7 区間推定による検定

1 仮説検定

母数 θ が母数空間 Ω のある部分空間 ω に属するという記述を統計的仮説 (statistical hypothesis) といい，H_0 : $\theta \in \omega$ で表す．ω が 1 点のみからなるときの H_0 を単純仮説 (simple hypothesis) といい，2 つ以上からなるときの H_0 を複合仮説 (comoposite hypothesis) という．このとき，母集団から抽出した標本に基づいて仮説を棄却しない（つまり，採択 (accept) する）か棄却 (reject) するかを決定することを仮説検定 (testing hypothesis) という．仮説検定は，積極的に仮説が真であることを主張することができるわけではなく，ただ仮説が真でないことをある確率のもとで主張するものである．それゆえ，仮説は棄却されることを期待して立てられるべきであり，これを帰無仮説 (null hypothesis) という．

いま，未知母数 θ が特定の値 θ_o であるのではないかという仮説 H_0 : $\theta = \theta_o$ を検定することを考える．そのために，母集団から大きさ n の標本 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathrm{T}}$ を抽出し統計量 $g(\mathbf{X})$ をつくり，その分布を求める．ここで，仮説 H_0 が真であるという条件の下で統計量 $g(\mathbf{X})$ が領域 W に含まれる確率が α となる

$$P(g(\mathbf{X}) \in W | H_0) = \alpha$$

を統計量 $g(\mathbf{X})$ の分布にあらかじめ定めておく．観測された標本値 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ から $g(\mathbf{x})$ を求め，これが領域 W に含まれれば仮説 H_0 を棄却し，それ以外では棄却しないとする．仮説 H_0 が棄却されたときには検定の結果が有意 (significant) であったという．そのため，領域 W は棄却域 (critical region) といい，確率 α を有意水準 (significant level) という．一般には有意水準として 0.05 か 0.01 が用いられる．特に有意水準が 0.05 であるときに仮説が棄却されたときのことを，検定の結果は高度に有意であるという．

2 検定の基準

仮説 H_0 は真であるのか偽のどちらかである．そこで，仮説 H_0 は真でなければ他の仮説 H_1 が真であるとする．このような仮説 H_1 のことを仮説 H_0 の対立仮説 (alternative) という．帰無仮説 H_0 : $\theta \in \omega$ に対する対立仮説は一般に H_1 : $\theta \in \Omega - \omega$ となる．仮説 H_0 の検定には次の二つの誤りが存在する．

第一種の過誤 仮説 H_0 が真であるにもかかわらず棄却する場合．これを第一種の過誤 (type I error: TIE) あるいは生産者リスク (producer's risk) ともいう．

第二種の過誤 仮説 H_0 が偽であるにもかかわらず棄却しない場合．これを第二種の過誤 (type II error: TIIE) あるいは消費者リスク (consumer's risk) ともいう．

先にも述べたように，有意性検定では仮説が棄却されることを前提としている．そのため，もしも帰無仮説 H_0 が真であればとても観測されない統計量の領域を棄却域とし，そのなかの値が出てくれば帰無仮説を棄却する．したがって，帰無仮説が真であってたまたま（確率 α で) 棄却域の値が観測されることにより棄却されることがある．これが TIE である．単純帰無仮説 $H_o:\ \theta = \theta_o$ では TIE を犯す確率 $P(X \in W|\theta_o)$ は有意水準 α であるので，有意水準を危険率 (critical level) ともいう．

また，帰無仮説 H_0 が偽であるにもかかわらず，たまたま (確率 β で) 統計量の値が棄却域に入らなかったために，帰無仮説が棄却されないことがある．これが TIIE である．確率 β は対立仮説が真であるもとで統計量の値が棄却域に入らない確率ともいえる．そこで，単純対立仮説 $H_1:\ \theta_1 \in \Omega - \omega$ が真であるとき，TIIE を犯さない確率 $P(X \in W|\theta_1) = 1 - \beta$ を検定 W の検出力 (power) という．さらに，仮説 H_1 が複合対立仮説であるときの検出力 $P(X \in W|\Omega - \omega)$ は $1 - \beta(\theta, W)$ で表され検出力関数 (power function) という．

