

超離散化を用いた Burgers 方程式の制御

○和泉嘉泰 小口俊樹 (首都大学東京)

Control of Burgers' Equation via Ultradiscretization

*Y. Izumi and T. Oguchi (Tokyo Metropolitan Univ.)

Abstract— This report considers a controller design method for nonlinear partial differential equation systems via ultradiscretization. Ultradiscretization is a procedure transforming a difference equation to an ultradiscrete system such as a cellular automaton. Applying the ultradiscretization to a partial differential system, the infinite dimensional system can be reduced to a finite dimensional system. In this paper, we attempt to develop a control design method for Burgers' equation which is a fundamental partial differential equation in the field of fluid mechanics by using the ultradiscretization. The validity of the designed controller is illustrated through numerical simulations.

Key Words: Burgers' equation, Ultradiscretization, Cellular automata

1 はじめに

システムの状態方程式が偏微分方程式で表される偏微分方程式系は、自然界において多く存在し、様々な現象がこの系によってモデル化できることが知られている。一般に非線形偏微分方程式で記述されるシステムはその無限次元性により、制御系設計が困難であることが知られている。非線形偏微分方程式系の制御手法として、バックステッピング法¹⁾や、数値解法を用いた制御系設計として、POD-Galerkin 法によるモデル簡略化に基づく安定多様体法²⁾などがある。一部の非線形偏微分方程式のモデルを有限次元モデルへ簡略化する手法の一つとして、超離散化によるシステム変換がある。超離散化は、差分方程式をセル・オートマトン (Cellular Automaton, 以下 CA と記す。) に変換する極限操作である。超離散化についての研究に連続系から超離散系へのつながりについての研究³⁾などがある。

そこで本研究では、非線形偏微分方程式系に対する制御系設計のひとつのアプローチとして、超離散化による非線形偏微分方程式系のモデルの簡略化と、それに基づく制御系設計法を検討する。

本稿では、超離散化モデルについて多くの研究⁴⁾⁵⁾がある非線形偏微分方程式系として Burgers 方程式を用いて、超離散化に基づいた制御系設計を行い、数値シミュレーションによってその妥当性を検証する。

2 超離散化 BurgersCA

ここでは、まず超離散化について簡単に触れた後、本報告で用いる Burgers 方程式について述べ、超離散化により超離散 BurgersCA を導出する過程を述べる。

2.1 超離散化

超離散に用いる、極限に関する公式を次に示す。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B) \quad (1)$$

超離散化とはこの公式を用いることで、微分方程式から導出された差分方程式を、さらに従属変数についても離散化することによって、全変数を差分化することである。差分方程式の離散化とは、四則演算で構成された方程式の変数に $\exp(A/\varepsilon)$ 型の変数変換を行い、

$\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとることで、通常のとる和演算が \max 、積演算が $+$ 演算に対応し、これらの演算とで代数系をなす。

2.2 Burgers 方程式

Burgers 方程式は移流項と拡散項からなり、流体システムの制御を考える上で基礎的な流体の 1 次元衝撃波の運動を記述する非線形偏微分方程式としてよく知られている。Burgers 方程式は、コール-ホップ変換と呼ばれる変数変換によって線形の拡散方程式となることとも知られており、以下に Burgers 方程式と拡散方程式の関係性を示す。

$$\begin{aligned} u_t &= \nu(u_{xx} + \frac{2}{c}uu_x) && \text{(Burgers 方程式)} \\ \downarrow u &= c\frac{f}{f} && \text{(コール-ホップ変換)} \\ f_t &= \nu f_{xx} && \text{(拡散方程式)} \end{aligned} \quad (2)$$

ここでは、 ν, c は定数を表す。添え字の t, x はそれぞれの変数に関する偏微分を表し、添え字の個数が微分の回数を表す。

2.3 超離散 BurgersCA

(2) 式の関係性を用いたまま Burgers 方程式の差分化を行う。まず、 $\Delta x, \Delta t$ をそれぞれ空間格子、時間格子の間隔とし、拡散方程式の差分化を、

$$\frac{1}{\Delta t}(f_j^{n+1} - f_j^n) = \frac{\nu}{(\Delta x)^2}(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) \quad (3)$$

