7　区間推定による検定

1　仮説検定

母数 θ が母数空間 Ω のある部分空間 ω に属するという記述を統計的仮説 (statistical hypothesis) といい，H_0： $\theta \in \omega$ で表す．ω が 1 点のみからなるときの H_0 を単純仮説 (simple hypothesis) といい，2 つ以上からなるときの H_0 を複合仮説 (comoposite hypothesis) という．このとき，母集団から抽出した標本に基づいて仮説を棄却しない（つまり，採択 (accept) する）か棄却 (reject) するかを決定することを仮説検定 (testing hypothesis) という．仮説検定は，積極的に仮説が真であることを主張することができるわけではなく，ただ仮説が真でないことをある確率のもとで主張するものである．それゆえ，仮説は棄却されることを期待して立てられるべきであり，これを帰無仮説 (null hypothesis) という．

いま，未知母数 θ が特定の値 θ_o であるのではないかという仮説 H_0： $\theta = \theta_o$ を検定することを考える．そのために，母集団から大きさ n の標本 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathrm{T}}$ を抽出し統計量 $g(\mathbf{X})$ をつくり，その分布を求める．ここで，仮説 H_0 が真であるという条件の下で統計量 $g(\mathbf{X})$ が領域 W に含まれる確率が α となる

$$P(g(\mathbf{X}) \in W | H_0) = \alpha$$

を統計量 $g(\mathbf{X})$ の分布にあらかじめ定めておく．観測された標本値 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ から $g(\mathbf{x})$ を求め，これが領域 W に含まれれば仮説 H_0 を棄却し，それ以外では棄却しないとする．仮説 H_0 が棄却されたときには検定の結果が有意 (significant) であったという．そのため，領域 W は棄却域 (critical region) といい，確率 α を有意水準 (significant level) という．一般には有意水準として 0.05 か 0.01 が用いられる．特に有意水準が 0.05 であるときに仮説が棄却されたときのことを，検定の結果は高度に有意であるという．

2　検定の基準

仮説 H_0 は真であるのか偽のどちらかである．そこで，仮説 H_0 は真でなければ他の仮説 H_1 が真であるとする．このような仮説 H_1 のことを仮説 H_0 の対立仮説 (alternative) という．帰無仮説 H_0： $\theta \in \omega$ に対する対立仮説は一般に H_1： $\theta \in \Omega - \omega$ となる．仮説 H_0 の検定には次の二つの誤りが存在する．

第一種の過誤 仮説 H_0 が真であるにもかかわらず棄却する場合．これを第一種の過誤 (type I error: TIE) あるいは生産者リスク (producer's risk) ともいう．

第二種の過誤 仮説 H_0 が偽であるにもかかわらず棄却しない場合．これを第二種の過誤 (type II error: TIIE) あるいは消費者リスク (consumer's risk) ともいう．

先にも述べたように，有意性検定では仮説が棄却されることを前提としている．そのため，もしも帰無仮説 H_0 が真であればとても観測されない統計量の領域を棄却域とし，そのなかの値が出てくれば帰無仮説を棄却する．したがって，帰無仮説が真であってたまたま（確率 α で) 棄却域の値が観測されることにより棄却されることがある．これが TIE である．単純帰無仮説 $H_o:\ \theta = \theta_o$ では TIE を犯す確率 $P(X \in W|\theta_o)$ は有意水準 α であるので，有意水準を危険率 (critical level) ともいう．

また，帰無仮説 H_0 が偽であるにもかかわらず，たまたま (確率 β で) 統計量の値が棄却域に入らなかったために，帰無仮説が棄却されないことがある．これが TIIE である．確率 β は対立仮説が真であるもとで統計量の値が棄却域に入らない確率ともいえる．そこで，単純対立仮説 $H_1:\ \theta_1 \in \Omega - \omega$ が真であるとき，TIIE を犯さない確率 $P(X \in W|\theta_1) = 1 - \beta$ を検定 W の検出力 (power) という．さらに，仮説 H_1 が複合対立仮説であるときの検出力 $P(X \in W|\Omega - \omega)$ は $1 - \beta(\theta, W)$ で表され検出力関数 (power function) という．

