuation and the Burgers equation, Jpn. J. Appl. Phys. **17** (1978) 811-816.
- 9) B. S. Kerner and P. Konhäuser: Cluster effect in initially homogeneous traffic flow, Phys. Rev. E **48** (1993) 2335-2338.
- 10) L.A. Pipes, A Operational analysis of traffic dynamics, J. Appl. Phys. **24** (1953) 274-281; C. Gazis, R. Herman and R.W. Rothery:

- Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow, *J. Opns. Res. Soc. Am.* **9** (1961) 545-566.
- 11) G.F. Newell: Nonlinear effects in the dynamics of car following, *J. Opns. Res. Soc. Am.* **9** (1961) 209-229.
  - 12) M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama: Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, *Phys. Rev. E* **51** (1995) 1035-1042 ; *Japan J. of Ind. and Appl. Math.*, **11** (1994) 203; with K. Nakanishi: Phenomenological study of dynamical model of traffic flow, *J. Phys. I France* **5** (1995) 1389-1399; Y. Sugiyama: Dynamical model of congestion of freeway traffic and its structural stability, *Traffic and Granular Flow* (Eds. D. E. Wolf, M. Schreckenberg, A. Bachem , World Scientific, 1996) 137-149.
  - 13) Y. Sugiyama. and H. Yamada: Simple and exactly solvable model for queue dynamics, *Phys. Rev. E* **55** (1997) 7749-7752 .
  - 14) Y. Sugiyama and H. Yamada: Aspects of Optimal Velocity Model, *Traffic and Granular Flow '97* (Eds. M. Schreckenberg, D. E. Wolf, Springer, 1998) 301-318 ; Optimal Velocity Model for Traffic Flow, *Comp. Phys. Comm.* (in CCP99 conference) **121-122** (2000) 399-401.
  - 15) Y. Igarashi, I. Itoh, K. Nakanishi: Toda lattice solutions of differential-difference equations for dissipative systems, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999) 791-796; with K. Ogura, K. Yokokawa: Quasisolitons in dissipative systems and exactly solvable lattice models, *Phys. Rev. Lett.* **88** (1999) 718-721.
  - 16) K. Hasebe, A. Nakayama, Y. Sugiyama: Exact solutions of differential equations with delay for dissipative systems, *Phys. Lett. A* **259** (1999) 135-139; Soliton solutions of exactly solvable dissipative systems, *Comp. Phys. Comm.* (in CCP2000 conference) **142** (2001) 259-262.
  - 17) K. Nishinari, D. Takahashi: Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 5439-5450; **33** (2000) 7709; K. Nishinari: A Lagrange representation of cellular automaton traffic-flow models, **34** (2001) 10727-10736; 西成活祐: 交通流のセルオートマトンモデルについて, *応用数理* vol.12. No.2 特集:交通流の数理 (2002) 26-37.
  - 18) M. Koshi, M. Iwasaki, I. Ohkura: In *Proc. of the 8th Inter. Sympo. on Transportation and Traffic Flow Theory*, ed. by V.F. Hurdle, E. Hauser, G.N. Stewart (University of Toronto, 1983) 403-426 ; B.S. Kerner, H. Rehborn: Experimental properties of phase transitions in traffic flow, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 4030-4033; The physics of traffic, *Physics World* (IOP Publishing Ltd) Vol. **12**, No. 8 (1999) 25-30; 車の流れの物理 (坂東昌子訳), *パリティ* Vol.**15** No.05 (2000) 20-30.
  - 19) N. Mitarai, H. Nakanishi: Spatiotemporal Structure of Traffic Flow with an Open Boundary, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 1766-1769; Convective instability and structure formation in traffic flow, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** (2000) 3752-3761.
  - 20) Y. Sugiyama, A. Nakayama: Modeling, Simulation and Observations for Freeway Traffic and Pedestrian, to appear in *the Proc. of Computational physics of transport and interface dynamics* (2003).
  - 21) S. Tadaki, M. Kikuchi, Y. Sugiyama, S. Yukawa: Coupled map traffic flow simulator based on optimal velocity functions, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 2270-2276; Noise induced congested traffic flow in coupled map optimal velocity model, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999)

- 3110-3114.
- 22) M. Schreckenberg and S.D. Sharma (Eds.), *Pedestrian and Evacuation Dynamics* (Springer, 2002).
- 23) M. Fukui, Y. Sugiyama, M. Schreckenberg, and D.E. Wolf (Eds.), *Traffic and Granular Flow '01* (Springer, 2003) to appear. (<http://traffic.eken.phys.nagoya-u.ac.jp/tgf01/>)