確率・統計学の復習用まとめ

正規母集団の標本分布
推定量とは
統計量（標本平均，標本分散，標本不変分散，標本分散比）
不偏推定量とは
確率変数の変数変換と標準化
　標本平均(分散既知)が標準正規分布に従う証明
標準正規分布表
統計量の標本分布
　標本平均(分散未知)がT分布に従う証明
　標本分散がχ二乗分布に従う証明
　標本分散比がF分布に従う証明
中心極限定理

5.3.2　正規母集団の標本分布

本章前半で説明したように，統計的推論の基本的な課題は，与えられた母集団の，興味ある統計量（標本平均，標本分散等）が従う，確率分布である標本分布を求める問題である．

正規母集団から抽出された標本に基づく統計量の標本分布を計算する理論を，正規標本論(normal sample theory) と言い，この章では，正規標本論の解説を行うことになる．本章では，正規母集団を対象として，標本平均，標本分散，および標本分散比の標本分布について説明する．全体的な概念図を，図-5.2 に示す．

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は，独立に同一 ($i.i.d.$) の正規分布 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ から，単純無作為抽出された標本である．

標本平均： このとき標本平均は，次のように定義される．

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5.7}$$

標本分散： また，標本分散は，次のように定義される．

$$S_X^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{5.8}$$

標本分散比： さらに，別の独立な正規母集団があり，この母集団から無作為抽出された標本 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ は，独立に同一の正規分布 $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ に従うとすると，その標本分散 s_Y^2 は，次のように定義される．

$$S_Y^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 \tag{5.9}$$

以上の準備の基で，標本分散比 F は，次式により定義される．

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \tag{5.10}$$

本章では，ここに示した 3 つの統計量，すなわち標本平均，標本分散及び標本分散比が，正規母集団を仮定したとき，どのような標本分布に従うかを説明する．ここで説明する内容は，この章に続く推定，仮説検定及び回帰分析の章において，重要な基礎を与える．

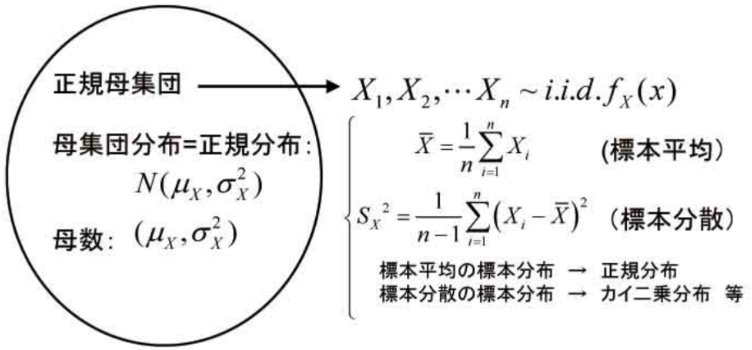
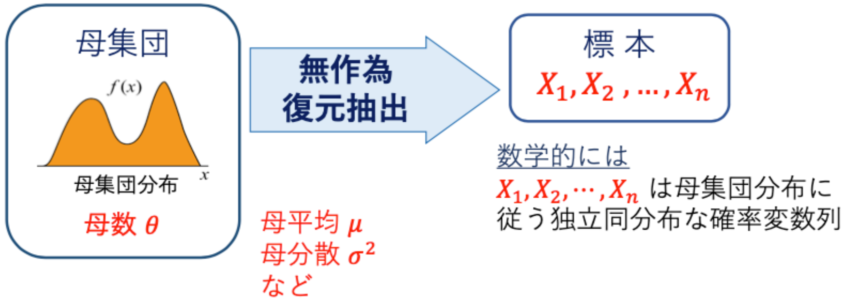


図 5.2: 母集団からの標本の抽出と統計量

推定量（estimator)



定義　推定量　　$\hat{\theta} = T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

※ データから計算される $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は推定値という．

5.2.1 標本平均

$X_i \sim i.i.d. f_X(x) (i=1,\dots,n)$ のとき，標本平均は，次のように，定義される．

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5.1}$$

標本平均は，確率変数 X_i の関数なので，確率変数である．次に，この確率変数の，平均と分散を計算することにより，標本平均の性質を調べる．

(1) $\bar{X}$ **の平均**

標本平均の平均は，次のように計算される．

$$\begin{aligned} E\left[\bar{X}\right] &= E\left[\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n}E\left[X_1+\ldots+X_n\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_X = \frac{1}{n}n\mu_X = \mu_X \end{aligned} \tag{5.2}$$

従って，$E[\bar{X}] = \mu_X$ である．このように，期待値が真のパラメータに一致する性質（この場合は，標本平均の期待値が，真の平均 (=母平均) に一致）を，不偏性（unbiasness）という．

標本平均の分散は，次のように計算される．

$$\begin{aligned} Var\left[\bar{X}\right] &= E\left[(\bar{X}-\mu_X)^2\right] \\ &= E\left[\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\mu_X\right)^2\right] \\ &= E\left[\frac{1}{n^2}\left\{(X_1-\mu_X)+(X_2-\mu_X)+\ldots+(X_n-\mu_X)\right\}^2\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i-\mu_X)^2\right]+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}E\left[(X_i-\mu_X)(X_j-\mu_X)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_X^2+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sigma_{X_iX_j} \\ &= \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sigma_X^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

以上の誘導で，X_i と X_j の共分散 $\sigma_{X_iX_j} = E\left[(X_i-\mu_X)(X_j-\mu_X)\right] = 0$ となるのは，標本が母集団分布から独立に抽出され，独立な確率変数間の共分散は 0 であるからである．すなわち，

$$E\left[(X_i-\mu_X)(X_j-\mu_X)\right] = \begin{cases} \sigma_X^2 & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (i\neq j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.4}$$

が成り立っている．

以上の結果より，標本平均の標準偏差は，$\sigma_X/\sqrt{n}$ であり，n が増加すると，$1/\sqrt{n}$ に従って減少する．そして，n が無限大に近づくと，標準偏差は 0 に収束し，従って標本平均 $\bar{X}$ は，真の平均値 μ_X に収束する．