表 8.1 母集団の状態と検定結果

		検定結果	
		仮説を採択	仮説を棄却
母集団の状態	仮説が真	正	TIE
	仮説が偽	TIIE	正

表 8.2　検定結果の確率

		検定結果	
		仮説を採択	仮説を棄却
母集団の状態	仮説が真	$1-\alpha$ 信頼水準	α 有意水準
	仮説が偽	$\beta(\theta, W)$	$1-\beta(\theta, W)$ 検出力

確率変数 $X_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ は独立で同一の確率分布関数に従うものとする．その同時確率密度関数は

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=0}^{n} p_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}_i|\theta)$$

である．いま，帰無仮説 $H_0:\ \theta = \theta_0$，対立仮説 $H_1:\ \theta = \theta_1$ ともに単純仮説の場合を考える．望ましい検定とは，TIE の確率があらかじめ決められた α 以下

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_0) = \int_W p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta_0) d\mathbf{x} \leq \alpha$$

となる条件の下で，TIIE の確率が最大となる，つまり検出力

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_1) = \int_W p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta_1) d\mathbf{x}$$

が最大となるような検定 W_o である．このような検定 W_o を有意水準 α の最強力検定 (most powerful test: MPT) という．ともに複合仮説の場合には，$\theta_0 \in \omega$，$\theta_1 \in \Theta_1$ となる．もし，すべての θ_0 に対する条件の下で，すべての θ_1 に対して最大となる検定 W_o が存在するなら，このような検定 W_o を有意水準 α の一様最強力検定 (uniformly most powerful test: UMPT) という．

3　ネイマン・ピアソンの定理

以下の条件を満たす検定 W_o を考える．

$$W_o = \left\{ x \;\middle|\; \frac{p_X(x|\theta_1)}{p_X(x|\theta_0)} > c \right\}$$

かつ

$$\int_{W_o} p_X(x|\theta_0) dx = \alpha$$

ここで，c は正定数である．このとき，W_o は $H_0:\ \theta = \theta_0$ を $H_1:\ \theta = \theta_1$ に対して検定する有意水準 α の MPT である．このことをネイマン・ピアソン (Neyman-Pearson) の定理という．

証明 ここで，標本値 x の関数である検定関数 (test function) を $\phi(x)$, $(0 \leq \phi(x) \leq 1)$ で表し，以下のように定義する．

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in W \\ 0, & x \notin W \end{cases}$$

このような検定関数 $\phi(x)$ を定義することは検定 W を定めることと同値である．

検定関数を用いると MPT は，TIE の確率があらかじめ決められた α 以下

$$\int \phi(x) p_X(x|\theta_0) dx \leq \alpha$$

となる検定の中で，TIIE の確率が最小となる，つまり検出力

$$\int \phi(x) p_X(x|\theta_1) dx$$

が最大となるような検定関数 $\phi(x)$ を求めることである．このとき，検定 W_o に対する条件は

$$\phi_o(x) = \begin{cases} 1, & p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0) > 0 \\ 0, & p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0) < 0 \end{cases}$$

かつ

$$\int \phi_o(x) p_X(x|\theta_0) dx = \alpha$$

とかける．そこで，TIE の確率があらかじめ決められた α 以下となる任意の検定関数 $\phi(x)$ に対して，$\phi_0(x)$ の検出力が

$$\int \phi_o(x) p_X(x|\theta_1) dx \geq \int \phi(x) p_X(x|\theta_1) dx$$

となることを示せばよい．そこで，

$$\begin{aligned} &\int \phi_o(x) p_X(x|\theta_1) dx - \int \phi(x) p_X(x|\theta_1) dx \\ &\geq \int \phi_o(x) p_X(x|\theta_1) dx - \int \phi(x) p_X(x|\theta_1) dx \\ &- c\left(\int \phi_o(x) p_X(x|\theta_0) dx - \int \phi(x) p_X(x|\theta_0) dx\right) \\ &= \int (\phi_o(x) - \phi(x))(p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0)) dx \end{aligned}$$

よって，被積分関数は検定関数 $\phi_o(x)$ に関する場合分けが

$$\begin{cases} \phi_o(x) = 1 \geq \phi(x) & p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0) > 0 \\ \phi_o(x) = 0 \leq \phi(x) & p_X(x|\theta_1) - c\ p_X(x|\theta_0) < 0 \end{cases}$$

