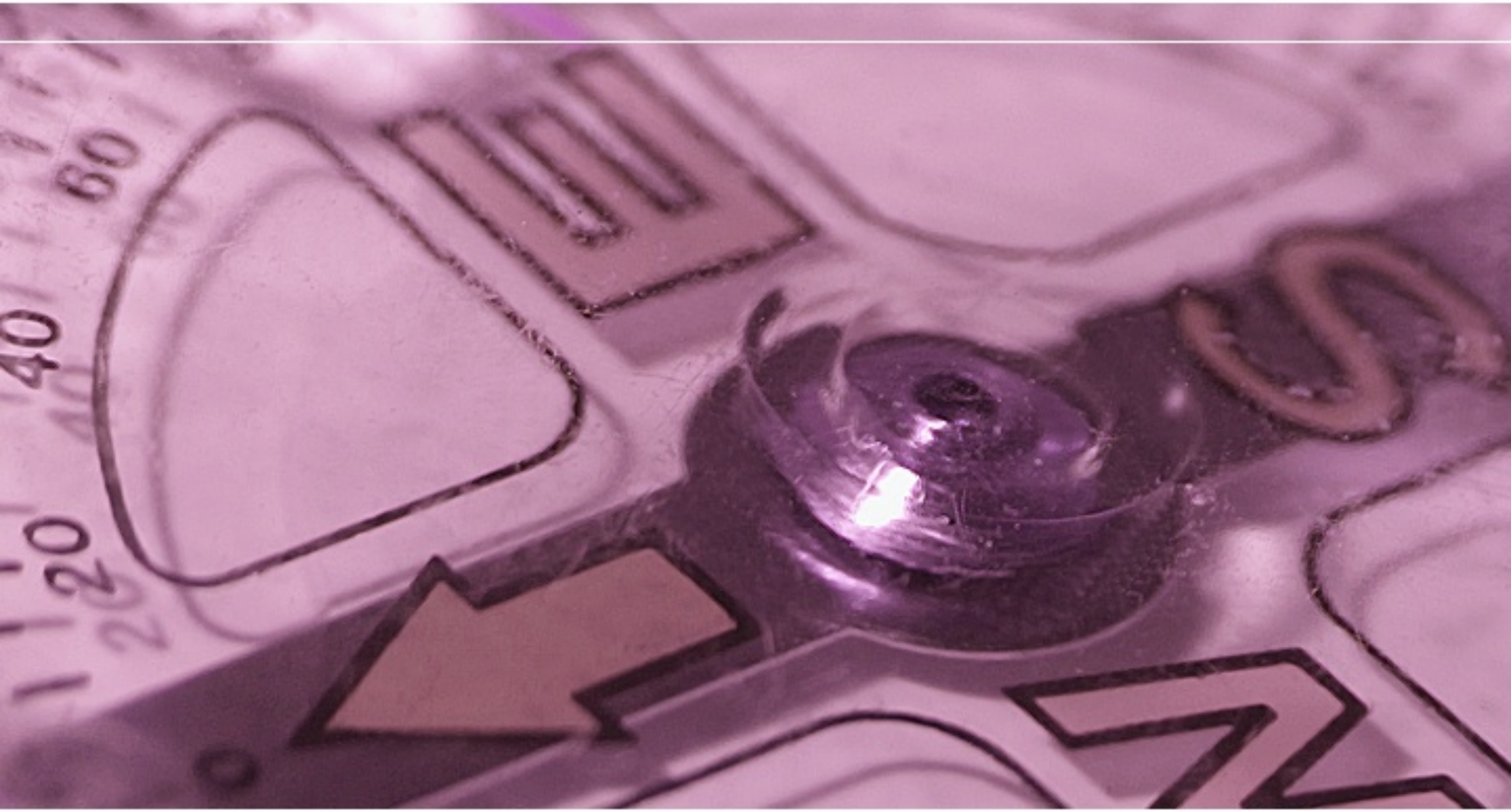
目的： 数理モデルに依拠した代表的なデータ分析手法を汎用ソフト(EXCEL)で体験し，数理モデルで見通す能力と，新たな概念の発想力を涵養する．



