【論文紹介】
不完備市場リスク要因を考慮したリアル・オプション評価

武藤 克弥 (Katsuya Mutoh)
u255018@st.pu-toyama.ac.jp

富山県立大学 大学院 電子・情報工学専攻 情報基盤工学部門

July 28, 2023

はじめに

オプション取引

指定日時に「資産を購入 (売却) できる権利」を売買する

例「1か月後 原資産¥10,000を買う権利」
→**プレミアム(手数料)** ¥500

1か月後 市場価格 ¥12,000

買 **権利行使価格** ¥10,000 → 売 **市場価格** ¥12,000 **利益** ¥2,000 (−¥500)

1か月後 ¥8,000

~~**利益** −¥2,000~~ **権利行使しない** → **損失 ¥500のみ**

「買う権利」
行使 < 市場
権利行使

「売る権利」
行使 > 市場
権利行使

リアル・オプション

- 不動産や事業プロジェクトなどの取引に拡張したもの
- 任意の時間で事業投資の開始・中止する権利を購入 (行使) する

概要

背景

- オプションからリアルオプション問題に拡張した従来研究では，不完備 (リスクが不確実で完全観測不可な) 市場を考慮していない
  →ある程度リスク回避できる適切なオプション評価法が必要
- 臨機応変な権利行使まで拡張できていない (任意時間での開発事業の開始・中止など)

目的

- 不完備市場，権利行使時刻を考慮したリアルオプション価格計算モデルの提案

モデルの構成

N 種類の危険資産が取引される市場を想定

- t：対象期間 (0〜T)
- $\boldsymbol{Z}$：リスク要因
- $\boldsymbol{Z}(t) \equiv [Z_1(t) \cdots Z_K(t)]'$ (K 次元 P-Wiener 過程)
- $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(\omega) | \omega \in \Omega\}$ (客観的確率測度，$\Omega =$ 事象集合)
- $r(t)$：時刻 t での利子率
- $\boldsymbol{S}(t) \equiv [S_1(t) \cdots S_K(t)]'$：$N$ 種類の危険資産価格

確率微分方程式

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{S}(t)}{\boldsymbol{S}(t)} = \boldsymbol{\alpha}(t)dt + \boldsymbol{\sigma}(t)d\boldsymbol{Z}(t) \equiv d\boldsymbol{X}(t) \qquad \textbf{(0)}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1(t) - r(t) \\ \vdots \\ \alpha_{\mathrm{N}}(t) - r(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{\mathrm{N}}(t) \end{bmatrix}$$
：ドリフト係数 (期待収益率など)

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{N}}(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t) & \cdots & \sigma_{1,\mathrm{K}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\mathrm{N},1}(t) & \cdots & \sigma_{\mathrm{N},\mathrm{K}}(t) \end{bmatrix}$$
：拡散係数 (ボラティリティなど)

モデル制約

(1) 無裁定性条件

ノーリスクで利潤を得られる資産の組み合わせが存在しないこと
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}$ に対する等価マルチンゲール測度 (EMM $\mathcal{Q}$) が存在する

$$E_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] = \boldsymbol{S}(t), \quad \forall (t,s) \in \{t, s \in [0, T]; t < s\} \tag{1}$$

従来手法の問題

無裁定条件のみでオプション評価
→不完備市場 (全リスク観測不可) では解が発散

(2) カルバック・ライブラー (KL) 情報量

$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ への KL 情報量の下限値を新たに追加

$$\mathcal{H}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \equiv -\int \mathcal{Q}(\omega) \ln \frac{\mathcal{Q}(\omega)}{\mathcal{P}(\omega)} d\omega \quad \text{(KL 情報量)} \tag{2}$$

→ (1)(2) をもとに EMM $\mathcal{Q}$ を推定 + オプション価格の計算

モデル制約

EMM $\mathcal{Q}$ 推定問題の言い換え

確率的割引ファクタ (SDF) $\Lambda(t)$ 推定問題に置き換える

(※ SDF： 多くの資産価格決定に用いられる共通の確率変数)

SDF $\Lambda(T)$ $$\Lambda(t) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\right], \quad \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[f] \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}f\right]$$

$\Downarrow$

制約条件

無裁定条件 $$\mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\boldsymbol{S}(s)\right] \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}\boldsymbol{S}(s)\right] = \boldsymbol{S}(t)$$