となることから非負であり，これにより定理が証明された．

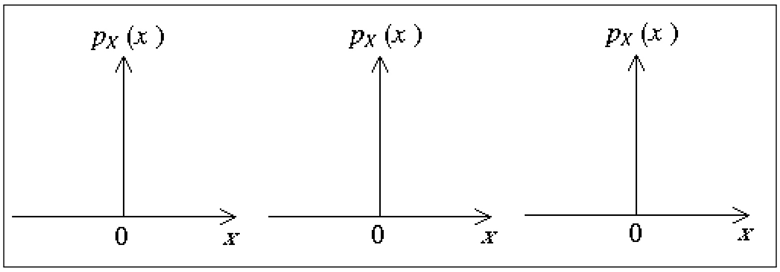

図 1: 対立仮説による棄却域の相違

対立仮説の違いと検出力曲線

ところで，帰無仮説が $H_0:\ \theta = \theta_0$ であるときに，対立仮説が複数の点 $\theta \in \Omega - \theta_0$ からなる複合仮説である場合を考える．特にこれらが帰無仮説 $\theta \in \theta_0$ の両側に存在するなら両側仮説 (two-sided hypothesis) という．

$$\text{両側検定} \quad \begin{cases} H_0:\ \theta = \theta_0 & \text{（帰無仮説）} \\ H_1:\ \theta \neq \theta_0 & \text{（対立仮説）} \end{cases}$$

それに対し，仮説が $H_1:\ \theta < \theta_0$ のときを左側仮説 (left-sided hypothesis)，

$$\text{左側検定} \quad \begin{cases} H_0:\ \theta = \theta_0 & \text{（帰無仮説）} \\ H_1:\ \theta < \theta_0 & \text{（対立仮説）} \end{cases}$$

また，仮説が $H_1:\ \theta > \theta_0$ のときを右側仮説 (right-sided hypothesis) といい，

$$\text{右側検定} \quad \begin{cases} H_0:\ \theta = \theta_0 & \text{（帰無仮説）} \\ H_1:\ \theta > \theta_0 & \text{（対立仮説）} \end{cases}$$

これらは片側仮説 (one-sided hypothesis) といわれる．これら対立仮説の違いに応じて棄却域の設定も異なることとなる．

ある与えられた有意水準 α に対して，3 種類の対立仮説を考えることができる．これらの仮説を比較するための評価基準となるのが検出力である．ここでは，母分散 σ^2 が既知であり，母平均 m が未知である正規分布 $[N(m, \sigma^2)]$ から無作為抽出された確率変数 $X_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ から母平均 m を仮説検定することを考える．そこで，帰無仮説 $H_0:\ m = m_0$ を対立仮説 $H_1:\ m = m_1$ に対して検定する．確率ベクトル $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^{\mathrm{T}} \in \Re^n$ の同時確率密度関数は

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

である．ネイマン・ピアソンの定理から棄却域 W_o は

$$W_o = \left\{ x \ \middle|\ \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m_1)}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m_0)} > c \right\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2}}$$

であり，すなわち

$$\bar{x}_n > \frac{\sigma^2}{n(m_1-m_0)}\left\{\log c + \frac{n}{2\sigma^2}\left(m_1^2-m_0^2\right)\right\} \triangleq c'$$

を満たす $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \Re^n$ であり (条件 1)，かつ，この棄却域 W_o は

$$\int_{W_o} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m_0)dx = \alpha$$

を満たさなければならない (条件 2)．

右側仮説　対立仮説が H_1： $m > m_0$ である場合．

帰無仮説 H_0 の下では $\bar{X}_n \sim N\left(m_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ であるので，これを標準変換した $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m_0)}{\sigma}$ が標準正規 $[N(0,1)]$ に従うことから，

$$\begin{aligned}
\int_{W_o} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|m_0)dx &= P(\bar{X} > c'|m_0) \\
&= P\left(Z > \frac{\sqrt{n}(c'-m_0)}{\sigma}\right) \\
&= \int_{\frac{\sqrt{n}(c'-m_0)}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \alpha
\end{aligned}$$

となり，標準正規 $[N(0,1)]$ の右片側 $100\alpha\%$ 点 $z(2\alpha)$ を正規分布表から求めると

$$z(2\alpha) = \frac{\sqrt{n}(c'-m_0)}{\sigma}$$

となるので

$$c' = m_0 + z(2\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

が決定できる．よって，帰無仮説 H_0： $m = m_0$ の対立仮説 H_1： $m > m_0$ に対する UMPT は以下のようになる．

(a1)　$\bar{x}_n > m_0 + z(2\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow H_0$ を棄却

