3 いくつかの有用な関数

3 いくつかの有用な関数

3.1 積率母関数

$g(\mathbf{X}(\omega)) = e^{-\mathbf{tX}(\omega)}$ としたときの期待値

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}}\left[p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right] = \mathrm{E}\left[e^{-\mathbf{tX}(\omega)}\right] = \int_0^\infty e^{-\mathbf{tx}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty e^{-\mathbf{tx}} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

はラプラス・スチルチェス変換 (Laplace-Stieltjes transform) といわれる．積率母関数 (moment generating function: mgf) は $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ で表され，ラプラス・スチルチェス変換から

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathcal{L}_{-\mathbf{t}}\left[p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right] = \int_0^\infty e^{\mathbf{tx}} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

と定義される．

ここで，$\mathbf{X}(\omega)$ が $X(\omega)$ の場合を考え，もし，実数値関数 $F_X(x)$ が

$$F_X(x) = \int_0^x dF_X(t) = \int_0^x p_X(t) dt$$

ならば，

$$\mathcal{L}_t[p_X(x)] = \int_0^\infty e^{tx} dF_X(x) = \int_0^\infty e^{tx} p_X(x) dx$$

となり，これを $p_X(x)$ のラプラス変換 (Laplace transform) という．

積率母関数 $M_X(t)$ が $t = 0$ の近傍いたるところで存在すると仮定するなら，

$$\frac{d^n}{dt^n} M_X(t) = \int_0^\infty x^n e^{-tx} dF_X(x) = \mathrm{E}\left[X(\omega)^n e^{-tX(\omega)}\right]$$

が得られる．さらに，$t = 0$ とおくことにより

$$\mathrm{E}\left[X(\omega)^n\right] = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}$$

となり，原点周りの n 次モーメントを求めることができる．

3.2 特性関数

関数 $f(\mathbf{x})$ のフーリエ変換 (Fourier transform) は

$$\mathcal{F}_{\mathbf{t}}\left[f(\mathbf{x})\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{t}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \qquad (i^2 = -1)$$

で定義される．特性関数 (characteristic function: cf) は期待値 $\mathrm{E}\left[g(X(\omega))\right]$ において $g(\mathbf{X}(\omega)) = e^{i\mathbf{t}\mathbf{X}(\omega)}$ としたものであり，確率密度関数 $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ のフーリエ変換そのもの

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathrm{E}\left[e^{i\mathbf{t}\mathbf{X}(\omega)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{t}\mathbf{x}} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathcal{F}_{\mathbf{t}}\left[p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right]$$

で定義される．

ここで，$\mathbf{X}(\omega)$ が $X(\omega)$ の場合を考え，

$$e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!}$$

であることから，特性関数 $\phi_X(t)$ は

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_X(x)$$

とも表せる．そこで，特性関数の n 回微分を行い，$t=0$ とおくことにより

$$\mathrm{E}\left[X(\omega)^n\right] = i^{-n} \frac{d^n}{dt^n} \phi_X(t)|_{t=0}$$

となり，原点周りの n 次モーメントを求めることができる．

積率母関数は必ず存在するとは限らないのに対し，特性関数は常に存在する．特性関数は確率密度関数と 1 対 1 に対応する．このことは

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} p_Y(y) dy\right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) dt$$

$$\triangleq \mathcal{F}_{\mathbf{X}}^{-1}\left[\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\right]$$

から示される．$\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ はフーリエ逆変換といわれる．

$$\text{確率密度関数} \quad p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_{\mathbf{X}}^{-1}\left[\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\right] \underset{\text{逆変換}}{\overset{\text{フーリエ変換}}{\rightleftarrows}} \text{特性関数} \quad \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathcal{F}_{\mathbf{t}}\left[p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right]$$

3.3　確率母関数

$X(\omega)$ が離散であるとき，$g(X(\omega)) = t^{X(\omega)}$ としたときの期待値

$$G_X(t) = \mathrm{E}\left[t^{X(\omega)}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} t^x p_X(x), \qquad (|t| \leq 1)$$

は確率母関数 (probability generating function: pgf) といわれる．

ここで，確率母関数 $G_X(t)$ を n 階微分すると

$$\frac{d^n}{dt^n} G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\cdots(x-n+1)t^{x-n} p_X(x)$$

が得られる．さらに，$t=1$ とおくことにより

$$\mathrm{E}\left[X(\omega)(X(\omega)-1)\cdots(X(\omega)-n+1)\right] = \mathrm{E}\left[X(\omega)^{(n)}\right] = \frac{d^n}{dt^n} G_X(t)|_{t=1}$$