5.2.2 標本分散

標本分散は，普通次式により定義する．

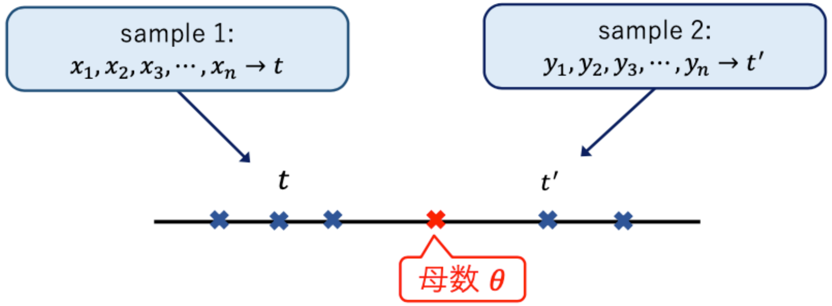
$$S_X^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \tag{5.5}$$

この定義で，全平方和が n ではなく $n-1$ で除されている点は注意を要する．これは，S_X^2 の期待値が，真の分散 σ_X^2 に一致し，不偏性を持つようにするためである．このことを，以下に示す．なお，この $(n-1)$ のことを自由度（degree of freedom）と言う[3]．

$$\begin{aligned}
E\left[S_X^2\right] &= \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} E\left[\left\{(X_i - \mu_X) - (\bar{X} - \mu_X)\right\}^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} E\left[\left\{(X_i - \mu_X) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_X)\right\}^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i - \mu_X)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(X_j - \mu_X)(X_k - \mu_X) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - \mu_X)(X_j - \mu_X)\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i - \mu_X)^2\right] + \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_j - \mu_X)(X_k - \mu_X)\right] \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} E\left[(X_i - \mu_X)(X_j - \mu_X)\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)} \left\{ n\sigma_X^2 + n\frac{1}{n^2} n\sigma_X^2 - n\frac{2}{n}\sigma_X^2 \right\} \\
&= \frac{1}{(n-1)} (n + 1 - 2)\sigma_X^2 = \sigma_X^2
\end{aligned} \tag{5.6}$$

以上より，$E[S_X^2] = \sigma_X^2$ が証明された．この証明でも，標本が独立に抽出されていることにより成り立つ式 (5.4) を用いていることに注意が必要である．

不偏推定量（unbiased estimator）



推定量 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は確率変数である

定 義　推定量 T が $E(T) = \theta$ を満たすとき，その推定量を不偏推定量という．

統計量	定義	標本分布	
標本平均（分散既知）	$Z = \dfrac{(\bar{X} - \mu_X)}{(\sigma_X/\sqrt{n})}$	標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．	→P. 6から説明
標本平均（分散未知）	$t = (\bar{X} - \mu_X)/(S_X/\sqrt{n})$	自由度 $(n-1)$ の t 分布 (式 (5.12)) に従う．	→P. 13から証明(B)
標本分散	$\chi^2 = (n-1)S_X^2/\sigma_X^2$	自由度 $n-1$ の χ^2 分布（式 (5.14)）に従う．	→P. 9から証明(A)
標本分散比	$F = \dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \cdot \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$	自由度 $(n-1, m-1)$ の F 分布 (式 (5.16)) に従う．	→P. 16から証明(C)

5.4　正規母集団の標本平均の標本分布

5.4.1　分散が既知の場合の標本平均の分布

5.2.1 節で示したように，母集団の性質にかかわらず，標本平均の $\bar{X}$ の平均は μ_X，分散は σ_X^2/n である．

母集団が正規母集団であれば，$\bar{X}$ はさらに，平均は μ_X，分散は σ_X^2/n の正規分布に従う．これは，分散 σ_X^2 が既知であると言う前提の下に求められた結果である点は，注意を要する．

以上のより，

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu_X)}{(\sigma_X/\sqrt{n})} \tag{5.11}$$

は，標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．

5.4.2　分散が未知の場合の標本平均の分布

一般には，母平均とともに母分散も未知であるから，分散は式 (5.8) で示した標本分散によって推定する必要がある．この場合，特に標本数 n が小さい場合，確率変数 $(\bar{X} - \mu_X)/(S_X/\sqrt{n})$ は，正規分布に従わなくなる．正確には，

$$t = (\bar{X} - \mu_X)/(S_X/\sqrt{n})$$

は，自由度 $(n-1)$ の t 分布に従う．

t 分布の確率密度関数は，次式により与えられる．

$$f_T(t) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma[\nu/2]}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-1/2(\nu+1)} \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{5.12}$$

ここに，ν(ニュー) は自由度，Γ はガンマ関数である[4]．t 分布の平均は 0，分散は $\nu/(\nu-2)$（ただし，$\nu > 2$）である．

5.5　正規母集団の標本分散の標本分布

5.5.1　標本分散の分布

式 (5.8) で示した標本分散の期待値をとると，それが母分散になることを 5.2.2 節で示した．

$$E\left[S_X^2\right] = \sigma_X^2 \tag{5.13}$$

従って，この標本分散は，不偏性を持つ．この性質は，正規母集団に限られるものではない点は，注意を要する．

正規母集団が仮定されている場合，

$$\chi^2 = (n-1)S_X^2/\sigma_X^2$$

は，自由度 $n-1$ の χ^2 分布（カイ二乗分布と読む）に従うことが知られている．

自由度 ν の χ^2 分布の，確率密度関数は，次のように与えれる．

$$f_{\chi^2}(\chi^2) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}(\chi^2)^{(\nu/2-1)}exp[-\chi^2/2] \tag{5.14}$$

5.5.2　標本分散の比の分布

２つの標本分散の比は，２つの母集団の性質を考える必要のある問題において，しばしば重要な役割を果たす．

式 (5.8) 及び (5.9) で定義した 2 つの異なる正規母集団より得られた標本分散，S_X^2 と S_Y^2 は，次の性質を満たす．

1. $(n-1)S_X^2/\sigma_X^2$ は，自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布に従う．
2. $(m-1)S_Y^2/\sigma_Y^2$ は，自由度 $(m-1)$ の χ^2 分布に従う．
3. S_X^2 と S_Y^2 は，独立である．

このとき，次の確率変数は，自由度 $(n-1, m-1)$ の F 分布をすることが，知られている．

$$F = \frac{\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}/(n-1)}{\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}/(m-1)} = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \cdot \frac{S_X^2}{S_Y^2} \tag{5.15}$$

ほとんどの実際問題では，２つの正規母集団の母分散が等しい（すなわち，$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$）と仮定される場合なので，確率変数 F は文字通り標本分散の比となる．

F 分布の確率密度関数，次式によって与えられる．

$$f_F(F) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu_X+\nu_Y)(\frac{\nu_X}{\nu_Y})^{\nu_X/2}F\ (\nu_X/2-1)}{\Gamma(\frac{\nu_X}{2})\Gamma(\frac{\nu_Y}{2})(1+\frac{\nu_X}{\nu_Y}F)^{(\nu_X+\nu_Y)/2}} \tag{5.16}$$

