6　代表的な確率分布関数

記法の簡略化のため，確率変数 $X(\omega)$ を X で表すこととする．さらに，Θ で母数空間 (Prameter space)，θ で母数の集合を表すこととする．

6　多変量分布

一般に，多次元の確率ベクトル $\mathbf{X}$ の同時確率分布を多変量分布 (Multivariate distribution) という．ここでは，代表的な離散型確率分布関数と連続型確率分布関数をそれぞれ 1 つずつ考える．

M1　多項分布　(Multinomial distribution)

M2　多変量正規分布　(Multivariate normal distribution)

6.1　多項分布 $[M(n, \mathbf{p})]$

母集団が k (≥ 2) 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ からなり，$p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, \cdots, k$ とする．そこで，大きさ n の標本を無作為復元抽出したときに，事象 A_i に含まれる標本の個数を X_i とする．この確率ベクトル $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_k]^{\mathrm{T}} \in \Re^k$ が従う分布を多項分布あるいは k 項分布という．

確率関数

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\mathbf{p}) = \binom{n}{\mathbf{x}} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}, \qquad (0 \leq x_i,\ \sum_{i=1}^{k} x_i = n)$$

ここで，$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \cdots, p_k]^{\mathrm{T}} \in \Re^k$，$\binom{n}{\mathbf{x}} = \dfrac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!}$ である．

$$\Theta = \{\theta = \mathbf{p} : 0 \leq p_i,\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1\}$$

平均・分散・確率母関数

$$\mathrm{E}[X_i] = np_i, \qquad \mathrm{V}[X] = np_i(1-p_i), \qquad G_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = (\mathbf{pt})^n.$$

$$\text{ここで,} \, \mathbf{t} = [t_1, t_2, \cdots, t_k]^{\mathrm{T}} \in \Re^k \text{である.}$$

その他 $k=2$ のときには二項分布 $[B(n,p)]$ となる.

6.2 多変量正規分布 $[N_k(\mathbf{m}, \Sigma)]$

確率ベクトル $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_k]^{\mathrm{T}} \in \Re^k$ の確率密度関数が以下のようになる分布を多変量（あるいは k 次元）正規分布という.

確率密度関数

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}, \qquad (-\infty < x_i < \infty)$$

$$\text{ここで,} \, \mathbf{m} = [m_1, m_2, \cdots, m_k]^{\mathrm{T}} \in \Re^k, \ \Sigma \in \Re^n \times \Re^k \text{である.}$$

$$\Theta = \{\theta = (\mathbf{m}, \Sigma) : -\infty < m_i < \infty\}$$

平均・分散・特性関数

$$\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{m}, \qquad \mathrm{V}[\mathbf{X}] = \Sigma, \qquad \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{t}}.$$

$$\text{ここで,} \, \mathbf{t} = [t_1, t_2, \cdots, t_k]^{\mathrm{T}} \in \Re^k \text{である.}$$

7 問題 6

6.1 (多項分布) 大学への通学途中の交差点に信号がある．その信号の周期は青，黄，赤がそれぞれ 40，10，60 秒で切り替わる．一週間に 4 日通学するものとして計 8 回その信号に出会う．その時，青である回数を X_1，赤である回数 X_2 として，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 X_1，X_2 の同時確率密度を求めよ．

(2) 青と赤の回数がちょうど半分の 4 回ずつとなる確率を求めよ．