表 8.1 母集団の状態と検定結果

		検定結果	
		仮説を採択	仮説を棄却
母集団の状態	仮説が真	正	TIE
	仮説が偽	TIIE	正

表 **8.2**　検定結果の確率

		検定結果	
		仮説を採択	仮説を棄却
母集団の状態	仮説が真	$1-\alpha$ 信頼水準	α 有意水準
	仮説が偽	$\beta(\theta, W)$	$1-\beta(\theta, W)$ 検出力

確率変数 $X_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ は独立で同一の確率分布関数に従うものとする．その同時確率密度関数は

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=0}^{n} p_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}_i|\theta)$$

である．いま，帰無仮説 $H_0:\ \theta = \theta_0$，対立仮説 $H_1:\ \theta = \theta_1$ ともに単純仮説の場合を考える．望ましい検定とは，TIE の確率があらかじめ決められた α 以下

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_0) = \int_W p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta_0)d\mathbf{x} \leq \alpha$$

となる条件の下で，TIIE の確率が最大となる，つまり検出力

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_1) = \int_W p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta_1)d\mathbf{x}$$

が最大となるような検定 W_o である．このような検定 W_o を有意水準 α の最強力検定 (most powerful test: MPT) という．ともに複合仮説の場合には，$\theta_0 \in \omega$，$\theta_1 \in \Theta_1$ となる．もし，すべての θ_0 に対する条件の下で，すべての θ_1 に対して最大となる検定 W_o が存在するなら，このような検定 W_o を有意水準 α の一様最強力検定 (uniformly most powerful test: UMPT) という．

3　ネイマン・ピアソンの定理

以下の条件を満たす検定 W_o を考える．

$$W_o = \left\{ x \;\middle|\; \frac{p_X(x|\theta_1)}{p_X(x|\theta_0)} > c \right\}$$

かつ

$$\int_{W_o} p_X(x|\theta_0)dx = \alpha$$

ここで，c は正定数である．このとき，W_o は $H_0:\ \theta = \theta_0$ を $H_1:\ \theta = \theta_1$ に対して検定する有意水準 α の MPT である．このことをネイマン・ピアソン (Neyman-Pearson) の定理という．

証明 ここで，標本値 x の関数である検定関数 (test function) を $\phi(x)$, $(0 \le \phi(x) \le 1)$ で表し，以下のように定義する．

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in W \\ 0, & x \notin W \end{cases}$$

このような検定関数 $\phi(x)$ を定義することは検定 W を定めることと同値である．

検定関数を用いると MPT は，TIE の確率があらかじめ決められた α 以下

$$\int \phi(x) p_X(x|\theta_0) dx \le \alpha$$

となる検定の中で，TIIE の確率が最小となる，つまり検出力

$$\int \phi(x) p_X(x|\theta_1) dx$$

が最大となるような検定関数 $\phi(x)$ を求めることである．このとき，検定 W_o に対する条件は

$$\phi_o(x) = \begin{cases} 1, & p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0) > 0 \\ 0, & p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0) < 0 \end{cases}$$

かつ

$$\int \phi_o(x) p_X(x|\theta_0) dx = \alpha$$

とかける．そこで，TIE の確率があらかじめ決められた α 以下となる任意の検定関数 $\phi(x)$ に対して，$\phi_0(x)$ の検出力が

$$\int \phi_o(x) p_X(x|\theta_1) dx \ge \int \phi(x) p_X(x|\theta_1) dx$$

となることを示せばよい．そこで，

$$\begin{aligned} &\int \phi_o(x) p_X(x|\theta_1) dx - \int \phi(x) p_X(x|\theta_1) dx \\ &\ge \int \phi_o(x) p_X(x|\theta_1) dx - \int \phi(x) p_X(x|\theta_1) dx \\ &- c\left(\int \phi_o(x) p_X(x|\theta_0) dx - \int \phi(x) p_X(x|\theta_0) dx \right) \\ &= \int (\phi_o(x) - \phi(x))(p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0)) dx \end{aligned}$$

