バーガーズ方程式の超離散化

富山県立大学電子・情報工学科　　　　　　　　　　　　指導教員：奥原浩之
1615033　沼田賢一

1 はじめに

1.1 背景

バーガーズ方程式では, 各変数が連続的な値をとることで解が複数出てきてしまう. そこで離散化をすることで変数は整数だけをとり, 解を一点に定めることができる. 超離散化法を簡単に述べると, 与えられた微分方程式を適当に差分化し, max-plus を代数構造とした方程式へ変換する極限操作のことである.

1.2 目的

今回の目的は, バーガーズ方程式から差分バーガーズ方程式, 超離散バーガーズ方程式へと式変形させていくことで最終的にはバーガーズセルオートマトンをつくることである.

2 バーガーズ方程式

不安定な現象を安定化させる数学上の工夫を拡散項の導入によってしているものをバーガーズ方程式という. 導出過程は以下のようになる.

$$f_t = fxx \tag{1}$$

$$u = (\log f)_x = \frac{f_x}{f} \tag{2}$$

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \tag{3}$$

バーガーズ方程式の解は, 拡散方程式の特解 $f = e^{kx+k^2t+c}$ と拡散方程式の線形性を用いてコールホップ変換に代入するとバーガーズ方程式の解が得られる. バーガーズ方程式の解は以下のようになる.

$$u = \frac{k_1 e^{k_{1x}+k_1^2t+c_1} + k_2 e^{k_{2x}+k_2^2t+c_2} + \cdots + k_N e^{k_{Nx}+k_N^2t+c_N}}{1 + e^{k_{1x}+k_1^2t+c_1} + e^{k_{2x}+k_2^2t+c_2} + \cdots + e^{k_{Nx}+k_N^2t+c_N}} \tag{4}$$

x:変数 t:時間 k:速度 N:段の数 c:任意定数

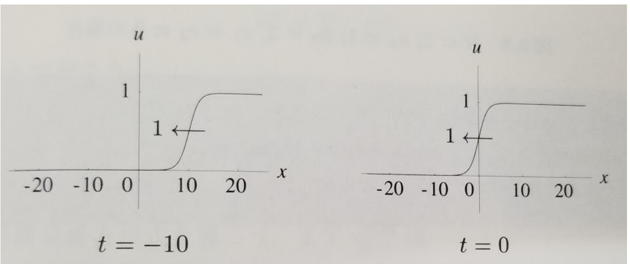

図 1 N=1,k_1=1,c_1=1 の場合の u のグラフ

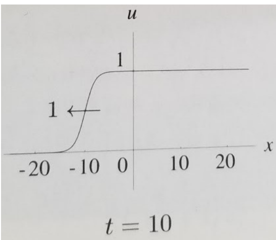

図 2 N=1,k_1=1,c_1=1 の場合の u のグラフ

3 差分バーガーズ方程式

時間と空間の間隔を Δt,Δx,$\Delta t/(\Delta x)^2 = 1/2$ とおいて拡散方程式とコールホップ変換の式を差分化させる.

$$f_j^{n+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^{n+1} + f_{j-1}^n) \tag{5}$$

$$v_j^n = \frac{f_{j+1}^n}{f_{j-1}^n} \tag{6}$$

$$v_j^{n+1} = v_j^n \frac{v_{j+1}^n + 1/v_j^n}{v_j^n + 1/v_{j-1}^n} \tag{7}$$

差分バーガーズ方程式の解は, 差分拡散方程式の特解 $f_j^n = e^{kj+\omega n+c}$ と差分方程式の解の重ね合わせによって得られる解をコールホップ変換すると差分方程式の解が得られる

$$v_j^n = \frac{1 + e^{k_1(j+1)+\omega_1 n+c_1} + e^{k_2(j+1)+\omega_2 n+c_2} + \cdots + e^{k_N(j+1)+\omega_N n+c_N}}{1 + e^{k_1 j+\omega_1 n+c_1} + e^{k_2 j+\omega_2 n+c_2} + \cdots + e^{k_N j+\omega_N n+c_N}} \tag{8}$$

