

PERT/MANPOWER 問題の最適解法の開発研究

—カットネットワークにおける最適資源配分問題への変換を用いた新しい解法—

Study on Development of Algorithm for Obtaining Optimal Solution of PERT/MANPOWER Problem

春名 攻*, 滑川 達**

Mamoru HARUNA* and Susumu NAMERIKAWA**

1. はじめに

これまで、工事用資源の量的制約のもとでの最小工期スケジューリング問題である PERT/MANPOWER 問題の最適解法は存在せず、山崩し法や山均し法¹⁾などによる近似解しか求められないといわれてきた^{2) 3) 4)}。本研究では、この問題に対して次のようにアプローチして、最適解を求める方法を開発した。すなわち、ここでは、まず PERT/MANPOWER 問題を最適化モデルとして定式化するとともに、これを後述するカットネットワーク上での最適資源配分問題へ変換することにより、DP や 0-1 計画法を適用した最適解法の開発を行った。

2. PERT/MANPOWER 問題の定式化

ここでは、PERT/MANPOWER 問題を最適化モデルとして定式化していくこととするが、ここで取り扱うのは、プロジェクトに含まれている作業間にあらかじめ順序関係が定められている一般的なネットワークが与えられているような問題である。

いま、ダミーを除く工程ネットワークに含まれる実作業の数を m とすれば、作業の実施状態が変化する時刻は、作業間順序関係からみて資源制約からみても「開始可能」

になった時刻にすぐさま作業を開始するものと仮定することにより（問題の目的を「工期最小」とした場合、この過程には何ら矛盾は生じない）、最大で $(m+1)$ 個存在することになる。すなわち、ここでは、工程を通して資源制約に一定値を仮定しているので、1つの作業に対して1つの終了時刻が対応することがわかる。したがって、終了時刻の数は最大で m 個となるが、最初の作業の開始時刻の値が1つあるので、結局のところ最大で $(m+1)$ の値（時刻）が求められることになる。そして、これらの時刻で表現され、スケジュール作成上必要となる時間区間の数は最大で m 個となることがわかる。つぎに、この時間区間を I_k

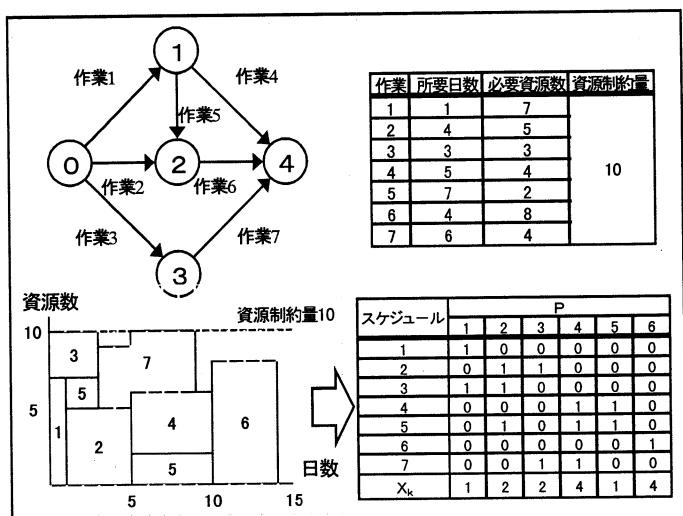


図-1 スケジュールのマトリックス化

とすれば、作業 i が区間 I_k で実施されていることを表す変数として $a_{ik} = 1$ 、そうでないときは $a_{ik} = 0$ と表すと、各時間区間ににおいて同時刻に実施されている作業の組合せが、これらの変数の組合せとして求められる。このような作業の組

キーワード：計画手法論、施行計画・管理

* 正会員、工博 立命館大学理工学部環境システム工学科教授

(〒525-8577 滋賀県草津市野路東1-1-1 TEL 077-561-2736, FAX 077-561-2667)