テーマ：エリアのマネージャーだとします．各店舗の効率性の評価と改善策の提案をしてください．

データ包絡分析＝Data Envelopment Analysis(DEA)

3. 1　データ包絡分析の例題

支店 1

支店 2

支店 3

	入力　x	出力　y
支店	従業員（人）	売上高（万円）
支店 1	300	18,000
支店 2	400	20,000
支店 3	200	14,000

どの支店が効率的でしょうか？

ある企業の組織図例
（一部改変）

$$支店\,k\,の効率性 = \frac{支店\,k\,の出力}{支店\,k\,の入力} \quad \left(\theta_k = \frac{y_k}{x_k} \right)$$

効率的でない支店は
従業員あるいは売上高をどうすれば
効率的になるでしょうか？

現実には色々な要因が考えられます．

	入力				出力		
支店	従業員（人）	資産（万円）	店舗（数）	ATM（数）	売上高（万円）	利益（万円）	利用者（数）
支店 1	300	2,700	4	15	18,000	9,800	700
支店 2	400	3,300	5	22	20,000	13,000	1,100
支店 3	200	1,900	3	12	14,000	8,200	500
データ	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	x_{k4}	y_{k1}	y_{k2}	y_{k3}
重み	u_{k1}	u_{k2}	u_{k3}	u_{k4}	v_{k1}	v_{k2}	v_{k3}

$$\text{支店}\,k\,\text{の効率性} = \frac{\text{支店}\,k\,\text{の仮想出力}}{\text{支店}\,k\,\text{の仮想入力}} \quad \left(\theta_k = \frac{\sum_{n=1}^{N} v_{kn} y_{kn}}{\sum_{m=1}^{M} u_{km} x_{km}} \right)$$

要因ごとに重みを考えます → まとめたものを仮想の入力･出力とします

→ 効率値は0～1で表したい → **線形計画法**を使います

3. 2　線形計画法

1次式で表わされる各種の制約条件(設備能力，原材料，時間，人員，工程や資金など)の相互関係を満たし，かつ1次式で表わされる活動目的(利益，生産量，費用，生産要素の消費量など)の達成度を評価する関数を最適化(最大化・最小化)する解を求める数学的手法のこと．

応用分野は，生産計画，原料購入計画，混合問題，人員配置，輸送計画，在庫計画，スケジューリング，ネットワークフロー，クラス編成，資産運用，エネルギー計画やサプライチェーン最適化など，幅広い分野に及んでいる．

製品1，2は，原料A，B，Cから作ることができる．製品1，2の1単位当たり利益や，使える原料A，B，Cの最大量は以下の表のとおりである．利益を最大にするためには，製品1，2をそれぞれいくら作ればよいでしょうか？