標本平均（分散既知）が 標準正規分布に従う説明

確率密度関数は積分の形で与えられるため、置換積分の考え方を応用することで、確率変数を変更したときの新しい確率密度関数を求めることができる。この記事では、そのような確率密度関数の変換公式について考える。

逆変換が一意に定義できる場合

M 次元確率変数 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_M)$ が、別の M 次元確率変数 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_M)$ に、 M 個の関数 $T_1,T_2,\cdots,T_M$ により、 $y_i=T_i(x_1,x_2,\cdots,x_M)$ （ただし、$i=1,2,\cdots,M$ ）のように変換される場合を考える。この変換をまとめて $\mathbf{y}=\mathbf{T}(\mathbf{x})$ と書き、また、その逆変換も $\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})$ と表す。

変換前・変換後にかかわらず、確率密度関数は必ず規格化条件（全範囲で積分すると 1 になる）を満たすので、 $\mathbf{x}\to\mathbf{y}$ の置換積分を行っても

$$\int_R p(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{R'}|\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}|p(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y}))d\mathbf{y}=1$$

が成り立つ。このとき、 R' は $\mathbf{y}$ の積分範囲、 $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}$ はこの変換のヤコビアンである。この式から、変換後の確率密度関数 $q(\mathbf{y})$ は、 $|\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}|p(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y}))$ と表せることがわかる。ここまでの議論を、 $\mathbf{T}$ が一次変換となる場合と併せて以下にまとめる。

> 確率変数 $\mathbf{x}$ についての確率密度関数 $p(\mathbf{x})$ を、 $\mathbf{y}=\mathbf{T}(\mathbf{x})$ により $\mathbf{y}$に変換するとき、 $\mathbf{y}$ の確率密度関数 $q(\mathbf{y})$ は、 $\mathbf{T}$の逆変換 $\mathbf{T}^{-1}$ を用いて次のように求められる。
>
> $$q(\mathbf{y})=|\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}|p(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})) \tag{1}$$
>
> ここで、 $\mathbf{T}$ が正則な $M\times M$ 行列 T と M 次元ベクトル $\mathbf{b}$ による一次変換 $\mathbf{y}=T\mathbf{x}+\mathbf{b}$ である場合は、
>
> $$q(\mathbf{y})=|T|^{-1}p(T^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{b})) \tag{2}$$
>
> が成り立つ。このとき、 $|T|$ は T の行列式である。
>
> さらに、 $M=1$ であるとき、すなわち、 $y=tx+b$ という変換を考える場合は、
>
> $$q(y)=\frac{1}{|t|}p(\frac{y-b}{t}) \tag{3}$$
>
> と表せる。

(2) 式の証明

$\mathbf{y}=\mathbf{T}(\mathbf{x})=T\mathbf{x}+\mathbf{b}$ より、 $\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})=T^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{b})$ である。ここで、この変換のヤコビアン $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}$ について考える。

逆行列 T^{-1} の i 行 j 列の要素を T_{ij}^{-1} と表し、また、 $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_M)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{11}^{-1} & T_{12}^{-1} & \cdots & T_{1j}^{-1} & \cdots & T_{1M}^{-1}\\ T_{21}^{-1} & T_{22}^{-1} & & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ T_{i1}^{-1} & T_{i2}^{-1} & \cdots & T_{ij}^{-1} & \cdots & T_{iM}^{-1}\\ \vdots & & & & \ddots & \vdots\\ T_{M1}^{-1} & \cdots & \cdots & T_{Mj}^{-1} & \cdots & T_{MM}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1-b_1\\ y_2-b_2\\ \vdots\\ y_j-b_j\\ \vdots\\ y_M-b_M \end{pmatrix}$$

より

$$x_i=T_{i1}^{-1}(y_1-b_1)+T_{i2}^{-1}(y_2-b_2)+\cdots+T_{ij}^{-1}(y_j-b_j)+\cdots+T_{iM}^{-1}(y_M-b_M)$$

なので

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j}=T_{ij}^{-1}$$

である。ここで、ヤコビアン $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}$ に対応するヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_j} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_M}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ \frac{\partial x_i}{\partial y_1} & \frac{\partial x_i}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_i}{\partial y_j} & \cdots & \frac{\partial x_i}{\partial y_M}\\ \vdots & & & & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial x_M}{\partial y_1} & \frac{\partial x_M}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_M}{\partial y_j} & \cdots & \frac{\partial x_M}{\partial y_M} \end{pmatrix}$$

について考えると、 $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ は i 行 j 列の要素となる。これが T_{ij}^{-1} と等しくなるため、ヤコビ行列は逆行列 T^{-1} そのものに等しいことがわかる。したがって、ヤコビアン $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}$ は逆行列 T^{-1} の行列式 $|T^{-1}|$ に等しい。

ここで、逆行列の行列式の公式

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

を用いると、

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = |T^{-1}| = \frac{1}{|T|} = |T|^{-1}$$

となり、以上の結果を (1) 式に代入することで、(2) 式が得られる。

(3) 式の証明

$y = tx + b$ より、$x = \frac{y-b}{t} = \frac{1}{t}y - \frac{b}{t}$ である。1 変数関数の置換積分の公式より

$$\int_R p(x)dx = \int_{R'} p(\frac{y-b}{t})\frac{dx}{dy}dy$$

$$= \int_{R'} \frac{1}{t}p(\frac{y-b}{t})dy$$

が成り立つ。ここで、変換後の確率密度関数 $q(y)$ が常に正の値を取ることを考えると、

$$q(y) = \frac{1}{|t|}p(\frac{y-b}{t})$$

と表されることがわかる。

3 確率変数の和の分布

3.1 平均，分散

n 個の確率変数 X_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を線形変換することにより得られる確率変数 Y_n

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$$

が従う分布の平均と分散は以下のようになる．

$$\mathrm{E}[Y_n] = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{E}[X_i]$$

$$\mathrm{V}[Y_n] = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{V}[X_i] + 2\sum_{i<j} c_i c_j \mathrm{C}[X_i, X_j]$$

