1　品質管理のあらまし・数学の準備

1　品質管理とは

品質管理は,「買い手の要求に合った品質の品物またはサービスを経済的に作り出すための手段の体系」（日本工業規格 Japanese Industrial Standard: JIS) と定められている．

品質とは，製品の基本的な機能，および時間経過に対するその耐久性，信頼性に関するものであるとされる．通常，質や量，コストなどを意味する．また，品質の維持や向上を達成するための活動のことを管理といい，設計 (plan)→ 製造 (do)→ 検査 (check)→ 処置 (action) の繰り返しにより行われる．

plan　消費者の要求に合致する製品を作るための設計・計画

do　設計・計画に基づいて製造を行う．

check　製品を試験あるいは消費者の評価をチェックする．

action　問題点を解決するべく働きかけを行う．

デミング (W. E. Deming) は品質管理を「品質を重視する観念」と「品質に対する責任感」という地面の上を転がる車輪になぞらえた（デミング・サークル：図 1.1 参照）．

1.1　品質管理の業務

品質職能には，品質検査 (Quality Inspection)，品質管理 (Quality Control) と品質保証 (Quality Assurance) がある．主な業務は以下のようになっている．

品質検査　購入検査，工程検査，出荷検査，測定器検査

品質管理　経済性調査，工程能力調査，過去のデータ解析，工場実験，教育訓練

品質保証　品質苦情処理，市場品質調査，品質監査，検査業務監査

広義の品質管理（品質職能）に含まれるこれらの業務は，互いに関係し合っている．これに対し，コストの切り下げや不良品防止のための解析と管理を行う業務（品質管理）を他の品質検査や品質保証と区別して狭義の品質管理という．

1.2　品質管理の変遷

大量生産を背景として，企業が製造したものをとにかく売る（プロダクト・アウト）といった意識から，消費者の多様な要求に対応した製品を市場に出す（マーケット・イン）という意識への変遷．

アメリカにおいては，1920 年代から統計的品質管理 (Statistical Quality Control: SQC) が普及し始め，1940 年代に全盛期を迎えたといわれている．

日本においては，1950 年代に統計的品質管理が導入され，1960 年代には総合的品質管理 (Total Quality Control: TQC) または全社的品質管理 (Company Wide Quality Control: CWQC) へ変革していった．

1.3　品質管理の根幹

生産活動における管理技術は，品質を本来の質的なものから量的なものへ置き換えることから出発した．そして，品質を計量値もしくは計数値でとらえることで統計的に管理することが可能となった．品質管理の根幹となる主な 3 つの手法と目的を示す．

実験計画法	工程の改善	(R. A. Fisher, 1923)
管理図法	工程の安定化	(W. A. Shewhart, 1924)
抜取検査法	製品の検査	(H. F. Dodge, H. G. Roming, 1928)

2　数学の基礎的な事項

この節では，以後の品質管理の理解に際し必要となる数学の基礎的な事項をまとめている．ここにまとめているのは必要最低限の事項であるので，より広くかつ詳細に本書を理解するためには確率論や数理統計学等の文献を参照するのが望ましい．

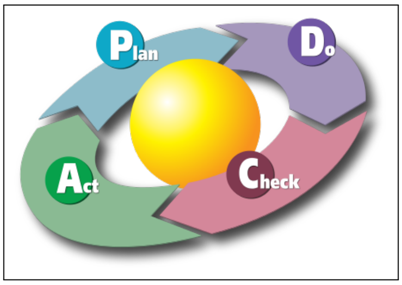

図 1: デミング・サークルの図

2.1 組合せ

n から遡り 1 までの積を求めることを n の階乗 (factorial function) といい $n!$ で表す．

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

n の階乗に関する公式としてスターリンの公式 (Stirling's formula)

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{r(n)}{12n}}$$

が知られている．ここで，$r(n)$ は

$$1 - \frac{1}{12n-1} < r(n) < 1$$

を満たしているとする．このとき，n が十分大きいなら

$$\lim_{n\to\infty} n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

とできることがわかる．

いま，異なる n 個の要素から x, $(0 \le x \le n)$ 個取り出して並べるのに，同じ要素の繰り返しを認めるときの可能な順列 (permutation) について考える．このような順列の総数は

$$n^x$$

であるが，繰り返しを認めないときの可能な順列は

$$n^{[x]} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)$$

である．

次に異なる n 個のものから x, $(0 \le x \le n)$ 個取り出してできる組合せ (combination) について考える．このような組合せの総数は

$$\binom{n}{x} = {}_nC_x = \begin{cases} \dfrac{n^{[x]}}{x!} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}, & (x = 1, 2, \cdots, n) \\ 1, & (x = 0) \end{cases}$$

で求めることができる．ここで，n，x は正の整数であるが，より一般的に n が任意の実数の場合も含めて，この値を二項係数 (binominal coefficient) ともいう．ここで，

$$0! = 1, \qquad n^{[0]} = 1, \qquad \binom{n}{x} = 0 \quad (x > n), \qquad \binom{n}{x} = 0 \quad (x < 0).$$