** 学生員、工修 立命館大学大学院理工学研究科総合理工学専攻（同上）

合せをパターンと定義すると、このパターン P_k は、図-1に示したような列ベクトルとして表すことができ、工程全体の実施パターンはこの列ベクトルの m 個の合成となるので、結果として $m \times m$ のマトリックスとして求めることができることになる²⁾。また、各区間 I_k の長さ、すなわち各区間の作業時間を x_k で表すと、これらの a_{ik} 、 x_k 、および作業の所用時間 d_i の間に、

$$\sum_k a_{ik} x_k = d_i \quad \text{for all } i \quad (2.1)$$

$$a_{ik} \in \{0,1\}$$

$$x_k \geq 0$$

のような関係が成立する。もちろん、各パターンが使用する資源量に関する制約条件

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} w_{il} \leq W_l \quad \text{for all } k, l \quad (2.2)$$

w_{il} : 作業 i が必要とする種類 l の資源量

W_l : 種類 l の資源量制約量

を満たしていなければならぬことは明らかである。さらに、ここでは一般的なネットワークを検討の対象としているため、求められるパターンは、以下のようなネットワーク構造の拘束条件を満たす同時作業可能な組合せでなければならない。すなわち、直接的にも間接的にも先行・後続関係をもつ作業群を同時に実施させることは不可能であるため、同時間区間の作業の実施に際しては、以下のようないくつかの条件を満たす必要がある。

$$\begin{aligned} &\text{if } a_{ik} = 1 \cap a_{i'k} = 1 \\ &\text{then } R_{ii'} = 0 \cap R_{i'i} = 0 \quad \text{for all } k \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで、 $R_{ii'}$ は工程ネットワークの可達行列の構成要素を表している。そして、完了時刻 λ は次式のように表すことができる。

$$\lambda = \sum_{k=1}^N x_k \quad (2.4)$$

以上のことから、PERT/MANPOWER 問題の最適化モデルは、

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} x_k = d_i \quad \text{for all } i \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} w_{il} \leq W_l \quad \text{for all } k, l \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} &\text{if } a_{ik} = 1 \cap a_{i'k} = 1 \\ &\text{then } R_{ii'} = 0 \cap R_{i'i} = 0 \quad \text{for all } k \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$x_k \geq 0 \quad \text{for all } k \quad (2.8)$$

の制約条件のもとで

$$\lambda = \min \sum_{k=1}^N x_k \quad (2.9)$$

を求めるとして定式化される。ここで、 N は考えられるすべてのパターン数を表しているものとする。以上の定式化から明らかのように、式(2.7)の条件がない、すなわち並列ネットワークの場合かつあらかじめすべての実行可能なパターンを求めておくことが困難でないような作業数のあまり多くないプロジェクトの場合、この問題は線形計画の問題となっている。したがって、このようなときにはシングレックス法によって問題を解くことができる。また、あらかじめすべての実行可能なパターンを求めておくことが困難な作業数の多い大規模なプロジェクトにおいては、この問題を Cutting-Stock 問題として捉えることにより、最適解を求めることができる。ここで、パターンの組合せとして求められるスケジュールは、基底行列 B として表される。

しかし、式(2.7)の条件が存在していると以上的のような解法では最適解を求ることは不可能となる。さらに、このような条件下で実行可能なパターンを探索することに加えて、これらパターン間の組合せであるスケジュールの実行可能性を調べていくことは、非常に複雑で膨大な組合せ問題を解くことに繋がり、そのような組合せを行なながら、最適解探索を進めることも事実上不可能である。そして、このような内容が、これまで PERT/MANPOWER 問題の最適解法の開発を困難させていた最大の要因であるといえる。

したがって、ここで考察したような多くの作業を含む一般的な工程ネットワークを対象とした PERT/MANPOWER 問題の効率的な最適解法を開発するためには、従来の理論や手法の限界を超え、これまでとは異なったアプローチが必要となってくる。

3. 工程ネットワーク構造のトポジカルな特性に着目した分析的研究

ここでは、前節で考察したような課題認識のもと、工程ネットワーク構造のトポロジカルな特性に着目して行なった分析的研究について述べることとする。

本研究では、これまでのPERT系ネットワークプランニング・スケジューリング問題の最適解法に関する研究^{5) 6)}を行う過程の中で、工程ネットワークのトポロジカルな特性分析を進めた結果、以下に示すような研究成果を得た。

すなわち、その特性分析では、建設工事の施工に必要なすべての作業群とそれらの作業間の順序関係で規定される工程ネットワーク構造を、以下に示すような方法で、別の等価な表現として示すことができるこことを発見した。そこでは、まず、すべての結合点を、ネットワークの始点を含む結合点集合と、終点を含む残りの結合点集合とに2分するカットを求めるこことを考える。次に、それらのカットのうちで、始点から終点に向かう順方向の作業のみを含むカットだけを取り出すこととする。このようなカットの集合の例を、小さなネットワークを例にとって図-2に示した。そして、同じく図-2に示したカット行列の列ベクトルであるカットベクトルは、同時作業可能な集合とし