証明

$$\mathrm{E}[Y_n] = \int \sum_{i=1}^{n} c_i x_i dF_X(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int x_i dF_X(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{E}[X_i]$$

$$\mathrm{V}[Y_n] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i - \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i]\right)^2\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i \left(X_i - \mathrm{E}[X_i]\right)\right\}^2\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \left(X_i - \mathrm{E}[X_i]\right)^2 + 2\sum_{i<j} c_i c_j \left(X_i - \mathrm{E}[X_i]\right)\left(X_j - \mathrm{E}[X_j]\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{E}\left[\left(X_i - \mathrm{E}[X_i]\right)^2\right] + 2\sum_{i<j} c_i c_j \mathrm{E}\left[\left(X_i - \mathrm{E}[X_i]\right)\left(X_j - \mathrm{E}[X_j]\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{V}[X_i] + 2\sum_{i<j} c_i c_j \mathrm{C}[X_i, X_j]$$

確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$に従うとき，その 1 次変換 $Y = a + bX$ （a ,b は定数）も正規分布 $N(a + b\mu , b^2\sigma^2)$ に従う．

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a + b\mu , b^2\sigma^2)$$

標準化 ※ 母分散 σ^2 が未知のときに使えない．

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

例 $X \sim N(2,5^2)$ を標準化すると

$$Z = \frac{X-2}{5} \sim N(0,1)$$

- 標準正規分布 (standard normal distribution)

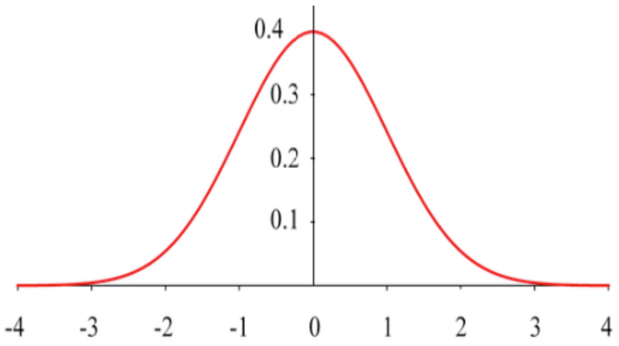
$N(0,1)$

平均値 $\mu = 0$

分散 $\sigma^2 = 1$

密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

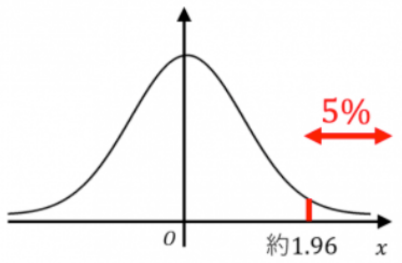


パーセント点

- 上側確率が c であるような点のことを、上側 c パーセント点と言います。
- 下側確率が c であるような点のことを、下側 c パーセント点と言います。
- 両側確率が c であるような点のことを、両側 c パーセント点と言います。

例えば、標準正規分布では、

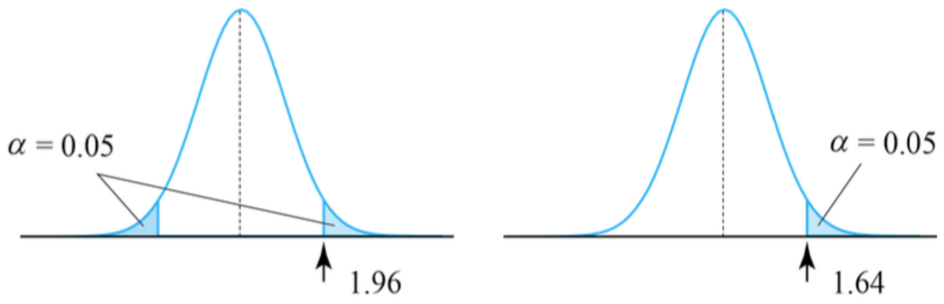
上側 5%点は、約 1.96 です。



同様に、下側 5%点は、約 −1.96 です。

両側 10%点は、約 1.96 です。

両側 α 点と上側 α 点



1.96 = 両側 5 % 点

= 上側 2.5 % 点

1.64 = 上側 5 % 点

= 両側 10 % 点

例題 3.10　X が正規分布 $N(-1, 2^2)$ に従うとき，

(1)　$P(X \le 2.29)$ を求めよ．

(2)　$P(X > x) = 0.01$ であるような x の値を求めよ．

標準正規分布表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1311	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

例

$P(Z \ge 2.18)$

$P(Z \ge 2.18)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2.18)$

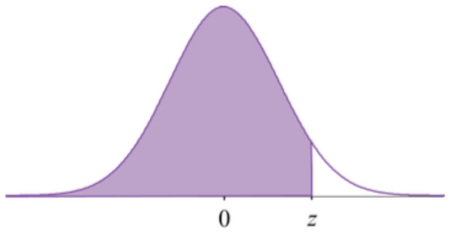
$= 0.5 - 0.4854$

$= 0.0146$

標準化　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ➡ $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(1)

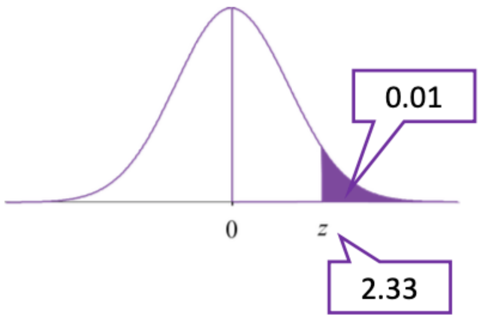
$$P(X \le 2.29) = P\left(\frac{X-(-1)}{2} \le \frac{2.29-(-1)}{2}\right)$$



$= P(Z \le 1.645)$

$= 0.5 + 0.45 = 0.95$

(2)　$$P(X > x) = P\left(\frac{X-(-1)}{2} > \frac{x-(-1)}{2}\right) = P\left(Z > \frac{x+1}{2}\right)$$



$P(Z > 2.33) = 0.01$

$\dfrac{x+1}{2} = 2.33$

$x = 3.66$

標本平均（分散未知）が T分布に従う説明

確率変数 X と Y は独立な確率変数で，X は標準正規分布 $N(0,1)$ に従い，Y は自由度 n のカイ自乗分布 χ_n^2 に従う．これらから導かれる

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

が従う分布

確率密度関数

$$p_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad (-\infty < x < \infty)$$

証明 確率変数 X と Y の同時確率密度関数は

$$p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}$$

となる．ここで，変数変換

$$T = \frac{X}{\sqrt{Yn}}, \qquad Y' = Y$$

を施すとヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{y'}n & \frac{t}{2\sqrt{ny'}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{y'}{n}}$$