(a2)　$\bar{x}_n \leq m_0 + z(2\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow H_0$ を採択

左側仮説　対立仮説が H_1： $m < m_0$ である場合．

右側仮説の場合と同様にして，帰無仮説 H_0： $m = m_0$ の対立仮説 H_1： $m < m_0$ に対する UMPT は以下のようになる．

(a1) $\quad \bar{x}_n < m_0 + z(2\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow H_0$ を棄却

(a2) $\quad \bar{x}_n \geq m_0 + z(2\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow H_0$ を採択

両側仮説 対立仮説が $H_1: \ m \neq m_0$ である場合.

まず，右側仮説において得られた検定方式を帰無仮説 $H_0: \ m = m_0$ の対立仮説 $H_1: \ m = m_1 \ (\neq m_0)$ に対する検定に用いた場合を考える (このときの対立仮説は複合仮説ではなく単純仮説であることに注意する)．対立仮説 H_1 の下では $\bar{X}_n \sim N\left(m_1, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ であるので，これを標準変換した $Z = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m_1)}{\sigma}$ が標準正規 $[N(0,1)]$ に従うことから，その検出力は

$$
\begin{aligned}
1 - \beta(m_1) &= P(\bar{X}_n > c' | m_1) \\
&= P\left(\bar{X}_n > m_0 + z(2\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \middle| \ m_1\right) \\
&= P\left(Z > \frac{\sqrt{n}(m_0 - m_1)}{\sigma} + z(2\alpha)\right) \\
&= \int_{\sqrt{n}\delta + z(2\alpha)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \triangleq 1 - \beta(\delta)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\delta = \dfrac{m_0 - m_1}{\sigma}$ である．

つぎに，左側仮説において得られた検定方式を帰無仮説 $H_0: \ m = m_0$ の対立仮説 $H_1: \ m = m_1 \ (\neq m_0)$ に対する検定に用いた場合を考える．右側仮説の場合と同様にして，その検出力は

$$
\begin{aligned}
1 - \beta(m_1) &= P(\bar{X}_n < c' | m_1) \\
&= P\left(\bar{X}_n < m_0 - z(2\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \middle| \ m_1\right) \\
&= P\left(Z < \frac{\sqrt{n}(m_0 - m_1)}{\sigma} - z(2\alpha)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\delta - z(2\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \triangleq 1 - \beta(\delta)
\end{aligned}
$$

となる．

いま，与えられた n に対して有意水準 α を指定すると，横軸に δ をとり，縦軸に検出力 $1 - \beta(m_1)$ をとり図示すると図 8.2 のようになる．これを検出力曲線という．

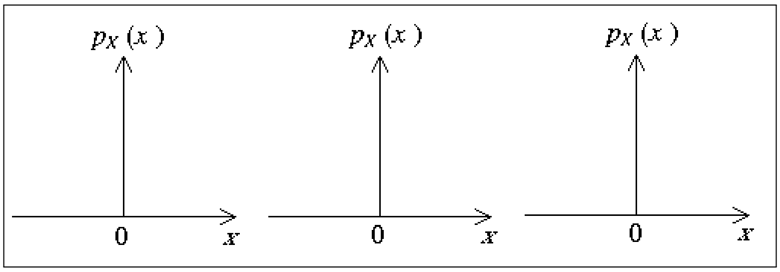

図 2: 検出力曲線

図 8.2 からわかるように，右側検定を両側仮説の場合に用いると，$\delta < 0$ つまり $m_0 < m_1$ では最もよい検定であるが，$\delta > 0$ つまり $m_0 > m_1$ では最も悪い検定といえる．左側検定を両側仮説の場合に用いると，この逆となる．よって，この両側検定の場合では条件 1 と条件 2 を同時に成立させる任意の δ に対する UMPT が存在しないこととなる．一般的にも UMPT が存在することが希なため，これとは異なる望ましい検定方式が必要である．

そこで，帰無仮説 $H_0:\ \theta \in \omega$ を対立仮説 $H_1:\ \theta \in \Omega - \omega\ (= \Omega_1)$ に対して検定するときの条件である，TIE の確率があらかじめ決められた有意水準 α 以下

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_0) = \int_W p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\theta_0)d\mathbf{x} \le \alpha, \qquad (\theta_0 \in \omega)$$