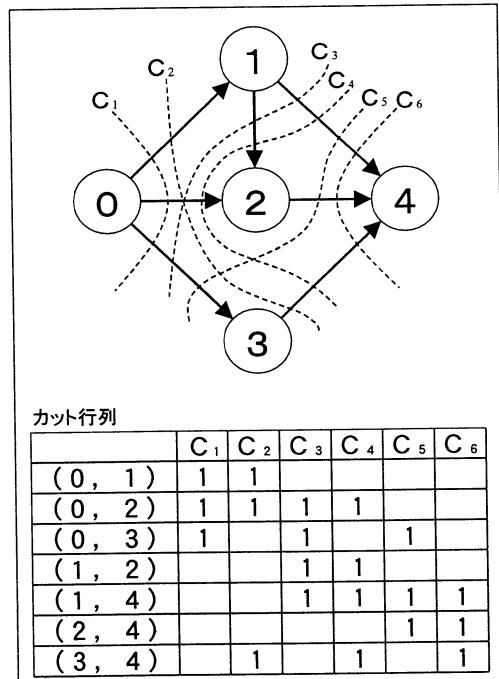


図-2 カット集合

て求められている。したがって、前節で定義した実行可能なパターンは、工事用資源の1日あたりの使用量制約を満足したカットベクトルの部分集合として求められることがわかる。

次に、始点から終点の方向に向かって、アクティビティの矢印の方向に沿って順方向に結ぶすべての相互独立なパスを求める。上と同様に、図-3にこのようなパスを示した。ここでは、このパスのことを、始点から終点に向かうルートとよびかえるとともに、このルートの集合と先に求めたカットの集合の間の関係構造を求めてみた。この結果、工程ネットワークの作業間順序関係と等価な関係構造が存在することを発見した。すなわち、カット集合とルート集合の間の構造関係が、「任意のカットとルートの交点が一意の作業を表す」とともに、これら「求められるすべての交点によってすべての作業が網羅される」というトポロジカルな関係として、もとの工程ネットワークの作業間順序関係に変換されるメカニズムが存在