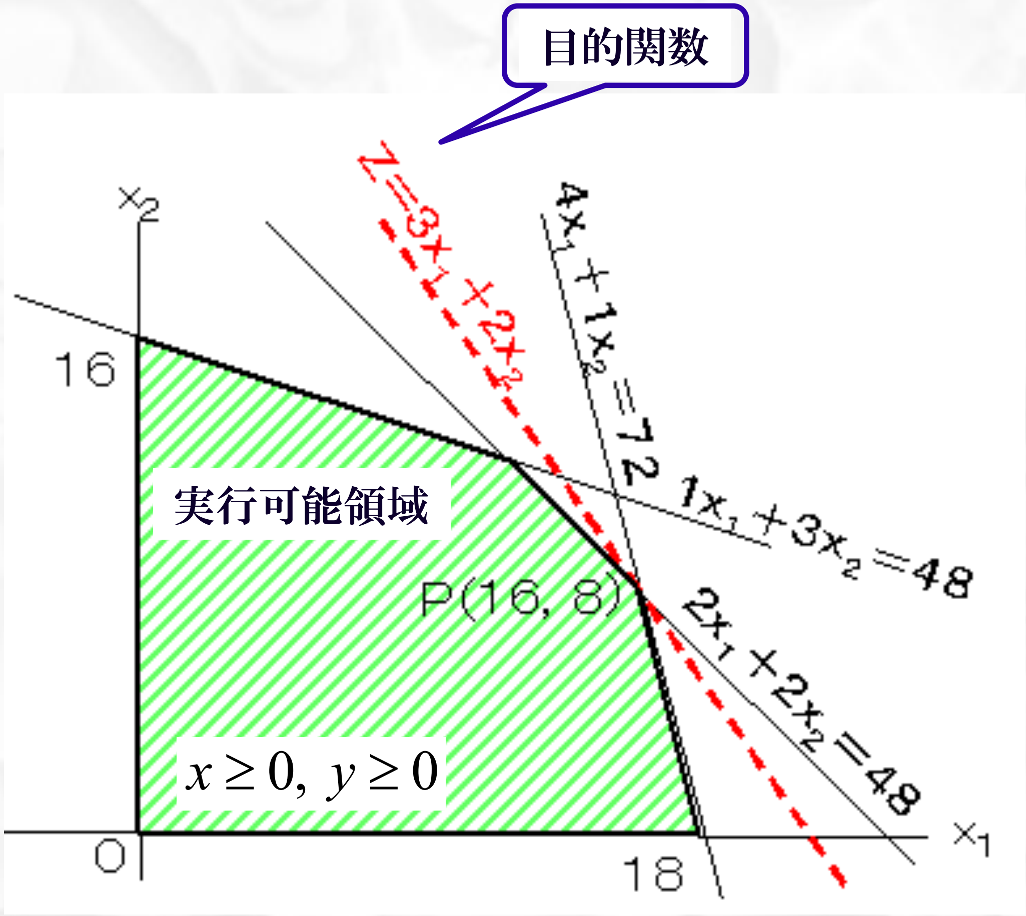
	製品1(x)	製品2(y)	最大量
利益	3	2	
原料A	2	2	48
原料B	4	1	72
原料C	1	3	48

$$\max \quad \theta = 3x + 2y$$

$$\text{subject to} \quad \begin{aligned} 2x + 2y &\le 48 \\ 4x + y &\le 72 \\ x + 3y &\le 48 \end{aligned}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

線形計画法の図による解法



二段階シンプレックス法による解法

「経営・経済を学ぶ学生のための基礎数学」（柴田、奥原；共立出版）を参考に．

任意の線形計画問題は標準形にできます

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta = 3x + 5y \\
\text{subject to} \quad & 2x + y \le 10 \\
& x + y \le -6 \\
& 2x + 4y \le 20 \\
& y \ge 0
\end{aligned}
$$

目的関数が最大化の時
両辺に負を掛け，最大化問題に変形

条件式が不等式の時
≦の時：スラック変数の導入
≧の時：サープラス変数を導入

右辺の定数が負の時
両辺に(－1)を掛ける

非負条件の無い変数（自由変数）が含まれる時
正と負の部分に分けて2変数に置き換える

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta' = -3(x^+ - x^-) - 5y \\
\text{subject to} \quad & 2(x^+ - x^-) + y + \lambda_1 = 10 \\
& -(x^+ - x^-) - y - \lambda_2 = 6 \\
& 2(x^+ - x^-) + 4y + \lambda_3 = 20 \\
& x^+, x^-, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, y \ge 0
\end{aligned}
$$