と定義される．また，n が十分大きいなら

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} = \frac{(n-x)^x}{x!}$$

が導かれる．さらに，指数が

$$e^{-x} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

で与えられることがわかる．よって，三角関数の展開は

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdots$$

あるいは，

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!}, \qquad (i^2 = -1)$$

となる．また，正弦波 e^{tx} の n 回微分は以下のようになる．

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{tx} = t^n e^{tx}$$

二項係数を用いると二項定理 (binominal theorem)

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

が得られる．さらに，負の二項係数 (negative binominal coefficient) を

$$\binom{-n}{x} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-x+1)}{x!}$$

で定義すれば，

$$\binom{-n}{x} = (-1)^x \frac{(n+x-1)(n+x-2)\cdots n}{x!} = (-1)^x \binom{n-1+x}{x}$$

$$= (-1)^x \binom{n-1+x}{n-1}$$

であることから，負の二項定理 (negative binominal theorem)

$$(1-a)^{-n} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-n}{x} (-a)^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{n+x-1}{n-1} a^x, \qquad (|a| < 1)$$

を得る．ここで，$n = 1$ とすれば

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{x=0}^{\infty} a^x = 1 + a + a^2 + \cdots$$

であることがわかる．さらに，負の二項定理において $a = 1-p$，$n = 1$ とすることにより，次の幾何級数の公式を得る．

$$\sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

二項定理をさらに拡張した多項定理は

$$(a+b+c+\cdots)^n = \sum \frac{n!}{p!q!r!\cdots} a^p b^q c^r \cdots,$$

$$(p+q+r+\cdots = n;\ p, q, r, \cdots \geq 0)$$

となる．

2.2 いくつかの有用な関係式

指数の不定積分は，よく知られるように以下のようになる．

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

また，次の不定積分を部分積分を用いて考える．

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -e^{-x}(1+x)$$

これら 2 つの不定積分は，次の不定積分

$$\int x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -x^{\alpha-1} e^{-x} + (\alpha-1) \int x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

において，$\alpha = 1$ あるいは $\alpha = 2$ としたものに等価である．

ところで，ガンマ関数 (gamma function) は

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \qquad (\alpha > 0)$$

と定義されるため，

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

となることがわかる．これより，α が正整数であるならば，

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha(\alpha - 1)\cdots 2 \cdot \Gamma(1) = \alpha!$$

が得られる．ただし，$\Gamma(1) = 0! = 1$ である．また，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が知られている．

さらに，ベータ関数 (beta function) として

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \qquad (0 < \alpha, \beta < \infty)$$

を定義する．ベータ関数はガンマ関数と

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

のような関係があることが知られている．

3 問題 1

特に断らない限り，コイン，サイコロは偏りがないものとする．1 組のトランプは 52 枚とする (ジョーカーを除く)．そして，トランプはランダムに並べてあるとする．

1.1 偏りのないコインを 4 回投げる．次の組合せの数を計算せよ．

(1) 少なくとも 3 回は表の出る組合せ．

(2) ちょうど 3 回表の出る組合せ．

(3) 3 回以上表が続いて出る組合せ．

(4) ちょうど 3 回表が続いて出る組合せ．

1.2 ポーカーにおいて次の組合せの数を求めよ．

(1)　ストレート・フラッシュ(Ace を 1 として，5 枚のカードが同じ組札で番号順に並ぶ (例として同じ組札の Ace，2，3，4，5)).

(2)　フォー・カード (同じ数の 4 つの組札).

(3)　フル・ハウス (ワン・ペアとトリプル (例として Ace，Ace，2，2，2)).

(4)　フラッシュ(5 枚のカードが同じ組札，ただしストレート・フラッシュは除く).

(5)　ストレート (5 枚のカードが番号順，ただし，同じ組札でない).

(6)　ロイヤル・フラッシュ(同じ組札で Ace，10，Jack，Queen，King).

1.3　次の恒等式を証明せよ.

(1) $$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

(ヒント： $(1+x)^n$ を二項展開し，x について 0 から 1 まで積分せよ)

(2) $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}$$

(ヒント： $(1+x)^n$ を二項展開し，x について -1 から 0 まで積分せよ)

(3) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

(ヒント： $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ の展開項を比較せよ)

(4) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

(ヒント： $(1+x)^n\left(1+x^{-1}\right)^n=x^{-n}(1+x)^{2n}$ の展開項を比較せよ)

1.4　以下の問いに答えよ.

(1)　$\left(2x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^8$ の展開式における x^7 の係数.

(2)　$(x-2y+z)^6$ の展開式における x^2y^3z の係数.

(3)　$(x^2-2y+3)^4$ の展開式における x^5 の係数.

1.5　$B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を計算することにより，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ を示せ.

(ヒント： $x=\sin^2\theta$ とおいて置換積分を用いよ)