となり，n 次階乗モーメント (factorial moment) を求めることができる．

次の分散公式も有用である．

$$\mathrm{V}\left[X(\omega)\right] = \mathrm{E}\left[X(\omega)(X(\omega)-1)\right] + \mathrm{E}\left[X(\omega)\right] - \mathrm{E}\left[X(\omega)\right]^2$$

4　問題 3

3.1　a, b, c, d を定数とするとき，次の式が成り立つことを示せ．

(1)　$\mathrm{E}\left[aX(\omega)+b\right] = a\mathrm{E}\left[X(\omega)\right] + b$

(2)　$\mathrm{V}\left[aX(\omega)+b\right] = a^2\mathrm{V}\left[X(\omega)\right]$

(3)　$\mathrm{C}\left[aX(\omega)+b, cY(\omega)+d\right] = ac\mathrm{C}\left[X(\omega), Y(\omega)\right]$

(4)　$\rho\left[aX(\omega)+b, cY(\omega)+d\right] = \rho\left[X(\omega), Y(\omega)\right]$　ただし，$ac > 0$ とする

3.2　連続確率変数 X の確率密度関数が $p_X(x) = cxe^{-x}$ $(x > 0)$, $p_X(x) = 0$ $(x \leq 0)$ で与えられる．

(1)　定数 c を決定せよ．

(2)　平均 $\mathrm{E}\left[X(\omega)\right]$，分散 $\mathrm{V}\left[X(\omega)\right]$，歪度 κ，尖度 φ を求めよ．

つぎに，X，Y の同時確率密度関数が $p_{XY}(x,y) = y^2 e^{-xy}/2 \quad (0 < x < \infty\ ,\ 0 < y < \infty)$ で与えられるとき，$p_{X|Y}(x|y)$ および $\mathrm{E}\left[X(\omega)|Y(\omega)=y\right]$ を求めよ．

3.3 離散 2 変量確率分布の確率関数 $p_{XY}(x,y)$ は表 2.1 のように与えられる．

(1) 周辺確率分布関数 $p_X(x)$ $(x = -1,0,1)$, $p_Y(y)$ $(y = -1,0,1)$ を求めよ.

(2) $Y(\omega)=0$ が与えられたときの条件付確率関数 $\mathrm{E}\left[X(\omega)|Y(\omega)=0\right]$ を求めよ.

(3) $\mathrm{C}\left[X(\omega),Y(\omega)\right]$ および $\rho\left[X(\omega),Y(\omega)\right]$ を計算せよ.

(4) $\mathrm{E}\left[X(\omega)\right]$, $\mathrm{E}\left[Y(\omega)\right]$, $\mathrm{V}\left[X(\omega)\right]$, $\mathrm{V}\left[Y(\omega)\right]$ を計算せよ.

(5) $X(\omega)$ と $Y(\omega)$ は独立であるかを述べよ．

表 3.1 離散 2 変量確率分布

$X(\omega) \setminus Y(\omega)$	-1	0	1
-1	$1/6$	$1/6$	$1/6$
0	0	$1/6$	0
1	$1/6$	0	$1/6$

3.4 二つのつぼ A，B に 3 個のボールを投げ入れる．つぼ A の中に入ったボールの数を確率変数 X，ボールが入ったつぼの数を確率変数 Y で表す．このとき，確率変数 X, Y は無相関であるかどうか，また，独立かどうかを調べよ．

3.5 (ポートフォリオ) 二つの株がありその株価を確率変数 $X_1(\omega)$，$X_2(\omega)$ とする．いま，$\mathrm{E}\left[X_1(\omega)\right]=m_1$，$\mathrm{V}\left[X_1(\omega)\right]=\sigma_1^2$，$\mathrm{E}\left[X_2(\omega)\right]=m_2$，$\mathrm{V}\left[X_2(\omega)\right]=\sigma_2^2$，$\rho\left[X_1(\omega),X_2(\omega)\right]=\rho$ とする．$0 \le p \le 1$ を用いて株への投資を

$$X(\omega) = p\ X_1(\omega) + (1-p)\ X_2(\omega)$$

で定義する．

(1) $\mathrm{E}\left[X(\omega)\right]$, $\mathrm{V}\left[X(\omega)\right]$ を求めよ．

(2) $\mathrm{E}\left[X(\omega)\right]$ を最大，また，$\mathrm{V}\left[X(\omega)\right]$ を最小とする配分 p をそれぞれ求めよ．

(3) $m_1 = 0.198,\ \sigma_1 = 0.357,\ m_2 = 0.055,\ \sigma_2 = 0.203,\ \rho = 0.18$ のとき，$\mathrm{E}\left[X(\omega)\right]$, $\mathrm{V}\left[X(\omega)\right]$ を p の関数として図示せよ．