よって，被積分関数は検定関数 $\phi_o(x)$ に関する場合分けが

$$\begin{cases} \phi_o(x) = 1 \ge \phi(x) & p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0) > 0 \\ \phi_o(x) = 0 \le \phi(x) & p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0) < 0 \end{cases}$$

となることから非負であり，これにより定理が証明された．

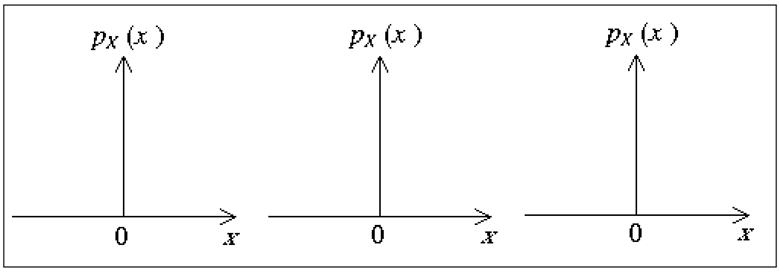

図 1: 対立仮説による棄却域の相違

対立仮説の違いと検出力曲線

ところで，帰無仮説が $H_0:\ \theta=\theta_0$ であるときに，対立仮説が複数の点 $\theta\in\Omega-\theta_0$ からなる複合仮説である場合を考える．特にこれらが帰無仮説 $\theta\in\theta_0$ の両側に存在するなら両側仮説 (two-sided hypothesis) という．

$$\text{両側検定}\quad \begin{cases} H_0:\ \theta=\theta_0 & (\text{帰無仮説}) \\ H_1:\ \theta\neq\theta_0 & (\text{対立仮説}) \end{cases}$$

それに対し，仮説が $H_1:\ \theta<\theta_0$ のときを左側仮説 (left-sided hypothesis)，

$$\text{左側検定}\quad \begin{cases} H_0:\ \theta=\theta_0 & (\text{帰無仮説}) \\ H_1:\ \theta<\theta_0 & (\text{対立仮説}) \end{cases}$$

また，仮説が $H_1:\ \theta>\theta_0$ のときを右側仮説 (right-sided hypothesis) といい，

$$\text{右側検定}\quad \begin{cases} H_0:\ \theta=\theta_0 & (\text{帰無仮説}) \\ H_1:\ \theta>\theta_0 & (\text{対立仮説}) \end{cases}$$

これらは片側仮説 (one-sided hypothesis) といわれる．これら対立仮説の違いに応じて棄却域の設定も異なることとなる．

ある与えられた有意水準 α に対して，3 種類の対立仮説を考えることができる．これらの仮説を比較するための評価基準となるのが検出力である．ここでは，母分散 σ^2 が既知であり，母平均 m が未知である正規分布 $[N(m,\sigma^2)]$ から無作為抽出された確率変数 $X_i,\ (i=1,2,\cdots,n)$ から母平均 m を仮説検定することを考える．そこで，帰無仮説 $H_0:\ m=m_0$ を対立仮説 $H_1:\ m=m_1$ に対して検定する．確率ベクトル $\mathbf{X}=[X_1,X_2,\cdots,X_n]^{\mathrm{T}}\in\Re^n$ の同時確率密度関数は

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}$$

である．ネイマン・ピアソンの定理から棄却域 W_o は

$$W_o=\left\{x\ \middle|\ \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m_1)}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m_0)}>c\right\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2}}$$

であり，すなわち

$$\bar{x}_n > \frac{\sigma^2}{n(m_1-m_0)}\left\{\log c + \frac{n}{2\sigma^2}\left(m_1^2-m_0^2\right)\right\} \triangleq c'$$

を満たす $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \Re^n$ であり (条件 1)，かつ，この棄却域 W_o は

$$\int_{W_o} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m_0)dx = \alpha$$

を満たさなければならない (条件 2).