j:変数 n:時間 k:速度 N:段の数 c:任意定数 $\omega = \log(\cosh k)$

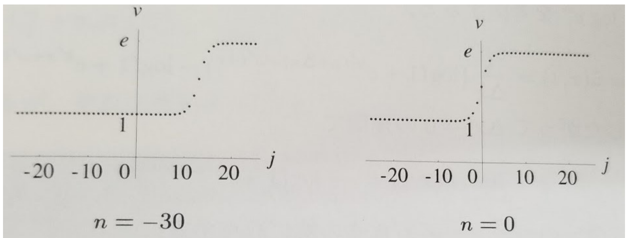

図 3 N=1,k_1=1,c_1=1 の場合の v のグラフ

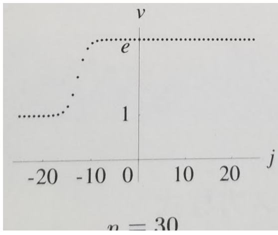

図 4 N=1,k_1=1,c_1=1 の場合の v のグラフ

4 超離散化

差分化で微分方程式の独立変数の離散化を行い, 超離散化で従属変数の離散化を行うことで, あらゆる変数の離散化が生ずる. このような究極的な離散化という意味合いから「離散化」に超をつけて超離散化と呼ばれる. いかが超離散化を表す公式である.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \cdots) = \max(A, B, \cdots)$$

4 超離散化バーガーズ方程式

まず差分バーガーズ方程式の導出過程で使った３式に,$f_j^n = 2^{-n} e^{F_{j+1}^n/\epsilon}$,$v_j^n =$ $e^{(U_j^n - L/2)/\epsilon}$ を用いて変数変換させ、ε →+0 へと極限をとる

$$F_j^{n+1} = \max(F_{j+1}, F_{j-1}) \tag{9}$$

$$U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \tag{10}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \min(U_{j-1}^n, L - U_j^n) - \min(U_j^n, L - U_{j+1}^n) \tag{11}$$

超離散バーガーズ方程式の解は, 超離散拡散方程式の特解 $F_j^n = K_j + |K|n + C$ を max 演算を用いて重ね合わせると超離散バーガーズ方程式の解が得られる.

$$U_j^n = \max(0, K_1(j+1) + |K_1|n + C_1 +, \cdots, K_N(j+1) + |K_N|n + C_N) - \max(0, K_1 j + |K_1|n + C_1 +, \cdots, K_N j + |K_N|n + C_N) + \frac{L}{2} \tag{12}$$

j:格子数 n:時間 N:段の数 L,K,C:任意定数

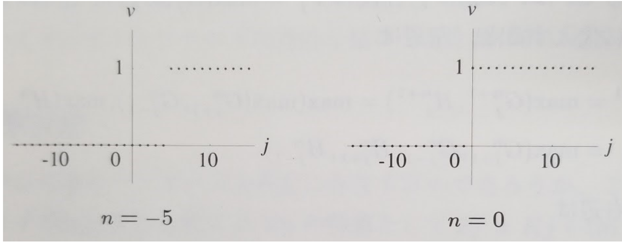

図 5 L=0,N=1,K_1=1,C_1=1 の場合の U のグラフ

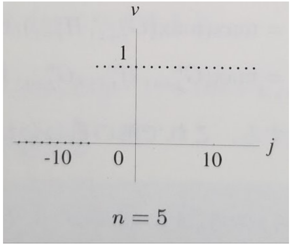

図 6 L=0,N=1,K_1=1,C_1=1 の場合の U のグラフ

5 バーガーズセルオートマトン

超離散バーガーズ方程式の初期値に制限を設けることでセルオートマトン (CA) になる. これをバーガーズセルオートマトン (BCA) と呼ぶ. また,L=1 のとき交通流の自然渋滞モデルであるルール 184 の基本セルオートマトン (ECA) となる.

$U^n_{j-1}U^n_jU^n_{j+1}$	111	110	101	100	011	010	001	000
U^{n+1}_j	1	0	1	1	1	0	0	0

図 7 L=1 で U の値を 0,1 に限定した CA のルール表

6 まとめ

バーガーズ方程式の導出ができた. バーガーズ方程式を差分化させて超離散化をすることで, 超離散バーガーズ方程式の導出ができた. また, 超離散バーガーズ方程式よりバーガーズセルオートマトンを導けた.

参考文献

[1] 広田良吾・高橋大輔, "差分と超離散（p153-167）"