KL 情報量の下限 $$\mathcal{H}(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \mathcal{H}(0,\Lambda(T)) \equiv -\mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda(T)\ln\Lambda(T)] \geq \bar{H}$$

対象とする取引

ヨーロピアンオプション (従来の限界)

- 契約の満期に権利行使可能
- 満期 T にキャッシュフロー (利潤の流入) として、ペイオフ $F(T) \equiv F(T, \boldsymbol{Z}(T))$ を得る

アメリカンオプション (提案手法で使用)

- **権利を行使する時刻を選択可能**
- 任意の時刻 τ にキャッシュフローとして、ペイオフ $F(\tau) \equiv F(\tau, \boldsymbol{Z}(\tau))$ を得る

→本研究の主眼点

先行研究の拡張 (ヨーロピアンオプションへの適用)

- 最適な $\Lambda(T)$ の推定 → $\boldsymbol{d\eta(t)}$ **の推定**に言い換え
- (1) $d\eta(t)$ の推定 → (2) オプション価格 $C_B(T,\boldsymbol{Z})$ の導出

買手問題

最適値関数
$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z}) \equiv \min_{\Lambda(T)} \mathcal{C}(t,\Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t,\Lambda(T)) \quad , \text{ s.t. } \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}\boldsymbol{S}(s)\right]$$

γ：危険回避度 (KL 情報量下限値に依存する定数)

終端条件 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(T,\boldsymbol{Z}) = F(T,\boldsymbol{Z})$

オプション価格 $\mathcal{C}(t,\Lambda(T)) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}F(T)\right]$

KL 情報量 $\mathcal{H}(t,\Lambda(T)) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}\ln\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}\right]$

微小 SDF $\mathrm{d}\eta(t) \equiv \dfrac{\Lambda(t)+\mathrm{d}\Lambda(t)}{\Lambda(t)}$

DP(動的計画法)**分解**

瞬間 t ごとの最適値関数
(Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式)

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z}) = \min_{\mathrm{d}\eta(t)} \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{\frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t)\right\}\right] \quad \text{s.t. } \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}[\mathrm{d}\eta(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)] = \boldsymbol{0}$$

$d\boldsymbol{X}(t)$：危険資産の収益率 (式 (0) より), $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) \equiv \mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t) + \mathrm{d}\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t)$

先行研究の拡張 (ヨーロピアンオプションへの適用)

- 最適な $\Lambda(T)$ の推定 (時間全体) → 最適な $\boldsymbol{d\eta(t)}$ **の推定** (微小時間)
- (1) $d\eta(t)$ の推定 → (2) オプション価格 $C_B(T, \boldsymbol{Z})$ の導出

$\boxed{\mathcal{I}_B(t, \boldsymbol{Z})\ \textbf{(HJB 方程式) の最適性条件より}}$

・最適 SDF 変化率 $d\eta^*_B(t)$ が導出

$$\mathrm{d}\eta^*_{\mathrm{B}}(t) = \frac{\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}^+_{\mathrm{B}}(t) - \boldsymbol{\beta}^*_{\mathrm{B}}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]}{\mathrm{E}^{\mathcal{P}}_t\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}^+_{\mathrm{B}}(t) - \boldsymbol{\beta}^*_{\mathrm{B}}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]\right]}$$

・最適値 $\boldsymbol{\beta}^*(t)$ を導出 (方程式の解)　→ $\boldsymbol{\beta}(t)$：Lagrange 乗数 (各資産への投資金額)

$$\mathrm{E}^{\mathcal{P}}_t\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}^+_{\mathrm{B}}(t) - \boldsymbol{\beta}^*(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right]\right] = \mathbf{0}$$

⬇

オプションの買手価格 $\mathcal{C}_{\mathrm{B}}(t)$

$$C_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \mathrm{E}^{\mathcal{P}}_t\left[\mathrm{d}\eta^*_{\mathrm{B}}(t) C^+_{\mathrm{B}}(t)\right] \quad (C^+_B(t) \equiv C(t) + dC(t))$$

TOYAMA Prefectural University

先行研究の拡張 (ヨーロピアンオプションへの適用)

オプション価格導出アルゴリズム (ヨーロピアンオプション)

逐次的に各瞬間の $\mathcal{I}_B(t,\boldsymbol{Z})$, $C_B(T,\boldsymbol{Z})$ を求めていく

(1) $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t)$ ← 終端条件 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(T,\boldsymbol{Z}) = F(T,\boldsymbol{Z})$

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right]\right] = \boldsymbol{0}$$