となる．よって，新たな確率変数 T と Y' の同時確率密度関数は

$$p_{TY'}(t,y') = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}y'^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{1}{2}y'(1+\frac{t^2}{n})}$$

とできる．したがって T の確率密度関数は

$$p_T(t) = \int_0^\infty p_{TY'}(t,y')dy'$$

で与えられる．ここで，変数変換

$$\frac{1}{2}y'\left(1+\frac{t^2}{n}\right) = z$$

を施すと t 分布が得られる．

$$p_T(t) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty \left(\frac{2z}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-z}\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}dz$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(2)}ze^{-z}dz$$

ここで，被積分関数が Ga(2,1) であるので

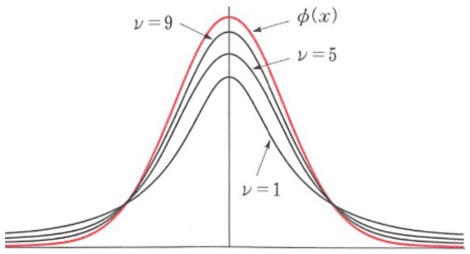
$$与式 = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

t 分布

確率変数 X, Y が独立であり，$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2_\nu$ であれば，

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$$

は自由度 ν の t 分布に従う．これを $T \sim t_\nu$ と書く．



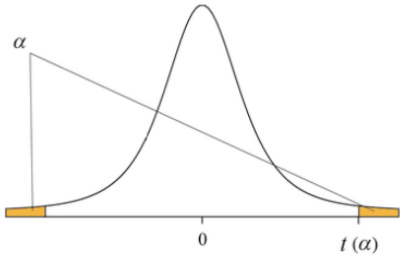
平均値

$$E(T) = 0 \quad (\nu \geq 2)$$

分散

$$V(T) = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (\nu \geq 3)$$

自由度が 20 の t 分布に従う確率変数 T の絶対値が，ある値を超える確率が 5% であるようにするには，その値をいくらにすればよいか?



$P(|T| \geq t_\nu(\alpha)) = \alpha$

$\nu = 20$

$\alpha = 0.05$

$t_{20}(0.05) = 2.086$

t-分布表

両側 α 点

$t_\nu(\alpha)$

$$P(|T| \geq t_\nu(\alpha)) = \alpha$$

ν \ α	.90	.80	.70	.60	.50	.40	.30	.20	.10	.05	.02	.01
1	.158	.325	.510	.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.142	.289	.445	.617	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4 303	6.965	9.925
3	.137	.277	.424	.584	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.134	.271	.414	.569	741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.132	.267	.408	.559	727	920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.131	.265	404	.553	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.129	.261	.398	.543	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.128	.259	.394	538	694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.128	.258	.393	.537	.692	868	1.076	1.345	1 761	2.145	2.624	2.977
15	.128	.258	393	.536	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.128	.258	.392	.535	690	.865	1.071	1.337	1.746	2 120	2.583	2.921
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2 110	2.567	2.898
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2 101	2.552	2.878
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.127	.256	.390	.532	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.127	.256	.390	531	.684	.856	1.058	1.316	1 708	2.060	2.485	2.787
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2056	2.479	2.779
27	127	.256	.389	.531	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2 052	2.473	2.771
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2 045	2.462	2.756
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.126	.255	.388	.529	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.126	254	.387	.527	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2 000	2.390	2.660
120	.126	.254	.386	.526	.677	.845	1.041	1.289	1.685	1.980	2.358	2.617
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

標本分散が カイ二乗分布に従う説明

表記揺れ「標本分散≈不偏分散≈不偏標本分散」「$\sigma^2 \approx \sigma_X^2$」など

不変分散 $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})$ を用いて，$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}$ が自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う

まず標準正規分布の場合（$\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$）に証明します。本質的な部分です。

▍証明の概略

一行目の要素が全て $\frac{1}{\sqrt{n}}$ であるような直交行列の一つを Q とする。

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

と変数変換する。

このとき，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ は互いに独立に平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従う（→補足1）。

また，$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2$

である（→補足2）。

つまり $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ は，標準正規分布に独立に従う $n-1$ 個の確率変数の二乗和で表現できたので，自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従うことが分かる。→正規分布の二乗和がカイ二乗分布に従うことの証明

補足1

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立に標準正規分布に従う

→ X_i たちの同時密度関数は $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}x^\top x)$

→（Q の行列式が 1 であることと $\|X\| = \|Y\|$ より）

Y_i たちの同時密度関数は $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}y^\top y)$

→ $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ は互いに独立に標準正規分布に従う

補足2

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$$

ここで，直交変換の性質 $\|X\| = \|Y\|$ を用いると上式は，

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_1^2$$

$$= \sum_{i=2}^{n} Y_i^2$$

一般の場合の証明

正規分布の標準化を使うだけです。

▍証明

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立に平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うので

$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ たちは互いに独立に標準正規分布に従う。

標準正規分布の場合にはさきほど証明したので，

$\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う。

ここで，$Z_i - \overline{Z} = \frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}$ なので，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従うことが分かる。

正規分布の二乗和がカイ二乗分布に従うことの証明

確率変数 X_i, $(i=1,2,\cdots,n)$ が独立で同一な標準正規分布 $N(0,1)$ で定義されているとし，これら n 個の自乗和

$$S_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

の従う分布．n は自由度 (degree of freedom) といわれる．

確率密度関数

$$p_X(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad (0 < x < \infty)$$

帰納法で証明するために，まずは $n=1$ の場合を計算します。

X が標準正規分布に従うとき，X^2 は自由度1のカイ二乗分布に従う

証明

標準正規分布の確率密度関数は，$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$

ここで，$y = x^2$ と変数変換すると，$\frac{dy}{dx} = 2x = 2\sqrt{y}$ であるので X^2 の従う確率密度関数は，

$$f_1(y) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y}{2})\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

（ただし，$Y = y$ となるのは $X = \sqrt{y}, -\sqrt{y}$ の二通りあるので頭に2倍がついている）

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{y}{2})$$

となる。$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ であり，これは自由度1のカイ二乗分布を表す。

一般の自由度の場合

帰納法を用います。畳み込みの計算をするだけです！

証明

$Y = X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2$ が自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従い，X_n^2 が自由度1のカイ二乗分布に従うとき，$Y + X_n^2$ が自由度 n のカイ二乗分布に従うことを示せばよい。