右側仮説　対立仮説が $H_1:\ m > m_0$ である場合.

帰無仮説 H_0 の下では $\bar{X}_n \sim N\left(m_0, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ であるので，これを標準変換した $Z = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m_0)}{\sigma}$ が標準正規 $[N(0,1)]$ に従うことから，

$$\int_{W_o} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m_0)dx = P(\bar{X} > c'|m_0)$$
$$= P\left(Z > \frac{\sqrt{n}(c'-m_0)}{\sigma}\right)$$
$$= \int_{\frac{\sqrt{n}(c'-m_0)}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \alpha$$

となり，標準正規 $[N(0,1)]$ の右片側 $100\alpha\%$ 点 $z(2\alpha)$ を正規分布表から求めると

$$z(2\alpha) = \frac{\sqrt{n}(c'-m_0)}{\sigma}$$

となるので

$$c' = m_0 + z(2\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

が決定できる．よって，帰無仮説 $H_0:\ m = m_0$ の対立仮説 $H_1:\ m > m_0$ に対する UMPT は以下のようになる.

(a1)　$\bar{x}_n > m_0 + z(2\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \longrightarrow\ H_0$ を棄却

(a2)　$\bar{x}_n \leq m_0 + z(2\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \longrightarrow\ H_0$ を採択

左側仮説　対立仮説が $H_1:\ m < m_0$ である場合.

右側仮説の場合と同様にして，帰無仮説 $H_0:\ m = m_0$ の対立仮説 $H_1:\ m < m_0$ に対する UMPT は以下のようになる.

(a1) $\bar{x}_n < m_0 + z(2\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow H_0$ を棄却

(a2) $\bar{x}_n \geq m_0 + z(2\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow H_0$ を採択

両側仮説　対立仮説が $H_1:\ m \neq m_0$ である場合．

まず，右側仮説において得られた検定方式を帰無仮説 $H_0:\ m = m_0$ の対立仮説 $H_1:\ m = m_1\ (\neq m_0)$ に対する検定に用いた場合を考える (このときの対立仮説は複合仮説ではなく単純仮説であることに注意する)．対立仮説 H_1 の下では $\bar{X}_n \sim N\left(m_1, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ であるので，これを標準変換した $Z = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m_1)}{\sigma}$ が標準正規 $[N(0,1)]$ に従うことから，その検出力は

$$
\begin{aligned}
1 - \beta(m_1) &= P(\bar{X}_n > c' | m_1) \\
&= P\left(\bar{X}_n > m_0 + z(2\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \mid\ m_1\right) \\
&= P\left(Z > \frac{\sqrt{n}(m_0 - m_1)}{\sigma} + z(2\alpha)\right) \\
&= \int_{\sqrt{n}\delta + z(2\alpha)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \triangleq 1 - \beta(\delta)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\delta = \dfrac{m_0 - m_1}{\sigma}$ である．

つぎに，左側仮説において得られた検定方式を帰無仮説 $H_0:\ m = m_0$ の対立仮説 $H_1:\ m = m_1\ (\neq m_0)$ に対する検定に用いた場合を考える．右側仮説の場合と同様にして，その検出力は

$$
\begin{aligned}
1 - \beta(m_1) &= P(\bar{X}_n < c' | m_1) \\
&= P\left(\bar{X}_n < m_0 - z(2\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \mid\ m_1\right) \\
&= P\left(Z < \frac{\sqrt{n}(m_0 - m_1)}{\sigma} - z(2\alpha)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\delta - z(2\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \triangleq 1 - \beta(\delta)
\end{aligned}
$$

となる．

いま，与えられた n に対して有意水準 α を指定すると，横軸に δ をとり，縦軸に検出力 $1 - \beta(m_1)$ をとり図示すると図 8.2 のようになる．これを検出力曲線という．