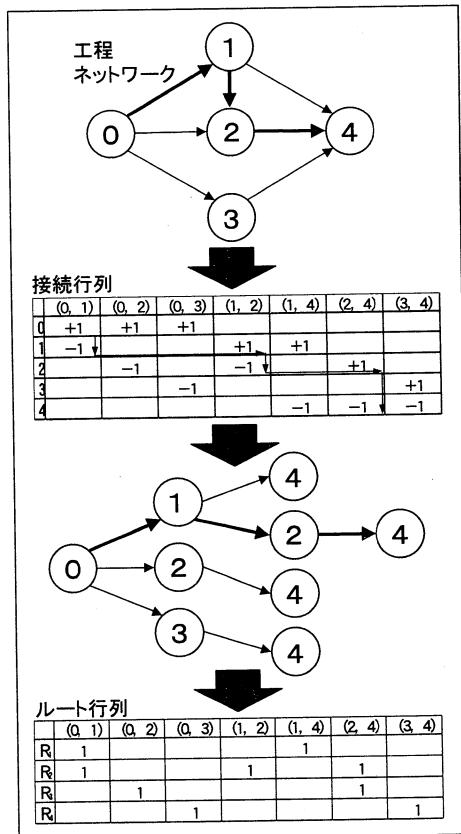


図-3 ルート集合

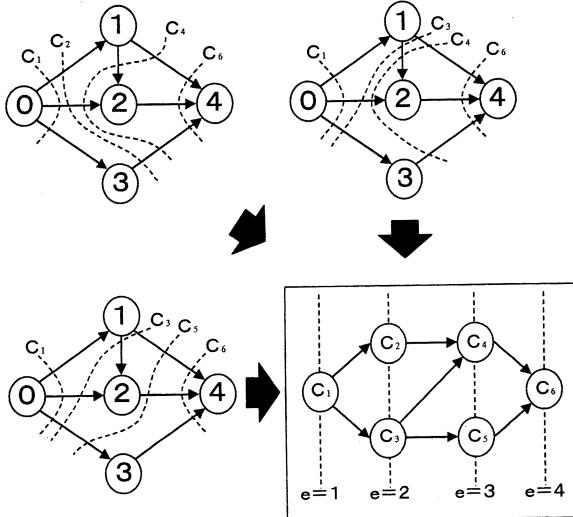


図-4 カットネットワーク

することを明らかにした。このような関係は、以下に示すような最適解法の開発を可能とした。

すなわち、各種のPERT系のネットワークプランニング・スケジューリング問題が、このトポジカルな関係のもとで、ルートとカットをベースとする新たな計画変数の導入に繋がり、従来とは異なったアプローチを可能としたのである。今回の問題へのアプローチでは、まず、先に求めたカットを結合点として、図-4に示したようなカットネットワークを、次のような方法で求めることから始めた。すなわち、求められたカット間の順序関係を、カットに含まれる元々のネットワークのアクティビティ間の順序関係を調べ、カット間の順序関係を決定した。つぎに、この順序関係に基づいて、個々のカットを結合点とするカットネットワークを求めることした。このとき、カットネットワークはもとの工程ネットワークの作業間順序関係がカット間順序関係としてトポジカルに写像しているとともに、カットネットワークの任意のパスにはプロジェクトに含まれるすべての作業が網羅されている。このため、前述したカットベクトルの部分集合である実行可能なパターンをこのカットネットワークの順序関係にしたがって配列していくば、結果として実行可能なスケジュールが求められることがわかる。

すなわち、このようにして求めたカットネットワークを用いると、PERT/MANPOWER問題が、カットネットワーク上での資源量の1日あたりの使用量制約を考慮した最適資源分配問題として定式化できるようになり、さらに、DPや0-1計画法を適用した最適解法の開発も可能となるのである。以下においては、その具体的な定式化と最適解法を示していくこととする。

なお、これまで論じてきたカット集合、ルート集合、さらにはカットネットワークのシステムティックな導出方法については、既に効率的な形でアルゴリズム化しており、それらの内容は参考文献7)に取りまとめてるので参照していただきたい。

4. カットネットワークにおける最適資源分配問題への変換による新たな定式化

(1) 全体問題の定式化

ここでは、以上の検討内容をベースとして、ルートの実施日数を計画変数とするカットネットワーク上での最適資源分配問題としてPERT/MANPOWER問題の定式化していくこととする。なお、カットネットワークには図-4のようにイニシャルレベルを設定しておく。

いま、工程の状態をカットとそこで各ルートの実施日数で表わすこととすれば、

$$R_{e,c_y \prec c_z} = (r_{e,c_y \prec c_z}^1, r_{e,c_y \prec c_z}^2, \dots, r_{e,c_y \prec c_z}^k, \dots, r_{e,c_y \prec c_z}^m) \quad (4.1)$$

$r_{e,c_y \prec c_z}^e$: 任意のレベル $e+1$ のカット c_z と直接的先行関係を持つレベル e のカット c_y におけるルート k の実施日数

のような m 次元ベクトルを問題定式化における状態変数として設定することができる。

つづいて、決定関数を、上述した各ルートの実施日数パターンを変数にもつ任意のカット区間の時間長として設定すれば、以下のような関数

$$g_e(R_{e,c_y \prec c_z}) \quad (4.2)$$

で表わすことができる。このとき、PERT/MANPOWER 問題の定式化は、カットネットワークにおける各レベルでの決定関数値の総和の最小化として求められる。すなわち、PERT/MANPOWER 問題は、

minimize

$$f_n(r^1, r^2, \dots, r^m) = \sum_{e=1}^n g_e(R_{e,c_{ie} \prec c_{i+1}}) \quad (4.3)$$

subject to

$$\sum_{e=1}^n r_{e,c_{ie} \prec c_{i+1}}^k = r^k \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (4.4)$$

$$r_{1,c_{i1} \prec c_{i2}}^k, r_{2,c_{i2} \prec c_{i3}}^k, \dots, r_{n,c_{in} \prec c_{in+1}}^k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (4.5)$$

$$c_{i1} \prec c_{i2} \prec \dots \prec c_{in} \quad (4.6)$$

$$c_{in+1} \in \phi \quad (4.7)$$

のようなカットネットワークにおける最適資源配分問題として定式化できることがわかる。さらに、上式の資源配分問題としての定式化が、フィードバックのないシステムであるカットネットワークの順序構造にしたがって設定されているので、DP の基本原理である最適性の原理が適用でき、次のように変形することができる。すなわち、

$$\begin{aligned} f_n(R) \\ = \min_{\substack{0 \leq r_{n,c_{in+1}}^k \leq r^k (k=1,2,\dots,m) \\ c_{in} \prec c_{in+1}}} & \left\{ g_n(R_{n,c_{in} \prec c_{in+1}}) \right. \\ & + f_{n-1}(R - R_{n,c_{in} \prec c_{in+1}}) \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