つまり，以下を証明すればよい：

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) f_1(x-t)dt$$

右辺を書き下してみると，指数関数部分が積分の外に出せる：

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^x t^{\frac{n-3}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

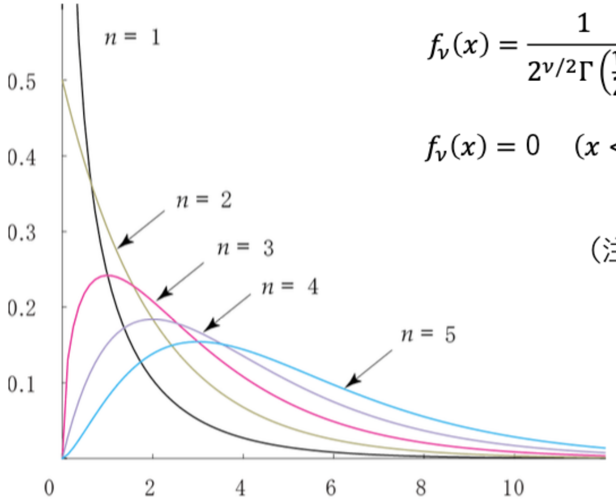
ここで $u = \frac{t}{x}$ と変数変換すると x が積分の外に出せる：

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n-3}{2}-\frac{1}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 u^{\frac{n-3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du$$

積分の部分はベータ関数の積分公式より $B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

よって，$\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$ が約分されて自由度 n のカイ二乗分布の確率密度関数と一致する。

自由度 ν のカイ 2 乗分布（χ^2_ν-分布）



$$f_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x \geq 0),$$

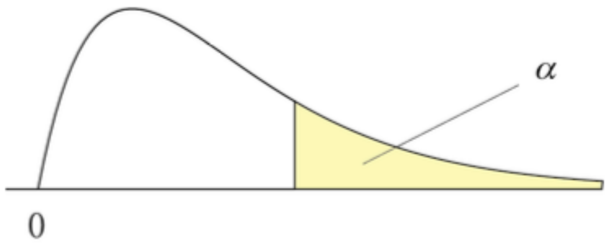
$$f_\nu(x) = 0 \quad (x < 0)$$

（注） $\Gamma(x)$ はガンマ関数

平均値 $m = \nu$

分散 $\sigma^2 = 2\nu$

自由度 ν のカイ 2 乗分布（χ^2_ν-分布）



上側 α 点

$\chi^2_\nu(\alpha)$

$n \backslash \alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928

$\nu = 7$

$\alpha = 0.05$

$\chi^2_7(0.05) = 14.067$

標本分散比が F分布に従う説明

ガンマ関数（第二種オイラー積分）

実部が正であるような複素数 z に対してガンマ関数 $\Gamma(z)$ を以下のように定義します：

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

階乗の一般化であること

ガンマ関数の定義では広義積分を使っていて一見複雑そうですが，実はガンマ関数は階乗の一般化になっています。

任意の正の整数 n に対して， $\Gamma(n+1) = n!$

1 ズレることに注意して下さい。

これは部分積分を使って簡単に証明することができます。

証明

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$

また，任意の正の整数 n に対して，

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$$
$$= [-t^{n-1}e^{-t}]_0^\infty - \int_0^\infty \{-(n-1)t^{n-2}e^{-t}\}dt$$
$$= 0 + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt$$
$$= (n-1)\Gamma(n-1)$$

以上より $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$ となる。

1/2でのガンマ関数の値

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

これはガウス積分を使うことで簡単に導出できます。→ガウス積分の公式の2通りの証明

証明

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

ここで $t = u^2$ と置換すると，上式は

$$\int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} 2u du$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

$$= \sqrt{\pi}$$

証明

ガウス積分の値を I とおく。

$$I^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-ay^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2-ay^2} dxdy$$

ここで $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置換すると，ヤコビアンは r なので，

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ar^2} r d\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-ar^2} r dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{e^{-ar^2}}{-2a} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{a}$$

よって，$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ベータ関数（第一種オイラー積分）

次のような関数を考える。

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

つまり、このような拡張して定義した階乗を用いることで、以下のような等式が成り立つ。

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

これを証明する。

証明

分母を取り払った式

$$B(x,y)\Gamma(x+y)=\Gamma(x)\Gamma(y)$$

を示す。

$\Gamma(x)\Gamma(y)$を積分の形式で表示すると、

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}ds\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}dt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s-t}s^{x-1}t^{y-1}dsdt$$

この重積分について、以下のような変数変換を考える。

$$(s,t)=(uv,u(1-v))$$

(s,t)の範囲より、(u,v)の取りうる範囲は$0\le u<\infty, 0\le v\le 1$である。

また、この変換に対するヤコビアンは、

$$\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u}\\ \frac{\partial s}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v}\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}v & 1-v\\ u & -u\end{pmatrix}\right|=u$$

であるため、

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s-t}s^{x-1}t^{y-1}dsdt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^1 e^{-u}u^{x-1}u^{y-1}v^{x-1}(1-v)^{y-1}udvdu$$

$$=\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}u^{y-1}udu$$

$$=B(x,y)\int_0^\infty e^{-t}u^{x+y-1}du=B(x,y)\Gamma(x+y)$$

よって示された。

標準分散比

確率変数 X と Y は独立な確率変数で，X は自由度 m のカイ自乗分布 χ_m^2 に従い，Y は自由度 n のカイ自乗分布 χ_n^2 に従う．これらから導かれる

$$F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$$

が従う分布

確率密度関数

$$p_X(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \qquad (0 < x < \infty)$$

証明 確率変数 X と Y の同時確率密度関数は

$$p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

となる．ここで，変数変換

$$F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}, \qquad Y' = Y$$

を施すとヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial f} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{m}ny' & \frac{m}{n}f \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{m}{n}y'$$

となる．よって，新たな確率変数 F と Y' の同時確率密度関数は

$$p_{FY'}(f, y') = \frac{2^{-\frac{(m+n)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}fy'\right)^{\frac{m}{2}-1} y'^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}f+1\right)y'} \frac{m}{n}y'$$

とできる．したがって F の確率密度関数は

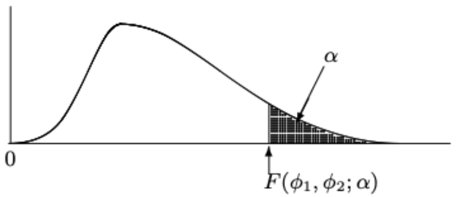
$$p_F(f) = \int_0^\infty p_{TY'}(t, y')dy'$$