↓ $\boldsymbol{\beta}^{*}(t)$

$$\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^{*}(t) = \frac{\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]\right]}$$

↓ $d\eta_B^{*}(t)$

$$\boxed{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z}) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{\frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t)\right\}\right]}$$

$$\mathcal{I}_B^{+}(t) = \mathcal{I}_B(t,\boldsymbol{Z})$$

(2) $C_B^{+}(t)$ ← 終端条件： $C_B(T,\boldsymbol{Z}) = F(T,\boldsymbol{Z})$

$$\boxed{C_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z}) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^{*}(t)C_{\mathrm{B}}^{+}(t)\right]} \leftarrow d\eta_B^{*}(t)$$

$$C_B^{+}(t) = C_B(T,\boldsymbol{Z})$$

提案手法 (アメリカンオプションへの適用)

アメリカンオプションでの微小時間 SDF

最適な $\Lambda(t) \to d\eta(t)$ 推定し、オプション価格を導出

- 瞬間 t で権利を行使する/しないを選択
- t で行使するとペイオフ $F(t, \boldsymbol{Z})$ を支払う (受け取る)

買手問題

最適値関数

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) \equiv \max_{\tau \in [t,T]} \min_{\Lambda(T)} \mathcal{C}(t, \Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t, \Lambda(T)),$$
$$\text{s.t.} \quad \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}\boldsymbol{S}(s)\right]$$

γ：危険回避度 (KL 情報量下限値に依存する定数)

⇩ **DP分解 (動的計画法)**

各瞬間の状態 (t, **Z**)で**離散選択**(場合分け)

(1) 権利を行使し，ペイオフ獲得 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t, \boldsymbol{Z})$

(2) 時間 dt だけ権利行使を待機 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t, \boldsymbol{Z})$

提案手法 (アメリカンオプションへの適用)

オプション価格導出アルゴリズム (アメリカンオプション)

(i)$\mathcal{H}^*(t)$ の計算．(ii)$\mathcal{I}_B(t)$ の更新．(iii) オプション価格 $(C_B(t))$ の導出

(i) 最適 KL 情報量 $\mathcal{H}^*(t)$ の計算

$$\mathcal{H}^{*+} = \mathcal{H}^*(T)$$

満期：$\mathcal{H}^*(T, \boldsymbol{Z}) = 0, \ \ t = T - dt$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\{\boldsymbol{\beta}^*(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) - \mathcal{H}^{*+}(t)\}\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right] = \boldsymbol{0}.$$

$$\downarrow \ \boldsymbol{\beta}^*(t)$$

$$\mathrm{d}\eta^*(t) = \frac{\exp\left[\{\boldsymbol{\beta}^*(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) - \mathcal{H}^{*+}(t)\}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\{\boldsymbol{\beta}^*(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) - \mathcal{H}^{*+}(t)\}\right]\right]}$$

$$\downarrow \ d\eta_B^*(t)$$

$$\boxed{\mathcal{H}^*(t) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[-\,\mathrm{d}\eta(t)\ln\,\mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{H}^{*+}(t)\right]}$$

$$\mathcal{H}^{*+}(t) = \mathcal{H}^*(t)$$
$$t = t - dt$$

$$\downarrow$$

終了 if(t = 0)

オプション価格導出アルゴリズム (アメリカンオプション)

(i)$\mathcal{H}^*(t)$ の計算．(ii)$\mathcal{I}_B(t)$ の更新．(iii) オプション価格 ($C_B(t)$) の導出

(ii) 最適値関数 $\mathcal{I}_B(t)$ の更新

$\mathcal{I}_B^+(t) = \mathcal{I}_B(T)$

満期：$\mathcal{I}_B(t, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z}),\ \ t = T - dt$

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_B^+(t) - \boldsymbol{\beta}^*(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right]\right] = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{\beta}^*(t)$

$$\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^*(t) = \frac{\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^*(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^*(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]\right]}$$

$d\eta_B^*(t)$

$$\mathcal{I}_B^0(t) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{\frac{1}{\gamma}\ln\,\mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t)\right\}\right]$$

$$\mathcal{I}_B^1(t) = F(t) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}^*(t)$$

((ｉ) 各時刻の $\mathcal{H}^*(t)$ を代入)

if: $\mathcal{I}_B^1(t) \geq \mathcal{I}_B^0(t)$

$\mathcal{I}_B(t) = \mathcal{I}_B^1(t)$

else:

$\mathcal{I}_B(t) = \mathcal{I}_B^0(t)$

$\mathcal{I}_B^+(t) = \mathcal{I}_B(t)$

$t = t - dt$

終了 if(t = 0)

オプション価格導出アルゴリズム (アメリカンオプション)

(i)$\mathcal{H}^*(t)$ の計算．(ii)$\mathcal{I}_B(t)$ の更新．(iii) オプション価格 ($C_B(t)$) の導出

(iii) オプション価格 ($C_B(t)$) の導出

$C_B^{+}(t) = C_B(T)$

$\boxed{\textbf{満期}：C_B(t, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z}),\ \ t = T - dt}$

if $\mathcal{I}_B^1(t) \geq \mathcal{I}_B^0(t)$ **:**

$$\boxed{C_B(t) = F(t, \boldsymbol{Z})}$$

else: $\boxed{\text{(ii)}\ d\eta_B^*(t)}$

$$\boxed{C_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^*(t) C_{\mathrm{B}}^{+}(t)\right]}$$

$C_B^{+}(t) = C_B(t)$

$t = t - dt$

終了 if(t = 0)

数値実験 (不動産売却権の評価)

対象オプション ＝ 価格変動する不動産を任意時刻 [0,T] に価格 K で売却できる権利
想定市場 ＝ 1 種類の危険資産が取引 (不動産へ影響)

- 時刻 t での不動産価格 $= P(t)$
- 確率微分方程式 $\boxed{\mathrm{d}P(t)/P(t) = \mu\,\mathrm{d}t + v\{\rho\,\mathrm{d}z(t) + \bar{\rho}\,\mathrm{d}\bar{z}(t)\}}$

μ, $\boldsymbol{v} \equiv [v_1, v_2]$, $\boldsymbol{\sigma} \equiv [\sigma_1, \sigma_2]$：定数

$v \equiv \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, $\sigma \equiv \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

$\rho \equiv \boldsymbol{\sigma v}/\sigma v$：危険資産価格と不動産価格の相関係数

$\bar{\rho} \equiv \sqrt{1-\rho^2}$

$\boldsymbol{Z} \equiv [Z_1, Z_2]$：リスク要因

$$z(t) \equiv \frac{\sigma_1 Z_1(t) + \sigma_2 Z_2(t)}{\sigma}, \quad \bar{z}(t) \equiv \frac{\sigma_1 Z_1(t) - \sigma_2 Z_2(t)}{\sigma}$$

→市場/非市場リスク要因 ($\mathcal{P}$-Wiener 過程)

- 時刻 t におけるオプション (不動産) 価格

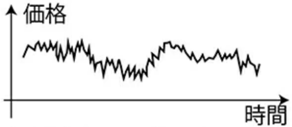
$$\boxed{F(t, P) = \max.\{K - P, 0\}}$$

TOYAMA Prefectural University

数値実験 (不動産売却権の評価)

時間と状態の離散化

$$\boxed{\mathrm{d}P(t)/P(t) = \mu\,\mathrm{d}t + v\left\{\rho\,\mathrm{d}z(t) + \bar{\rho}\,\mathrm{d}\bar{z}(t)\right\}}$$



金融市場のブラウン運動

(1)時間の離散化

時間 $[0, T]$ → $\boxed{\mathcal{I}\text{ 個に分割}}$ → $\Delta T = T/\mathcal{I}$

(2)状態の離散化

市場/非市場リスク要因
$z(t), \bar{z}(t) \sim N(0, t)$

→Wiener過程(ブラウン運動の数学表現)
→時間が経つほどノイズが増大

各生起確率 1/4

単位時間の増分: $(dz, d\bar{z}) \approx \{(\sqrt{\Delta T}, \sqrt{\Delta T}), (-\sqrt{\Delta T}, \sqrt{\Delta T}),$
(四項過程の近似) $(\sqrt{\Delta T}, -\sqrt{\Delta T}), (-\sqrt{\Delta T}, -\sqrt{\Delta T})\}$

数値実験 (不動産売却権の評価)

数値実験の内容

ヨーロピアンオプション (従来拡張版)
VS
アメリカンオプション (提案モデル)

不動産価格 (市場価格) に対するオプション価格計算法を比較
→従来よりも優れた取引ができているかどうか

パラメータ設定

ヨーロピアンオプション

- 危険回避度：$\gamma = 1$, 権利行使価格：$K = 2$,
- 初期不動産価格：$P_0 = 1$, 利子率：$r = 0.04$,
- ボラティリティ：$\sigma = 0.2$, 期待収益率：$\mu = 0.02$,
- $T = 5$, $v = 0.15$