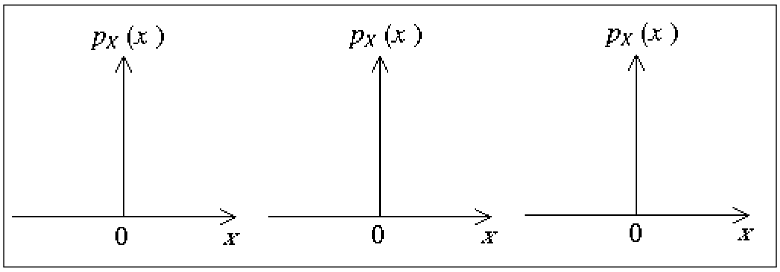

図 2: 検出力曲線

図8.2からわかるように，右側検定を両側仮説の場合に用いると，$\delta < 0$ つまり $m_0 < m_1$ では最もよい検定であるが，$\delta > 0$ つまり $m_0 > m_1$ では最も悪い検定といえる．左側検定を両側仮説の場合に用いると，この逆となる．よって，この両側検定の場合では条件1と条件2を同時に成立させる任意の δ に対するUMPTが存在しないこととなる．一般的にもUMPTが存在することが希なため，これとは異なる望ましい検定方式が必要である．

そこで，帰無仮説 $H_0:\ \theta \in \omega$ を対立仮説 $H_1:\ \theta \in \Omega - \omega\ (= \Omega_1)$ に対して検定するときの条件である，TIEの確率があらかじめ決められた有意水準 α 以下

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_0) = \int_W p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta_0)d\mathbf{x} \leq \alpha, \qquad (\theta_0 \in \omega)$$

となることに加えて，これがTIIEの確率 $\beta(\theta, W)$ 以下

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_0) \leq P(\mathbf{X} \in W|\theta_1), \qquad (\theta_0 \in \omega,\ \theta_1 \in \Omega_1)$$

となる条件を満たす検定 W を有意水準 α の不偏検定 (unbiased test) という．したがって，任意の θ_1 に関してTIIEの確率が最大となるような検定 W_o

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_1) \leq P(\mathbf{X} \in W|\theta_1), \qquad (\theta_1 \in \Omega_1)$$

が存在すれば，このような検定 W_o を有意水準 α の一様最強力不偏検定 (uniformly most powerful unbiased test: UMPUT) という．

先ほどの両側検定の場合ではUMPTは存在しなかったが，UMPUTは以下のようになることが知られている．

(a1) $\quad \bar{x}_n < m_0 - z(\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ あるいは $m_0 + z(\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}_n \ \longrightarrow\ H_0$ を棄却

(a2) $\quad m_0 - z(\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_n \leq m_0 + z(\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \longrightarrow\ H_0$ を採択

このUMPUTに対する検出力 $1 - \beta(m_1)$ は以下のようになる．

$$1 - \beta(m_1) = 1 - P\left(m_0 - z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n \leq m_0 + z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}|m_1\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{\sqrt{n}(m_0 - m_1)}{\sigma} - z(\alpha) \le Z \le \frac{\sqrt{n}(m_0 - m_1)}{\sigma} + z(\alpha)\right)$$
$$= 1 - \int_{\sqrt{n}\delta - z(\alpha)}^{\sqrt{n}\delta + z(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \triangleq 1 - \beta(\delta)$$

4 区間推定

標本 $\mathbf{X}$ から未知母数の関数 $f(\theta)$ を推定するのに二つの統計量 $g_l(\mathbf{X})$ と $g_u(\mathbf{X})$ を求めて，

$$P(g_l(\mathbf{X}) \le f(\theta) \le g_u(\mathbf{X})) \ge 1 - \alpha$$

として推定することを区間推定 (interval estimation) という．区間 $[g_l(\mathbf{X}), g_u(\mathbf{X})]$ を $f(\theta)$ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間 (confidence interval) といい，区間の両端のことを信頼限界 (confidence limit) という．$1-\alpha$ は信頼度 (confidence coefficient) であり，0.95 あるいは 0.99 が用いられることが多い．