のような、繰り返し関数方程式として定式化することができ、DP による解法を適用できることがわかる。

(2) カットへ配分される時間長の決定

ここでは、上述した定式化の決定関数値 $g_e(R_{e,c_y \prec c_z})$ を求める方法について検討を加える。3 節でも述べたように任意のカットに含まれる作業間に順序関係は存在しない。したがって、ここでの問題は並列ネットワークを対象とした PERT/MANPOWER 問題を解くことと等価な問題であることがわかる。このようにして問題を解くことにより、前述したカットベクトルの部分集合としての実行可能なパターンとそれらパターンの組合せのうち、全体問題での解探索にとって検討に値する必要最小限のスケジュールのみを抽出できることになる。

ここで、任意のカットへの配分時間を求める問題は、2 節での考察同様、

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} x_k = d_i \quad \text{for all } i \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} w_i \leq W \quad \text{for all } k, l \quad (4.10)$$

$$x_k \geq 0 \quad \text{for all } k \quad (4.11)$$

の制約条件のもとで、

$$\lambda = \min \sum_{k=1}^N x_k \quad (4.12)$$

を求める線形計画の問題として定式化されることとなる。ここで、 N は考えられるすべてのパターンの数を表す。

なお、ここではカットに含まれる作業の数が多く、あらかじめすべてのパターンを求めることが困難となる場合を取り上げ、この問題を前述した Cutting-Stock 問題と捉え、列生成法を用いた解法を採用することとした。すなわち、すべてのパターンを暗に対象としつつ、基底行列に新しく導入されるパターン p_u を

$$\sum_{i=1}^m w_{il} a_i \leq W_l \quad (4.13)$$

$$a_i = 1 \quad \text{あるいは} \quad 0$$

の制約条件のもとで、

$$U_u = \max \sum_{i=1}^m \beta_i a_i \quad (4.14)$$

を与えるような $\{a_i\}$ を求める補助問題を解くことにより決定していくことにした。ここで β_i は

上述定式化における目的関数の係数値がすべて1であるため $C_j = 1$ となり

$$\beta_i = CB^{-1} = \sum_{i=1}^m \beta_{ji} \quad B^{-1} = (\beta_{ji}) \quad (4.15)$$

として容易に求められる。

定式化からも明らかなように、このような補助問題は0-1整数計画(Integer Programming)の問題と呼ばれ、一般にはナップサック問題としてよく知られている問題である。本研究では、ナップサック問題の最も一般的な解法の1つであるDPを用いてこの補助問題を解くこととした。

つぎに、このような補助問題を用いた線形計画の解法を示すとつぎのようである。

ステップ1. 一つの実行可能なスケジュール B (基底行列)をもとめる。

ステップ2. 基底行列 B の逆行列 B^{-1} を求める。

ステップ3. 補助問題をDPを用いて解き

$$U_u = \max_k \{CB^{-1}P_k\} \text{を求める。}$$

$U_u \geq c_u$ ならば最適解が求められているので計算を終了する。

$U_u < c_u$ ならばステップ4に進む。

ステップ4. $\bar{P}_k = B^{-1}P_k$ および $\bar{d} = B^{-1}d$ を計算する。

$$\bar{P}_k = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mk} \end{bmatrix}$$

ステップ5.