で与えられる．ここで，変数変換

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{n}f\right)y' = z$$

を施すと F 分布が得られる．

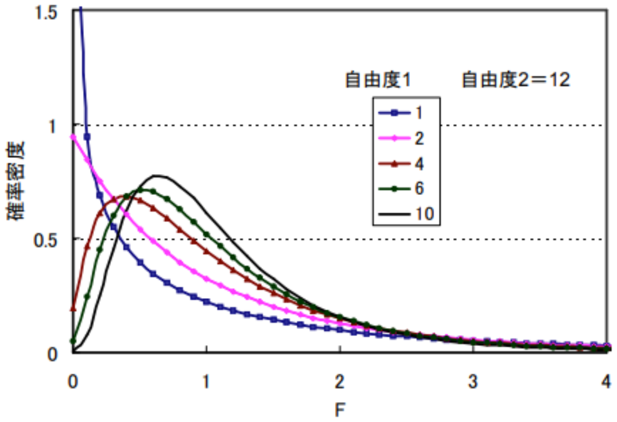
$$\begin{aligned}
p_F(f) &= \frac{2^{-\frac{(m+n)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{\frac{m}{2}-1} \int_0^\infty y'^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}f+1\right)y'} dy' \\
&= \frac{2^{-\frac{(m+n)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{\frac{m}{2}-1} \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}f+1\right)\right\}^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^\infty z^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-z} dz \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) 2^{-\frac{(m+n)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{\frac{m}{2}-1} \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}f+1\right)\right\}^{-\frac{m+n}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{\frac{m}{2}-1}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{m}{n}f\right)^{-\frac{m+n}{2}}
\end{aligned}$$



表記揺れ「$F(\phi_1, \phi_2;\ \alpha) \approx F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)$」など

付表 4.1　F 分布表（上側 5% 点）$F(\phi_1, \phi_2; 0.05)$

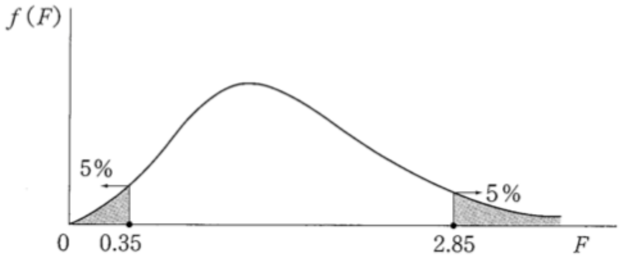
$\phi_2 \diagdown \phi_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45							
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42							
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40							
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37							
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36							
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34							
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32							
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31							
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29							
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28							
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27							
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18							
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10							
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02							
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94							



例 1．$\phi_1 = 9,\ \phi_2 = 10$ のとき、$F(9, 10; 0.05) = 3.02$ である。
例 2．$\phi_1 = 9,\ \phi_2 = 10$ のとき、$F(9, 10; 0.95) = 1/F(10, 9; 0.05) = 1/3.14 = 0.318$ である。

$F > 1$ である場合、F が確率 $1 - P$ となる F の値を求めるためには $F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)$ の自由度を入れ替えてその逆数を計算すればよい。すなわち、

$$F_{\phi_1}^{\phi_2}(1-P) = \frac{1}{F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)} \qquad (5)$$



８図　自由度12，8の ***F*** 分布

の関係にある

（５）式の $F_{\phi_2}^{\phi_1}$（$1 - P$）は F 分布表の左境界値であり、この境界値よりも小さい左の領域が下側確率といわれている。

F 分布表より、F_8^{12}（P）の値から下側確率 F（$1 - P$）を求めてみよう。

F_8^{12}（0.05）＝3.28

である。これに対応する左境界値は次のようにして求めることができる。まず、自由度を逆にして、F_{12}^{8}(0.05）の値を求める。F 分布表より、F_{12}^{8}(0.05)＝2.85である。したがって、（５）式より

F_8^{12}（0.95）＝１／F_{12}^{8}(0.05）＝１／2.85＝0.351

となる。F_8^{12}（0.95）＝0.351の値は、８図の左側に示された位置になる。以上の説明からわかるとおり、F 表の値はすべて１よりも大きいのである。F の最小値は、２つの自由度がともに無限大の時、１に等しい。F 値を計算して、F 表を用いる場合、分子により大きい分散をおかなければならないので、もし、F が１よりも小さい場合、分子と分母を入れ替えておかなければならないことに留意されたい。

12　大数の法則

確率変数 X_i, $(i=1,2,\cdots,n)$ が独立で同一な確率分布に従うものとし，その平均を $\mathrm{E}[X_i]=m$，分散を $\mathrm{V}[X_i]=\sigma^2<\infty$ とする．これら n 個の和 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ に関して以下の大数の法則が成立する．

大数の弱法則　次の確率収束：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega;\left\|\frac{S_n-\mathrm{E}[S_n]}{n}\right\|\geq\epsilon\right)=0$$

が満たされるとき，大数の弱法則 (weak law of large number) が成立するという．

「サンプル平均と真の平均の差が ϵ 以上になってしまう確率は試行回数 n を増やすと0に収束する」ことを式で表しています。サンプルサイズを増やしていくと，サンプル平均は真の平均に確率収束すると言うこともできます。

マルコフ(Markov)の不等式：任意の確率変数 X と $a>0$ に対して（期待値 $E[|X|]$ が存在するとき），$P(|X|\geq a)\leq\dfrac{E[|X|]}{a}$

証明

$$E[|X|]=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx$$
$$\geq\int_{-\infty}^{-a}|x|f(x)dx+\int_{a}^{\infty}|x|f(x)dx$$
$$\geq a\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx+a\int_{a}^{\infty}f(x)dx$$
$$=aP(X\leq -a)+aP(X\geq a)$$
$$=aP(|X|\geq a)$$

応用

マルコフの不等式において $a\to a^2$，$X\to(X-\mu)^2$ とおき，$P(|X-\mu|^2\geq a^2)=P(|X-\mu|\geq a)$ であることを利用すると以下のチェビシェフの不等式を導くことができます：

$$P(|X-\mu|\geq a)\leq\frac{E(|X-\mu|^2)}{a^2}$$

証明

$$\mathrm{E}\left[\|X\|^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p_X(x)dx=\int_{\|x\|\geq\epsilon}x^2p_X(x)dx+\int_{\|x\|<\epsilon}x^2p_X(x)dx$$
$$\geq\int_{\|x\|\geq\epsilon}x^2p_X(x)dx\geq\epsilon^2\int_{\|x\|\geq\epsilon}p_X(x)dx$$