実際に標本を得ることにより信頼区間が求まると，その区間が未知母数を含む確率は 0 か 1 であり，$1-\alpha$ というわけではない．つまり，信頼度が $1-\alpha$ であるということは，大きさ n の標本を m 組とってそれぞれについて信頼区間を求めると，これら m 組の信頼区間のうち $100(1-\alpha)\%$ のものが未知母数の真値を含んでいることを示している．

区間推定は仮説検定と密接に関係しており，それを利用して信頼区間を求めることができる．まず，$g_l(\mathbf{X}) \le f(\theta) \le g_u(\mathbf{X})$ が $\mathbf{X} \not\in W$ とすると

$$P(g_l(\mathbf{X}) \le f(\theta) \le g_u(\mathbf{X})) = P(\mathbf{X} \not\in W) \ge 1 - \alpha$$

となる．よって，$P(\mathbf{X} \in W) \le \alpha$ となる．ここで，W を仮説 $H_0:\ f(\theta) = f(\theta_o)$ の検定を行うときの有意水準 α の棄却域と見なすことができる．その結果，仮説 H_0 の対立仮説 $H_1:\ f(\theta) \ne f(\theta_o)$ に対する有意水準 α の検定 W を定め，$\mathbf{x} \not\in W$ から $g_l(\mathbf{x})$ と $g_u(\mathbf{x})$ を決定すればよい．

4.1 二つの母集団における検定

互いに独立な確率変数 X と Y を考える．確率変数 $X_i,\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ は正規分布 $N(m_x, \sigma_x^2)$ からの無作為標本とし，確率変数 $Y_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ は正規分布 $N(m_y, \sigma_y^2)$ からの無作為標本とする．このように二つの異なる母集団からの独立な二つの無作為標本を取り扱う問題を二標本問題 (two-sample problem) という．二標本問題には左右の目の視力などの対をなすデータ (paired data) と男子と女子の身長などの対をなさないデータ (unpaired data) を取り扱う場合が考えられる．ここでは，対をなさないデータに関する二標本問題について述べる．

分散の比の区間推定

母分散の推定では，二つの分散の差ではなく比でその相違を表す．まず，それぞれの標本不偏分散 $\tilde{\sigma}^2_{x,m}$ と $\tilde{\sigma}^2_{y,n}$ は χ^2 分布に従う．そのため分散比 $\delta = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$ の推定量は自由度 $(m-1, n-1)$ の F 分布に従う．

$$\tilde{\delta} = \frac{\tilde{\sigma}_x^2}{\tilde{\sigma}_y^2} \sim \delta F^{m-1}_{n-1}$$

自由度 $(m-1, n-1)$ の F 分布の上側 $\dfrac{\alpha}{2}$ 点 $F^{m-1}_{n-1}(\alpha)$ と上側 $1-\dfrac{\alpha}{2}$ 点 $F^{m-1}_{n-1}(1-\alpha)$ に対して

$$P\left(\frac{\tilde{\delta}}{\delta} \geq F^{m-1}_{n-1}(\alpha)\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left(\frac{\tilde{\delta}}{\delta} \leq F^{m-1}_{n-1}(1-\alpha)\right) = P\left(\frac{\delta}{\tilde{\delta}} \geq F^{n-1}_{m-1}(\alpha)\right) = \frac{\alpha}{2}$$

である．したがって，

$$F^{m-1}_{n-1}(1-\alpha) = \frac{1}{F^{n-1}_{m-1}(\alpha)}$$

であるので，

$$1-\alpha = P\left(\frac{\tilde{\delta}}{F^{m-1}_{n-1}(\alpha)} \leq \delta \leq \frac{\tilde{\delta}}{F^{m-1}_{n-1}(1-\alpha)}\right)$$

であるので，$100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\text{区間}\left[\ \frac{\tilde{\delta}}{F^{m-1}_{n-1}(\alpha)},\ \frac{\tilde{\delta}}{F^{m-1}_{n-1}(1-\alpha)}\ \right]$$

となる．

以上の結果から，二つの方法により生産された同一製品の品質特性のばらつきや精度が異なるかどうかを検定することを考える．

等分散性の検定

(1) 仮説を立てる．

$$\text{帰無仮説}\quad H_0:\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad \text{対立仮説}\quad H_1:\ \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