アメリカンオプション

- $P_0 \in [0, 3]$
- その他同様

数値実験結果 (不動産売却権の評価)

不動産価格と各オプション価格

- アメリカン・オプションの買手・売手価格が共に intrinsic value ((オプション権利行使価格)−(原資産価格)) 以上

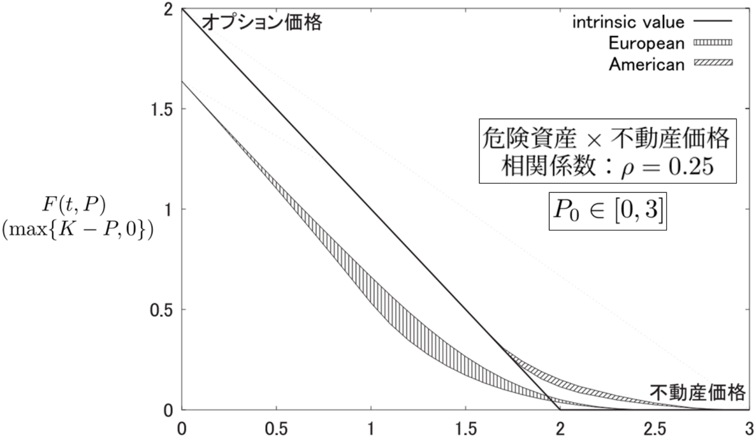


図 1: 不動産価格 (横軸) と各オプション価格 (縦軸) (一部改変)

まとめ

まとめ

- 不完備市場，権利行使時刻を考慮したリアルオプション価格評価モデルを提案
- 無裁定条件，KL 情報量下限値に基づく，オプション価格の効率的計算法を考案

今後の課題

- より複雑なリアル・オプションへのモデル拡張 (複数回の権利行使など)

自分の研究に対して

はじめに
概要
先行研究
数値実験
数値実験結果
まとめ
自分の研究に対して
文章補足

この論文の活かせる部分

- ベルマン方程式で各時刻のオプション価格を逐次的に求める部分((3) 式など)
  →時間帯 $[0, T]$ の状態遷移を微小時間に分解できる
  →**ある単語の各瞬間の流行度合いの測定**

文章補足 (提案手法 (アメリカンオプションへの適用))

(1) 権利を行使する場合

最適な $\Lambda(t) \to d\eta(t)$ 推定し、オプション価格を導出

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{1}(t,\boldsymbol{Z}) \equiv F(t,\boldsymbol{Z}) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}^{*}(t,\boldsymbol{Z}) \quad \text{-------} \ (3)$$

$$\mathcal{H}^{*}(t) \equiv \max_{\Lambda(T)} .\, \mathcal{H}(t,\Lambda(T)), \quad \text{s.t.} \ \ \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}\boldsymbol{S}(s)\right]$$

DP分解 (動的計画法)

$$\mathcal{H}^{*}(t) = \max_{\mathrm{d}\eta(t)} .\, \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[-\mathrm{d}\eta(t)\ln \mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{H}^{*+}(t)\right] \quad \text{s.t.} \ \ \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right] = \boldsymbol{0}$$

$$\left(\ \mathcal{H}^{*+}(t) \equiv \mathcal{H}^{*}(t) + \mathrm{d}\mathcal{H}^{*}(t) \ \right) \quad \text{-------} \ (4)$$

・最適 SDF 変化率 $d\eta_B^*(t)$ の導出

$$\mathrm{d}\eta^{*}(t) = \frac{\exp\left[\{\boldsymbol{\beta}^{*}(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) - \mathcal{H}^{*+}(t)\}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\{\boldsymbol{\beta}^{*}(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) - \mathcal{H}^{*+}(t)\}\right]\right]} \quad \text{-------} \ (5)$$

・最適値 $\boldsymbol{\beta}^*(t)$ の導出 (方程式の解)　$\to \boldsymbol{\beta}(t)$：Lagrange 乗数 (各資産への投資金額)

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\{\boldsymbol{\beta}^{*}(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) - \mathcal{H}^{*+}(t)\}\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right] = \boldsymbol{0}. \quad \text{-------} \ (6)$$

文章補足 (提案手法 (アメリカンオプションへの適用))