標準形とは

○目的関数は最小化
○非負条件以外の条件式は等式で表現
○条件式の右辺は非負
○すべての変数が非負

線形計画問題の3つの場合

- ○実行可能解が存在しない．
- ○実行可能解は存在するが，最適解は存在しない．
- ○最適解が存在する．

$$\min \quad \theta' = -3(x^+ - x^-) - 5y$$

$$\text{subject to} \quad \begin{aligned} 2(x^+ - x^-) + y + \lambda_1 &= 10 \\ -(x^+ - x^-) - y - \lambda_2 &= 6 \\ 2(x^+ - x^-) + 4y + \lambda_3 &= 20 \end{aligned}$$

$$x^+, x^-, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, y \geq 0$$

連立方程式(6変数, 3本の方程式)

連立方程式と解の関係

連立方程式(m変数, n本の方程式)

○m=nの時：
解が一意に定まる
or 不定
or 不能(解なし)

○m<nの時：
基本的にm=nの時と同じ．

○m>nの時：
m-n個の変数の解は一意に定まらない(独立変数)
⇔ m-n個の独立変数の値を定めればm=nの時と同じ0

実行可能解の判定法

①標準形に変形する

②連立方程式の解が定まるように独立変数を適当に決めて，値を0にする．
※値が0に定められた変数
⇔非基底変数
※実際に解を求める変数
⇔基底変数
※得られた連立方程式の解
⇔基本解

③基本解が非負なら実行可能領域の端点

上の例では，以下は実行可能解の一つである．

$$x^+ = y = \lambda_2 = 0 \qquad x^- = 6, \lambda_1 = 10, \lambda_3 = 20$$

3. 5　双対形

双対問題（最適値の上界値・下界値の計算）

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta = 3x + 5y \\
\text{subject to} \quad & 2x + y \le 10 \\
& x + y \le 6 \\
& 2x + 4y \le 20 \\
& x \ge 0,\ y \ge 0
\end{aligned}
$$

制約式の組合せで目的関数を作ってみる

$$
\theta = 3x + 5y = \begin{cases} -2(2x+y) + 7(x+y) \le 22 \\ \dfrac{1}{3}(2x+y) + \dfrac{7}{6}(2x+4y) \le \dfrac{80}{3} \\ (x+y) + (2x+4y) \le 26 \end{cases}
$$

より良い上界

より一般的には

$$\begin{aligned}\theta &= \lambda_1(2x+y)+\lambda_2(x+y)+\lambda_3(2x+4y)\\ &= (2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)x+(\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3)y\\ &\le 10\lambda_1+6\lambda_2+20\lambda_3\end{aligned}$$

ただし, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \ge 0$

であるので

$$2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 \ge 3, \qquad \lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3 \ge 5$$

が成り立つと考えると(弱双対定理)

$$10\lambda_1+6\lambda_2+20\lambda_3 \ge \theta \ge 3x+5y$$

よって, もっとも小さい上界値は

制約 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \ge 0$

$$2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 \ge 3$$

$$\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3 \ge 5$$

のもとで

$$10\lambda_1+6\lambda_2+20\lambda_3$$

を最小化する双対問題で与えられる.

$$\begin{aligned}\max\quad & \theta = 3x+5y\\ \text{subject to}\quad & 2x+y \le 10\\ & x+y \le 6\\ & 2x+4y \le 20\\ & x \ge 0,\ y \ge 0\end{aligned}$$

主問題とすれば

双対問題の双対問題は
主問題に一致する

双対問題となる

$$\begin{aligned}\min\quad & \mu = 10\lambda_1+6\lambda_2+20\lambda_3\\ \text{subject to}\quad & 2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 \ge 3\\ & \lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3 \ge 5\\ & \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \ge 0\end{aligned}$$

もし, こちらを主問題とすると

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mu = 10\lambda_1 + 6\lambda_2 + 20\lambda_3 \\
\text{subject to} \quad & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 3 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 5 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

こちらが双対問題となります

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta = 3x + 5y \\
\text{subject to} \quad & 2x + y \leq 10 \\
& x + y \leq 6 \\
& 2x + 4y \leq 20 \\
& x \geq 0,\ y \geq 0
\end{aligned}
$$