よって，以下の不等式が得られる．

$$P\left(\|X\|\geq\epsilon\right)\leq\frac{\mathrm{E}\left[\|X\|^2\right]}{\epsilon^2}$$

証明

サンプル平均を表す確率変数を $Y_n=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ とおくと，期待値，分散の性質（注）より

$$E[Y_n]=\frac{n\mu}{n}=\mu$$
$$\mathrm{Var}[Y_n]=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

よって，確率論におけるチェビシェフの不等式より，

$$P(|Y_n-\mu|\geq\epsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

両辺 $n\to\infty$ の極限を取ることで大数の弱法則を得る：

$$\lim_{n\to\infty}P(|Y_n-\mu|\geq\epsilon)=0$$

13　中心極限定理

確率変数 X_i，$(i = 1, 2, \cdots, n)$ が独立で同一な確率分布に従うものとし，その平均を $\mathrm{E}[X_i] = m$，分散を $\mathrm{V}[X_i] = \sigma^2 < \infty$ とする．これら n 個の和 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ から導かれる

$$Z_n = \frac{S_n - \mathrm{E}[\bar{S}_n]}{\sqrt{n}\sigma}$$

の従う分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ に分布収束する．このことを中心極限定理 (central limit theorem) という．

大数の法則と中心極限定理の関係

- 大数の法則，中心極限定理ともにサンプル平均 $\overline{X}_n$ の振る舞いに関する定理です。
- $\overline{X}_n \approx \mu$ という評価が大数の法則。ではその両辺の差 $\overline{X}_n - \mu$ の挙動はどうなるのか，0 に近づくのは分かったが，どれくらいのスピードでどのように近づくのか？と，さらに深堀りしたのが中心極限定理：
  $\overline{X}_n - \mu \approx \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} N(0, 1)$ です。
  このような意味で，中心極限定理は大数の法則の精密化とみなすことができます。

証明 確率変数の変換により $Y_i = X_i - m$ とすれば，確率変数 Y_i は平均 $\mathrm{E}[Y_i] = 0$，分散 $\mathrm{V}[Y_i] = \sigma^2$ の分布に従う．Z_n の特性関数を $\phi_{Z_n}(t)$ とすると

$$\phi_{Z_n}(t) = \mathrm{E}\left[e^{itZ_n}\right] = \mathrm{E}\left[e^{it\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[e^{it\frac{Y_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right]$$

ここで，三角関数の展開を用いて

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[e^{it\frac{Y_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right] &= \mathrm{E}\left[1 + it\frac{Y_i}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{1}{2!}\left(it\frac{Y_i}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 + \cdots\right] \\ &= 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

を得る．ただし，$o(\epsilon)$ は ϵ と同位の無限小すなわち

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to \mathrm{Const.}$$

を示す．従って，$\log(1 + x) \cong x$，$\|x\| \ll 1$ より，

$$\begin{aligned} \log \phi_{Z_n}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \log \mathrm{E}\left[e^{it\frac{Y_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right] \\ &= n \log\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right) = n\left(-\frac{t^2}{2n} + o(n^{-\frac{3}{2}})\right) \\ &= -\frac{t^2}{2n} + o\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

を得る．ここで，$n \to \infty$ を考えると

$$\lim_{n \to \infty} \phi_{Z_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

となる．よって，Z_n の従う分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ に分布収束する．

中心極限定理 (Central Limit Theorem = CLT)

定理 5.4

正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から取り出した標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Longleftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

標準化または z-変換

定理 5.9 中心極限定理(CLT)

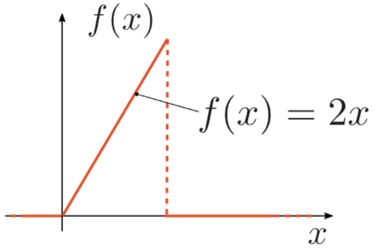
平均値 μ, 分散 σ^2 の一般の母集団でも, n が十分大きいとき, 近似的に成り立つ.

連続変数の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x, x \le 1) \\ 0 & (x < 0, 1 < x) \end{cases} .$$

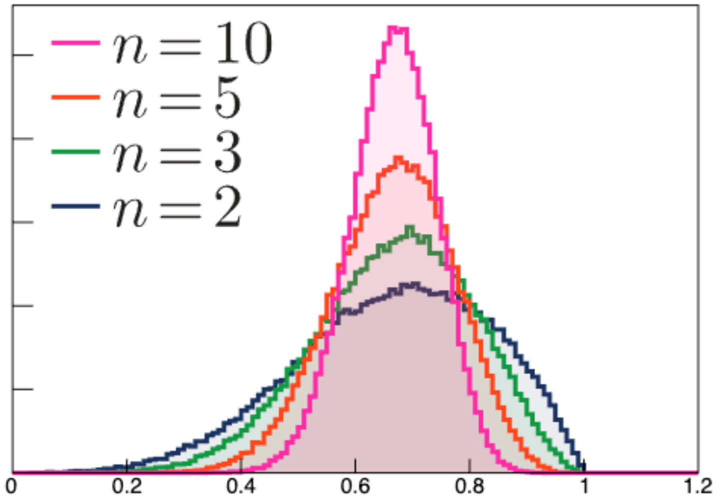
というような分布に従う確率変数について, この分布に従う無限個の要素を母集団とみなそう

この分布自体は, 下図に示すとおり, 正規分布とは似ても似つかない分布である.



さて, このような確率分布に従う確率変数を計算機上で発生させる. n 個の数が発生した時点でその期待値 $\bar{X}_n$ を計算してとっておき, また次の n 個の数を発生させてその $\bar{X}_n$ を計算し, $\cdots$ という操作を 100000 回繰り返す.

このようにして得られる $\bar{X}_n$ の値の群を相対度数分布として描いたのが下図であり, $n = 2, 3, 5, 10$ の場合を描いた.



$n = 2$ の場合は非対称性が顕著であるが, n の値が大きくなるに連れて左右の非対称性が小さくなっていくこと, 分布の形状が正規分布のようになっていくこと, 正規分布の幅が小さくなっていくことが見て取れる.

このように, 元の分布が正規分布とは無関係な形状であるにも関わらず, 標本平均 $\bar{X}_n$ は n が大きくなるについれて, 幅の小さな正規分布の形状へと近づいていくことが中心極限定理の主張である.