(2) それぞれの標本不偏分散 $\tilde{\sigma}^2_{x,m}$ と $\tilde{\sigma}^2_{y,n}$ を求める．

(3) 標本不偏分散を比較して値の大きな方を分子とする．

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^2_{x,m} \geq \tilde{\sigma}^2_{y,n} & \text{ならば}\quad \tilde{\delta} = \frac{\tilde{\sigma}^2_x}{\tilde{\sigma}^2_y},\ \ (f_u = m-1,\ f_l = n-1) \\ \tilde{\sigma}^2_{x,m} < \tilde{\sigma}^2_{y,n} & \text{ならば}\quad \tilde{\delta} = \frac{\tilde{\sigma}^2_y}{\tilde{\sigma}^2_x},\ \ (f_u = n-1,\ f_l = m-1) \end{cases}$$

(4) $\tilde{\delta} > F^{f_u}_{f_l}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ ならば仮説 H_0 を有意水準 5% で棄却する．

平均の差の区間推定

(1) 二つの母分散 σ_x^2 と σ_y^2 が既知であるとき，二つの母平均の有効推定量はそれぞれの標本平均

$$\bar{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \qquad \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

であり，それぞれの分布は正規分布 $N\left(m_x, \dfrac{\sigma_x^2}{m}\right)$ と $N\left(m_y, \dfrac{\sigma_y^2}{n}\right)$ に従う．統計量として標本平均の差をとると，これも正規分布に従う

$$\bar{X}_m - \bar{Y}_n \sim N\left(\gamma, \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}\right)$$

このことから変数が一つのみの区間推定となり，先に得られた結果を適用して $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\text{区間}\left[\ (\bar{X}_m - \bar{Y}_n) - z(\alpha)\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}},\ (\bar{X}_m - \bar{Y}_n) + z(\alpha)\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}\ \right]$$

となり，棄却域は以下のようになる．

$$W = \left\{ |\bar{X}_m - \bar{Y}_n| \geq z(\alpha)\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}} \right\}$$

(2) 二つの母分散が等しい $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 (= \sigma^2)$ が未知であるとき，それぞれの標本不偏分散は

$$\tilde{\sigma}^2_{x,m} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_m)^2$$

$$\tilde{\sigma}_{y,n}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2$$

となる．よって，それぞれの偏差平方和は χ^2 分布に従う．

$$(m-1)\tilde{\sigma}_{x,m}^2 = \sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_m)^2 \sim \sigma^2\chi_{m-1}^2$$

$$(n-1)\tilde{\sigma}_{y,n}^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2 \sim \sigma^2\chi_{n-1}^2$$

これらを合わせた σ^2 の推定量は

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{m+n-2}\left\{(m-1)\tilde{\sigma}_{x,m}^2 + (n-1)\tilde{\sigma}_{y,n}^2\right\}$$

となり，これを合併標本分散といい，

$$(n+m-2)\tilde{\sigma}^2 \sim \sigma^2\chi_{n+m-2}^2$$

であるので，これは母分散 σ^2 の不偏推定量である．このことから変数が一つのみの区間推定となり，先に得られた結果を適用して $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\text{区間}\left[\ (\bar{X}_m - \bar{Y}_n) - t_{n+m-2}(\alpha)\tilde{\sigma}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ (\bar{X}_m - \bar{Y}_n) + t_{n+m-2}(\alpha)\tilde{\sigma}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\ \right]$$

となり，棄却域は以下のようになる．

$$W = \left\{|\bar{X}_m - \bar{Y}_n| \geq t_{n+m-2}(\alpha)\tilde{\sigma}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right\}$$

母集団の母平均を比較する場合には，等分散性の検定を行った後に母平均に関する検定を行わなければならない．以上の結果から，等分散性が採択された場合の母平均の差の検定が示される．等分散性が棄却された場合の母平均の差の検定については，結果のみを示すこととする．