行列表現

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 20 \end{bmatrix} \quad
\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad
\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}
$$

主問題

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \\
\text{subject to} \quad & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{c} \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

双対問題の双対問題は
主問題に一致する

双対問題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
\text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

エクセルを使い線形計画法を実行します

3. 6 Data Envelopment Analysis(DEA)

支店 k の効率性の線形計画としての定式化

$$\max \quad \theta_k = \frac{\sum_{n=1}^{N} v_{kn} y_{kn}}{\sum_{m=1}^{M} u_{km} x_{km}}$$

$$\text{subject to} \quad \frac{\sum_{n=1}^{N} v_{kn} y_{sn}}{\sum_{m=1}^{M} u_{km} x_{sm}} \le 1 \qquad (s = 1, 2, 3, \cdots K)$$

$$u_{km} \ge 0 \quad (m = 1, 2, 3, \cdots M)$$

$$v_{kn} \ge 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots N)$$

$$\text{支店}\,k\,\text{の効率性} = \frac{\text{支店}\,k\,\text{の仮想出力}}{\text{支店}\,k\,\text{の仮想入力}}$$

をできるだけ k にとって都合がいいように重みを決めてあげる

ただし，k にとって都合がいい重みで他の支店をみても，効率性は1を超えないようにする

また，どの重みも負にならないこととする

これは分数計画問題 $\Longrightarrow$ 分母または分子を1とする $\Longrightarrow$ **線形計画法**にできる

① 分母(仮想入力)を1とする場合 $\sum_{m=1}^{M} u_{km} x_{km} = 1$

➡ **入力指向モデル**となり，双対問題から**出力改善策**だせる．

② 分子(仮想出力)を1とする場合 $\sum_{n=1}^{N} v_{kn} y_{kn} = 1$

➡ **出力指向モデル**となり，双対問題から**入力改善策**だせる．

入力指向モデル(LP_I)

仮想入力を1とした

⇩

効率性の最大化は
仮想出力の最大化に等しくなる

$$
\begin{aligned}
\max \quad & y_k = \sum_{n=1}^{N} v_{kn} y_{kn} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{m=1}^{M} u_{km} x_{sm} - \sum_{n=1}^{N} v_{kn} y_{sn} \geq 0 \\
& \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots K) \\
& \sum_{m=1}^{M} u_{km} x_{km} = 1 \\
& u_{km} \geq 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots M) \\
& v_{kn} \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots N)
\end{aligned}
$$

入力指向モデルの双対(DLP_I)

効率性の評価と出力の改善策の提案を同時に行うために双対問題にしておく.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta_k \\
\text{subject to} \quad & \lambda_s \geq 0 \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, K) \\
& \theta_k x_{km} - \sum_{s=1}^{K} \lambda_s x_{sm} \geq 0 \\
& \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, M) \\
& \sum_{s=1}^{K} \lambda_s y_{sn} - y_{kn} \geq 0 \\
& \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, N)
\end{aligned}
$$

出力指向モデル(LP_O)

仮想出力を1とした

⇩

効率性の最大化は
仮想入力の**最小化**に等しくなる

$$\min \quad x_k = \sum_{m=1}^{M} u_{km} x_{km}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{m=1}^{M} u_{km} x_{sm} - \sum_{n=1}^{N} v_{kn} y_{sn} \geq 0 \quad (s = 1,2,3,\ldots K)$$

$$\sum_{n=1}^{N} v_{kn} y_{kn} = 1$$

$$u_{km} \geq 0 \quad (m = 1,2,3,\ldots M)$$

$$v_{kn} \geq 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots N)$$

出力指向モデルの双対(DLP_O)

効率性の評価と入力の改善策の提案を同時に行うために双対問題にしておく.