$$\frac{\bar{d}_r}{\bar{a}_{ru}} = \min_i \frac{\bar{d}_i}{\bar{a}_{iu}} (> 0)$$

を与える \bar{a}_{ru} を求める。

ステップ6. \bar{a}_{ru} をピボット係数として消去計算をおこない、新しい基底行列 B を求め、ステップ2にもどる。

以上のようにして、任意のカットに含まれる作業群を対象とした最小の完了時刻を求めること

ができるが、この値を直接、決定関数値として用いることはできない。すなわち、以下のような処理を加えることにより、この決定関数値を求める必要がある。いま、基底行列として求められたパターンにおいて、

$$i \in c_y \quad \text{かつ} \quad i \notin c_z \quad (c_y \prec c_z)$$

となる作業が1つでも実施している、すなわち、 $a_{ik'} = 1$ となるパターン $I_{k'}$ のみを抽出し、

$$\lambda' = \sum_{k=1}^M x_k \quad (4.16)$$

を決定関数値 $g_{e,c_z}(R_{e,c_z})$ として求めればよいこととなる。ここで、 M は抽出されたパターンの数を表すものとする。結果として、この値が最小のカットへの配分区間長となることは明らかである。そして、全体問題におけるカットネットワークの最適経路探索を前述のようにDPを用いて実施することにより、プロジェクト全体の最小工期を求めることができる。なお、このときのスケジュールは、当然上で抽出した各段階のパターンの合成として求めることができることとなる。

5. 例題ネットワークでの適用計算

表-1 各作業のインプットデータ

作業	結合点		所要 日数	必要資源数		
	i	j		I	II	III
1	0	1	10	5	2	3
2	0	3	14	4	3	4
ダミー-1	1	2	3	6	2	4
3	2	3	0	0	0	0
4	2	5	5	2	0	2
5	2	6	2	4	2	2
6	2	7	8	3	3	3
7	3	4	8	4	4	3
ダミー-2	4	5	0	0	0	0
ダミー-3	4	8	0	0	0	0
8	5	9	4	7	3	5
9	6	9	6	4	2	0
ダミー-4	7	8	0	0	0	0
ダミー-5	7	9	0	0	0	0
10	8	10	2	4	4	2
11	9	10	3	4	2	2
12	10	11	2	3	4	5

資源制約数	10	6	8
-------	----	---	---

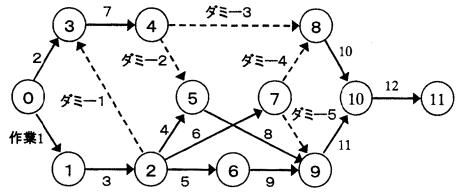


図-5 例題ネットワーク

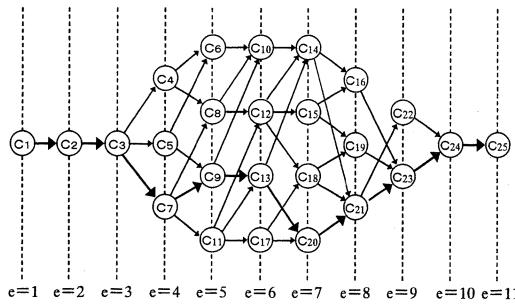


図-6 カットネットワークと最適経路

表-2 最適スケジュール

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₇	C ₉	C ₂₀	C ₂₄	C ₂₅
1(0, 1)	1							
2(0, 3)	1	1	1					
3(1, 2)		1						
(2, 3)			1	1				
4(2, 5)				1				
5(2, 6)		1				1	1	
6(2, 7)			1	1	1			
7(3, 4)								
(4, 5)								
(4, 8)						1		
8(5, 9)					1	1		
9(6, 9)								
(7, 8)								
(7, 9)								
10(8, 10)							1	
11(9, 10)							1	1
12(10, 11)								1

[10 3 1 2 3 3 4 3 2 1 2] [34]

注: 網掛けは各カットが含む作業

本研究ではさらに、図-5のような例題ネットワークを用いて、開発した解法の適用計算を行なった。ここで、表-1は各作業の所要日数、必要資源量およびプロジェクトの資源制約量を示している。

この適用計算の結果、最小工期 34 日が求められ、カットネットワークの最適経路は図-6のようであった。各時間区間の日数と実施パターンの配列として求められる最適スケジュールは表-2ように求められている。なお、表-2の中の網掛け部分は、各カットに含まれる作業群を表している。更に、図-7に各資源ごとの山積み結果を示す。