となることに加えて，これが TIIE の確率 $\beta(\theta, W)$ 以下

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_0) \le P(\mathbf{X} \in W|\theta_1), \qquad (\theta_0 \in \omega,\ \theta_1 \in \Omega_1)$$

となる条件を満たす検定 W を有意水準 α の不偏検定 (unbiased test) という．したがって，任意の θ_1 に関して TIIE の確率が最大となるような検定 W_o

$$P(\mathbf{X} \in W|\theta_1) \le P(\mathbf{X} \in W|\theta_1), \qquad (\theta_1 \in \Omega_1)$$

が存在すれば，このような検定 W_o を有意水準 α の一様最強力不偏検定 (uniformly most powerful unbiased test: UMPUT) という．

先ほどの両側検定の場合では UMPT は存在しなかったが，UMPUT は以下のようになることが知られている．

(a1) $\bar{x}_n < m_0 - z(\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ あるいは $m_0 + z(\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}_n \ \longrightarrow\ H_0$ を棄却

(a2) $m_0 - z(\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x}_n \le m_0 + z(\alpha)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \longrightarrow\ H_0$ を採択

この UMPUT に対する検出力 $1 - \beta(m_1)$ は以下のようになる．

$$1 - \beta(m_1) = 1 - P\left(m_0 - z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}_n \le m_0 + z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}|m_1\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{\sqrt{n}(m_0 - m_1)}{\sigma} - z(\alpha) \le Z \le \frac{\sqrt{n}(m_0 - m_1)}{\sigma} + z(\alpha)\right)$$
$$= 1 - \int_{\sqrt{n}\delta - z(\alpha)}^{\sqrt{n}\delta + z(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \triangleq 1 - \beta(\delta)$$

4 区間推定

標本 $\mathbf{X}$ から未知母数の関数 $f(\theta)$ を推定するのに二つの統計量 $g_l(\mathbf{X})$ と $g_u(\mathbf{X})$ を求めて，

$$P(g_l(\mathbf{X}) \le f(\theta) \le g_u(\mathbf{X})) \ge 1 - \alpha$$

として推定することを区間推定 (interval estimation) という．区間 $[g_l(\mathbf{X}), g_u(\mathbf{X})]$ を $f(\theta)$ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間 (confidence interval) といい，区間の両端のことを信頼限界 (confidence limit) という．$1-\alpha$ は信頼度 (confidence coefficient) であり，0.95 あるいは 0.99 が用いられることが多い．

実際に標本を得ることにより信頼区間が求まると，その区間が未知母数を含む確率は 0 か 1 であり，$1-\alpha$ というわけではない．つまり，信頼度が $1-\alpha$ であるということは，大きさ n の標本を m 組とってそれぞれについて信頼区間を求めると，これら m 組の信頼区間のうち $100(1-\alpha)\%$ のものが未知母数の真値を含んでいることを示している．

区間推定は仮説検定と密接に関係しており，それを利用して信頼区間を求めることができる．まず，$g_l(\mathbf{X}) \le f(\theta) \le g_u(\mathbf{X})$ が $\mathbf{X} \notin W$ とすると

$$P(g_l(\mathbf{X}) \le f(\theta) \le g_u(\mathbf{X})) = P(\mathbf{X} \notin W) \ge 1 - \alpha$$

となる．よって，$P(\mathbf{X} \in W) \le \alpha$ となる．ここで，W を仮説 H_0 : $f(\theta) = f(\theta_o)$ の検定を行うときの有意水準 α の棄却域と見なすことができる．その結果，仮説 H_0 の対立仮説 H_1 : $f(\theta) \ne f(\theta_o)$ に対する有意水準 α の検定 W を定め，$\mathbf{x} \notin W$ から $g_l(\mathbf{x})$ と $g_u(\mathbf{x})$ を決定すればよい．

4.1 一つの母集団における検定

平均の区間推定

(1) 確率変数 $X_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ からの無作為標本とする．ここで，母平均 m が未知母数で母分散 σ^2 は既知であるとする．母平均の有効推定量は標本平均