$$\max \quad \eta_k$$

$$\textit{subject to} \quad \mu_s \geq 0 \quad (s = 1,2,3,\ldots,K)$$

$$\sum_{s=1}^{K} \mu_s y_{sn} - \mu_k y_{kn} \geq 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots,N)$$

$$x_{km} - \sum_{s=1}^{K} \mu_s x_{sm} \geq 0 \quad (m = 1,2,3,\ldots,M)$$

支店 k の入力指向モデルを構築してみましょう

	入力				出力		
支店	従業員（人）	資産（万円）	店舗（数）	ATM（数）	売上高（万円）	利益（万円）	利用者（数）
支店 1	300	2,700	4	15	18,000	9,800	700
支店 2	400	3,300	5	22	20,000	13,000	1,100
支店 3	200	1,900	3	12	14,000	8,200	500
データ	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	x_{k4}	y_{k1}	y_{k2}	y_{k3}
重み	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	v_3

$$\max \quad y_k = \sum_{n=1}^{3} v_{kn} y_{kn}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{m=1}^{4} u_{km} x_{sm} - \sum_{n=1}^{3} v_{kn} y_{sn} \geq 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{m=1}^{4} u_{km} x_{km} = 1$$

$$u_{km} \geq 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

$$v_{kn} \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3)$$

上の例では,
支店数はK＝3
入力の要因はM＝4
出力の要因はN＝3

支店1(つまり k=1)に対する入力指向モデルは以下のようになります

$$\max \quad y_1 = 18,000v_{11} + 9,800v_{12} + 700v_{13}$$

$$\text{subject to} \quad (300u_{11} + 2,700u_{12} + 4u_{13} + 15u_{14}) - (18,000v_{11} + 9,800v_{12} + 700v_{13}) \geq 0$$

$$(400u_{11} + 3,300u_{12} + 5u_{13} + 22u_{14}) - (20,000v_{11} + 13,000v_{12} + 1,100v_{13}) \geq 0$$

$$(200u_{11} + 1,900u_{12} + 3u_{13} + 12u_{14}) - (14,000v_{11} + 8,200v_{12} + 500v_{13}) \geq 0$$

$$300u_{11} + 2,700u_{12} + 4u_{13} + 15u_{14} = 1$$

$$u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, v_{11}, v_{12}, v_{13} \geq 0$$

$u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, v_{11}, v_{12}, v_{13}$ が求められると，その時の v_{11}, v_{12}, v_{13} から

支店1の効率値 y_1 を求めることができる

同様に考えて，支店2(k=2)と支店3(k=3)に
対する入力指向モデルを作ってみましょう.

エクセルを使い
線形計画法を
実行します

支店1に対する入力指向モデルの双対形は以下のようになります

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \theta_1 \\
&subject\ to \quad \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0 \\
&\quad 300\,\theta_1 - (300\lambda_1 + 400\lambda_2 + 200\lambda_3) \geq 0 \\
&\quad 2700\,\theta_1 - (2700\lambda_1 + 3300\lambda_2 + 1900\lambda_3) \geq 0 \\
&\quad 4\,\theta_1 - (4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3) \geq 0 \\
&\quad 15\,\theta_1 - (15\lambda_1 + 22\lambda_2 + 12\lambda_3) \geq 0 \\
&\quad 18000\lambda_1 + 20000\lambda_2 + 14000\lambda_3 - 18000 \geq 0 \\
&\quad 9800\lambda_1 + 13000\lambda_2 + 8200\lambda_3 - 9800 \geq 0 \\
&\quad 700 - (700\lambda_1 + 1100\lambda_2 + 500\lambda_3) \leq 0
\end{aligned}
$$

さらに，事後学習により理解を深めてください．

1） LP_I から DLP_I, LP_O から DLP_O が導出できることを示しましょう.
2） LP_I と DLP_I で同じ効率値が得られていることを確認しましょう.
3） DLP_I や DLP_O で改善策がどうやって導出できるのか調べましょう.