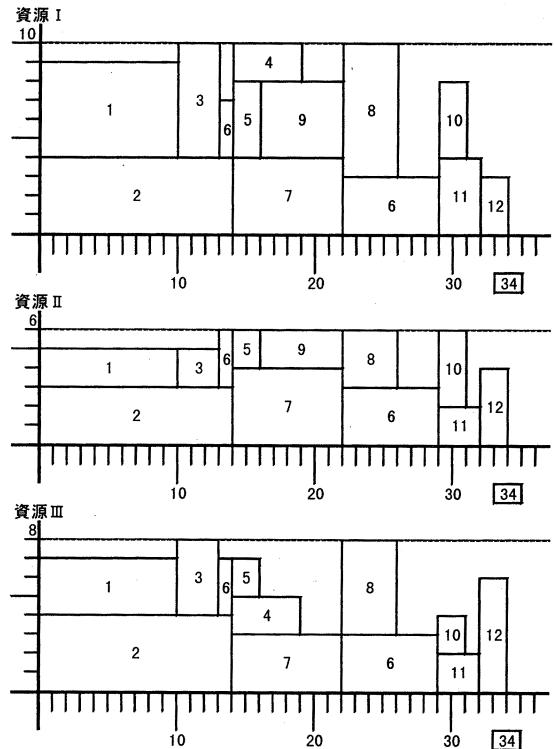


図-7 資源山積み図
しておく。

6. おわりに

本研究においては、これまで近似解法しか手法化されておらず、最適解を求めるることは現実的に不可能といわれてきた PERT/MANPOWER 問題の最適解法の開発を行なった。ここでは、まず PERT/MANPOWER 問題を最適モデルとして定式化するとともに、その問題の構造を考察して、解法開発上の課題を明らかにした。ついで、このような課題認識のもとに行なった工程ネットワークのトポジカルな特性に関する構造分析の内容を示した。本研究では、さらにこの研究成果から求められるカットネットワークを用いれば、PERT/MANPOWER 問題が、各ルートの実施日数を決定変数とするカットネットワーク上での資源量の 1 日あたりの使用制約量を考慮した最適資源配分問題に変換できることを明らかにして、DP その他の手法を適用した最適解法を開発した。最後にこの解法を例題ネットワークでの適用計算

を実施して最適解を具体的に求めた。

参考文献

- 1) 関根智明：PERT・CPM，日科技連，1975
- 2) 春名攻：建設工事における施工管理に関するシステム論的研究，京都大学学位論文，1971
- 3) 山本幸司：土木工事における施工計画のシステム化に関する研究，京都大学学位論文，1978
- 4) Wiest J.D. : Heuristic Model for Scheduling Large Project with Limited Resource, Management Science, Vol.13, No.6, pp.B-359~pp.B-377, 1967
- 5) 春名攻, 山田幸一郎, 滑川達: PERT/MANPOWER 問題の最適解法に関する開発研究, 建設マネジメント研究・論文集 vol. 2, 土木学会建設マネジメント委員会, 1994
- 6) 春名攻, 滑川達, 櫻井義夫: 非線形・離散型費用関数に適用可能な新しい最適ネットワークスケジューリングモデルの開発研究—CPM とは異なったアプローチー, 土木計画学研究・講演集 19(1), 土木学会, 1996
- 7) 春名攻, 滑川達: ネットワーク工程表の構造特性分析と最適工程計画モデル構築に関する理論研究, 建設マネジメント研究・論文集 vol. 4, 土木学会建設マネジメント委員会, 1996

PERT/MANPOWER 問題の最適解法の開発研究

— カットネットワークにおける最適資源配分問題への変換を用いた新しい解法 —

春名 攻, 滑川 達

本研究においては、これまで最適解の導出が不可能といわれてきた PERT/MANPOWER 問題の効率的な最適解法の開発研究を次のようにアプローチして行った。すなわち、まず工程ネットワークのカットとルートに着目した構造特性分析をすすめることにより、これらの結合の関係構造がトポジカルな関係として、もとの工程ネットワークの作業間関係に変換されるメカニズムが存在することを明らかにした。さらに、本研究ではカット間順序関係を構造化したカットネットワークを作成することにより、PERT/MANPOWER 問題が、このカットネットワークにおける最適資源配分問題に変換できることを示すとともに、D P や 0-1 計画法を適用した最適解法の開発研究を行つたものである。

Study on Development of Algorithm for Obtaining Optimal Solution of PERT/MANPOWER Problem

Mamoru HARUNA, Susumu NAMERIKAWA

In this paper, it is aimed to develop a new type model and its algorithm for obtaining optimal solution of PERT/MANPOWER problem. In this approach the new type model formulation and the algorithm to solve it effectively is established from the different viewpoint of existing method through the transforming to optimal resource allocation problem on cut-network which is structured based on the analysis of topological characteristics of construction project network.