二つの母平均の差の検定（母分散は等しい）

(1) 仮説を立てる．

$$\text{帰無仮説}\quad H_0:\ \mu_x = \mu_y \quad \text{対立仮説}\quad H_1:\ \mu_x \neq \mu_y$$

(2) それぞれの標本平均 $\bar{X}_m$ と $\bar{Y}_n$ ならびに標本不偏分散 $\hat{\sigma}^2_{x,m}$ と $\hat{\sigma}^2_{y,n}$（あるいは平方和 $S^2_{x,m}$ と $S^2_{y,n}$）を求める．

(3) 次の合弁標本分散を導出する．

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(m-1)\tilde{\sigma}^2_{x,m} + (n-1)\tilde{\sigma}^2_{y,n}}{m+n-2} = \frac{S^2_{x,m} + S^2_{y,n}}{m+n-2}$$

(4) さらに，以下の値を導出する．

$$T = \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\tilde{\sigma}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

(5) $|T| \geq t_{n+m-2}(\alpha)$ ならば仮説 H_0 を有意水準 $\alpha\%$ で棄却する．

二つの母平均の差の検定（母分散が異なる）

(1) 仮説を立てる．

$$\text{帰無仮説}\quad H_0 :\ \mu_x = \mu_y \quad \text{対立仮説}\quad H_1 :\ \mu_x \neq \mu_y$$

(2) それぞれの標本平均 $\bar{X}_m$ と $\bar{Y}_n$ ならびに標本不偏分散 $\hat{\sigma}^2_{x,m}$ と $\hat{\sigma}^2_{y,n}$ を求める．

(3) 次の合弁自由度 f を導出する．

$$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{m-1} + \frac{(1-c)^2}{n-1}, \qquad \text{ただし，} c = \frac{\frac{\tilde{\sigma}^2_{x,m}}{m}}{\frac{\tilde{\sigma}^2_{x,m}}{m} + \frac{\tilde{\sigma}^2_{y,n}}{n}}$$

(4) さらに，以下の値を導出する．

$$T = \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2_{x,m}}{m} + \frac{\tilde{\sigma}^2_{y,n}}{n}}}$$

(5) $|T| \geq t_f(\alpha)$ ならば仮説 H_0 を有意水準 $\alpha\%$ で棄却する．

5 問題 8

8.3 成分含有率を調べる 2 つの試験方法 A，B がある．検出精度は計測されたデータのばらつきにより与えられ，その検出能力はデータの平均により与えられるものとする．これらの方法の差異を調べるために同一の試料を用いて繰り返し測定し，表 8.3 のような含有率データ (%) を得た．以下の問いに答えよ．

(1) それぞれの母分散を信頼率 95% で別々に区間推定せよ．

(2) 2 つの試験方法の検出精度は同じであると考えてよいか，有意水準 5% で検定せよ．

(3) 2 つの試験方法の検出能力は同じであると考えてよいか，有意水準 5% で検定せよ．

表 8.3 含有率のデータ (%)

A	18.8	18.1	18.0	18.4	17.9	18.7	18.5	18.1	18.0	17.6
B	18.4	19.2	17.8	19.0	18.1	18.2	19.4	18.9	19.3	19.0

8.4　2 台の機械 A，B により同一形状の製品を加工する．加工精度は計測されたデータのばらつきにより与えられ，その加工能力はデータの平均により与えられるものとする．これらの機械の差異を調べるために製品の寸法の誤差率を繰り返し測定し，表 8.4 のようなデータ (%) を得た．以下の問いに答えよ．

(1)　それぞれの母分散を信頼率 95% で別々に区間推定せよ．

(2)　2 つの機械の加工精度は同じであると考えてよいか，有意水準 5% で検定せよ．

(3)　2 つの機械の加工能力は同じであると考えてよいか，有意水準 5% で検定せよ．

表 8.4　寸法の誤差率のデータ (%)

A	3.59	3.60	3.62	3.61	3.57	3.57	3.65	3.56	3.60
B	3.69	3.77	3.32	4.16	3.87	3.68	3.84	3.60	