(2) dt だけ行使を待機する場合

ヨーロピアンオプションと等価

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t,\boldsymbol{Z}) \equiv \max_{\tau\in[t+\mathrm{d}t,T]} \min_{\Lambda(T)} \mathcal{C}(t,\Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t,\Lambda(T)), \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}\boldsymbol{S}(s)\right]$$

$$\Downarrow$$

DP分解 (動的計画法)

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{0}(t,\boldsymbol{Z}) = \min_{\mathrm{d}\eta(t)} \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{\frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t)\right\}\right] \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}[\mathrm{d}\eta(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)] = \boldsymbol{0}$$

-------- (7)

・最適 SDF 変化率 $d\eta_B^*(t)$ の導出

$$\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^{*}(t) = \frac{\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]\right]}$$

-------- (8)

・最適値 $\boldsymbol{\beta}^*(t)$ の導出 (方程式の解)　　→ $\boldsymbol{\beta}(t)$：Lagrange 乗数 (各資産への投資金額)

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right]\right] = \boldsymbol{0}$$

-------- (9)

オプション価格導出アルゴリズム (アメリカンオプション)

(i)$\mathcal{H}^*(t)$ の計算. (ii)$\mathcal{I}_B(t)$ の更新. (iii) オプション価格 $(C_B(t))$ の導出

(i) 最適 KL 情報量 $\mathcal{H}^*(t)$ の計算

1. 満期 $\mathcal{H}^*(T, \boldsymbol{Z}) = 0,\ \ t = T - dt,\ \ \mathcal{H}^{*+} = \mathcal{H}^*(T)$ とする
2. $\mathcal{H}^{*+}$ をもとに (6) 式から $\boldsymbol{\beta}^*(t) \rightarrow$ (5) 式に代入して $d\eta_B^*(t)$ $\rightarrow$ (4) 式に代入して $\mathcal{H}^*(t)$ を導出
3. $t = t - dt,\ \ \mathcal{H}^{*+}(t) = \mathcal{H}^*(t)$ に更新して (i)1 番へ ($t = 0$ で終了)

(ii) 最適値関数 $\mathcal{I}_B(t)$ の更新

1. 満期 $\mathcal{I}_B(t, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z}),\ \ t = T - dt,\ \ \mathcal{I}_B^+(t) = \mathcal{I}_B(T)$ とする
2. $\mathcal{I}_B^+(t)$ をもとに (9) 式から $\boldsymbol{\beta}^*(t) \rightarrow$ (8) 式に代入して $d\eta_B^*(t)$ $\rightarrow$ (7) 式に代入して $\mathcal{I}_B^0(t)$ を導出
3. $\mathcal{I}_B^1(t) = F(t) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}^*(t)$ とし, (i) で求めた各時刻の $\mathcal{H}^*(t)$ を (3) 式に代入して $\mathcal{I}_B^1(t)$ を導出
4. ・$\mathcal{I}_B^1(t) \geq \mathcal{I}_B^0(t)$ なら $\mathcal{I}_B(t) = \mathcal{I}_B^1(t)$
   ・$\mathcal{I}_B^1(t) < \mathcal{I}_B^0(t)$ なら $\mathcal{I}_B(t) = \mathcal{I}_B^0(t)$ とする

文章補足 (アメリカンオプションへの適用)

オプション価格導出アルゴリズム (アメリカンオプション)

4. $t = t - dt,\ \mathcal{I}_B^{+}(t) = \mathcal{I}_B(t)$ に更新して (ii)1 番へ ($t = 0$ で終了)

(iii) オプション価格 ($C_B(t)$) の導出

1. 満期 $C_B(t, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z}),\ t = T - dt,\ C_B^{+}(t) = C_B(T)$ とする
2. $\mathcal{I}_B^1(t) \geq \mathcal{I}_B^0(t)$ なら $C_B(t) = F(T, \boldsymbol{Z})$
   $\mathcal{I}_B^1(t) < \mathcal{I}_B^0(t)$ なら (ii)2 番の $d\eta_B^*(t)$ と $C_B^{+}(t)$ を (10) 式に代入して $C_B(t)$ を導出
3. $t = t - dt,\ C_B^{+}(t) = C_B(t)$ に更新して (iii)1 番へ ($t = 0$ で終了)

$$C_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^*(t) C_{\mathrm{B}}^{+}(t)\right] \quad \text{-------} \ (10)$$