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

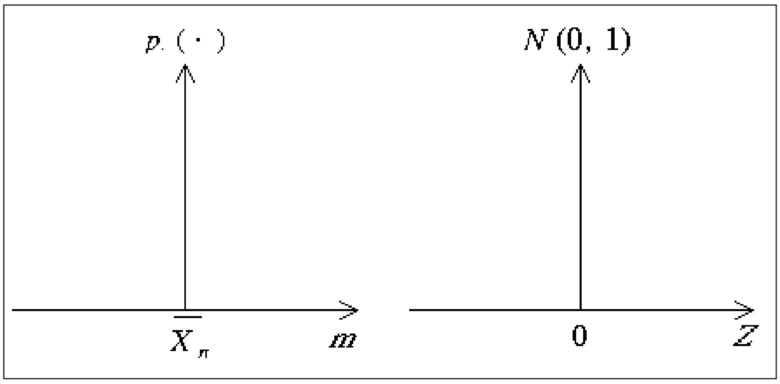

図 3: 信頼区間と $N(0,1)$ の棄却域

であり，標本平均 $\bar{X}_n$ の分布は正規分布 $N\left(m, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$ に従う．これを標準化した確率変数 Z は標準正規分布に従う．

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

よって，標準正規分布の両側 α 点 $z(\alpha)$ に対して，

$$1 - \alpha = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma}\right| \leq z(\alpha)\right)$$

となり，母平均 m についてとくと

$$1 - \alpha = P\left(\bar{X}_n - z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X}_n + z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

このことから $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\text{区間}\left[\ \bar{X}_n - z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right]$$

となり，棄却域は以下のようになる．

$$W = \left\{|\bar{X}_n - m| \geq z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \Longleftrightarrow W = \{|Z| \geq z(\alpha)\}$$

(2)　つぎに，母分散 σ^2 も未知であるとする．この場合は先に導出された母平均 m の信頼区間が求められない．そこで，標本不偏分散

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

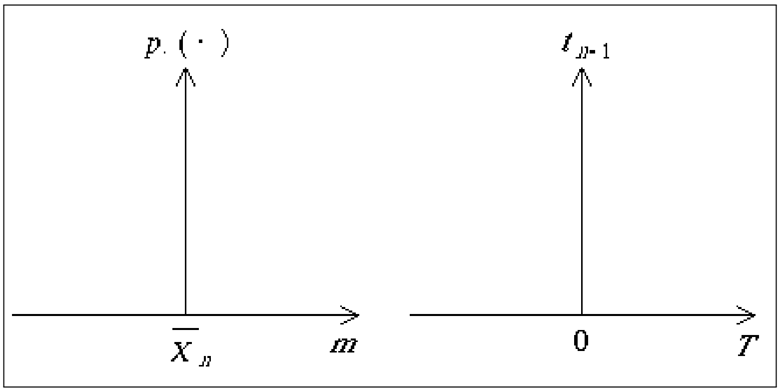

図 4: 信頼区間と t_{n-1} の棄却域

を用いる．母平均の有効推定量である標本平均を T 変換した確率変数 T は自由度 $n-1$ の t 分布に従う．

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\tilde{\sigma}_n} \sim t_{n-1}$$

よって，t_{n-1} の両側 α 点 $t_{n-1}(\alpha)$ に対して，

$$1-\alpha = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\tilde{\sigma}_n}\right| \leq t_{n-1}(\alpha)\right)$$

となり，母平均 m についてとくと

$$1-\alpha = P\left(\bar{X}_n - t_{n-1}(\alpha)\frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X}_n + t_{n-1}(\alpha)\frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right)$$

このことから $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\text{区間}\left[\ \bar{X}_n - t_{n-1}(\alpha)\frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + t_{n-1}(\alpha)\frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\ \right]$$

となり，棄却域は以下のようになる．

$$W = \left\{|\bar{X}_n - m| \geq t_{n-1}(\alpha)\frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right\} \Longleftrightarrow W = \{|T| \geq t_{n-1}(\alpha)\}$$

以上の結果から，母平均 m が設定・指示された基準値 m_o と異なるかどうかを検定することを考える．一般的に，実際の場合は母分散 σ^2 の値は未知であるため t 表を利用する．

母平均と基準値との差の検定（母分散は未知）

(1) 仮説を立てる.

$$\text{帰無仮説}\quad H_0:\ m = m_o \quad \text{対立仮説}\quad H_1:\ m \neq m_o$$

(2) 標本平均 $\bar{S}_n$ と標本不偏分散 $\tilde{\sigma}_n^2$ を求める.

(3) T 変換を施す.

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{S}_n - m)}{\tilde{\sigma}_n} \sim t_{n-1}$$

(4) $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$ ならば仮説 H_0 を有意水準 $\alpha\%$ で棄却する.

分散の区間推定

確率変数 $X_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ からの無作為標本とする．ここで，母平均 m と母分散 σ^2 が未知とする．やはり，標本不偏分散 $\tilde{\sigma}_n^2$ を用いて母分散 σ^2 の区間推定をする．そこで，標本分散 $\bar{\sigma}^2$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

から導かれる確率変数を考えると

$$\chi = \frac{n\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

となる．つまり，確率変数 χ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う．よって，χ_{n-1}^2 の上側 $\dfrac{\alpha}{2}$ 点 $\chi_{n-1}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ と上側 $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ 点 $\chi_{n-1}^2\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ に対して，

$$1 - \alpha = P\left(\chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

となり，母分散 σ^2 についてとくと

$$1 - \alpha = P\left(\frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1}^2(1 - \frac{\alpha}{2})} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})}\right)$$

このことから $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\text{区間}\left[\ \frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1}^2(1 - \frac{\alpha}{2})},\ \frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})}\ \right]$$

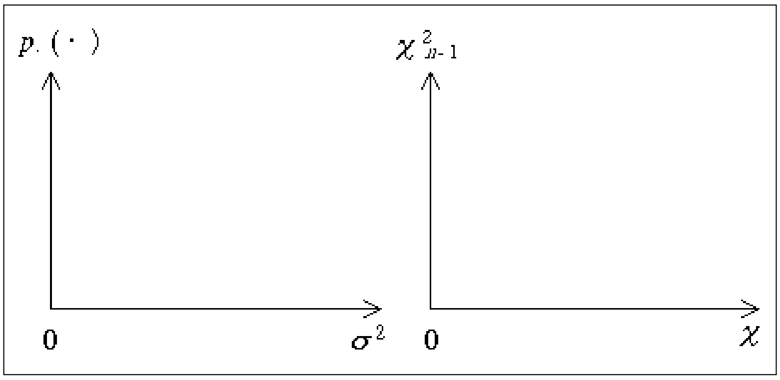

図 5: 信頼区間と χ^2_{n-1} の棄却域

となり，棄却域は以下のようになる．

$$W = \left\{ |\sigma^2| \geq \frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})} \right\}$$

以上の結果から，特性のばらつきや精度を与える母分散 σ^2 が公称値 σ_o^2 と異なるかどうかを検定することを考える．このためには χ^2 表を利用する．

母分散と基準値との差の検定（母分散は未知）

(1) 仮説を立てる．

帰無仮説 $H_0:\ \sigma^2 = \sigma_o^2$ 対立仮説 $H_1:\ \sigma^2 \neq \sigma_o^2$

(2) 標本平均 $\bar{X}_n$ と標本不偏分散 $\tilde{\sigma}_n^2$ を求める．

(3) 次の値を導出する．

$$\chi = \frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\sigma_o^2}$$

(4) $\chi \leq \chi^2_{n-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ または $\chi^2_{n-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \leq \chi$ ならば仮説 H_0 を有意水準 α% で棄却する．

5 問題 8

8.1 あるネジの直径の長さの規格中心は 24.4(mm) である．生産されたネジを計測したところ表 8.1 を得た．以下の問いに答えよ．

(1)　母平均を信頼率 95% で区間推定せよ．

(2)　このネジは規格中心に母平均があると考えてよいか，有意水準 5% で検定せよ．

表 8.1　直径の長さのデータ

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mm	24.6	24.5	24.3	24.9	24.4	24.8	25.0	24.9	25.1	24.2

8.2　ある製品を袋詰めしたとき，望ましい重量のばらつきの規格は $\sigma^2 = 0.01$ 程度であるとする．袋詰めの工程で計測された重量データ (kg) が表 8.2 であるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　母分散を信頼率 95% で区間推定せよ．

(2)　この袋詰めの工程は規格どうりであると考えてよいか，有意水準 5% で検定せよ．

表 8.2　製品重量のデータ

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kg	35.2	35.2	35.2	34.8	35.1	35.0	35.1	35.5	35.1	35.0
No.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
kg	35.0	35.1	35.1	35.1	34.9	34.7	34.9	34.9	35.1	34.8