とし、 $\Delta t/(\Delta x)^2 = \alpha$ とすると、

$$f_j^{n+1} = \alpha\nu(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) + (1 - 2\alpha\nu)f_j^n \quad (4)$$

となる。次にコール-ホップ変換の差分化を、

$$u_j^n = \frac{c}{\Delta x}(\log f_{j+1}^n - \log f_j^n) \quad (5)$$

とする。(4) 式に u_j^n から v_j^n への変数変換 $v_j^n = e^{\frac{\Delta x u_j^n}{c}}$ を行くと、

$$v_j^n = \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \quad (6)$$

となる．(6) 式に (4) 式を代入することで， v_j^n の時間発展方程式

$$v_j^{n+1} = v_j^n \frac{v_{j+1}^n + \frac{1}{v_j^n} + (\frac{1}{\alpha\nu} - 2)}{v_j^n + \frac{1}{v_{j-1}^n} + (\frac{1}{\alpha\nu} - 2)} \quad (7)$$

を導くことができる．このことから，

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n \frac{v_{j+1}^n + \frac{1}{v_j^n} + (\frac{1}{\alpha\nu} - 2)}{v_j^n + \frac{1}{v_{j-1}^n} + (\frac{1}{\alpha\nu} - 2)} \\ \Downarrow v_j^n &= \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \\ f_j^{n+1} &= \alpha\nu \{ f_{j+1}^n + f_{j-1}^n + (\frac{1}{\alpha\nu} - 2) f_j^n \} \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式に示すように，(2) 式で示したコール-ホップ変換によって線形方程式に帰着するという関係を保っている Burgers 離散モデルであると考えることができる⁶⁾．この方程式を用いて超離散化を行う．まず ε をパラメータとして f_j^n, v_j^n への変数変換を，

$$\begin{cases} f_j^n = (\alpha\nu)^{-n} e^{F_j^n / \varepsilon} \\ v_j^n = e^{(U_j^n - L/2) / \varepsilon} \\ \frac{1}{\alpha\nu} - 2 = e^{(\frac{L}{2} - M) / \varepsilon} \end{cases} \quad (9)$$

とする．ここでは， L, M は定数である．(8) 式に変数変換 (9) 式を用いて， $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとると，(1) 式より，

$$\begin{aligned} F_j^{n+1} &= \max(F_{j+1}^n, F_j^n + \frac{L}{2} - M, F_{j-1}^n) \\ \Downarrow U_j^n &= F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \\ U_j^{n+1} &= U_j^n + \max(U_{j+1}^n - \frac{L}{2}, \frac{L}{2} - M, -U_j^n + \frac{L}{2}) \\ &\quad - \max(U_j^n - \frac{L}{2}, \frac{L}{2} - M, -U_{j-1}^n + \frac{L}{2}) \end{aligned} \quad (10)$$

となり，最後の式は次式と等価である．

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \min(M, U_{j-1}^n, L - U_j^n) - \min(M, U_j^n, L - U_{j+1}^n) \quad (11)$$

また，(8) 式について， $\alpha\nu = 1/2$ の場合を考えると (11) 式は，

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = U_j^n + B_j^n - B_{j+1}^n \\ B_j^n = \min(U_{j-1}^n, L - U_j^n) \end{cases} \quad (12)$$

となる．多くの場合こちらの式を超離散 BurgersCA として用いている⁷⁾．

Fig.1 に初期値として L または 0 をランダムに与えたときの超離散 BurgersCA (12) 式の挙動を表す．ここでは $L > 0$ である．Fig.1 は， j, n 番目のセルの値を U_j^n として，色の濃淡で表しており，ここでは黒色は 0 ，白色は L を意味する．

3 制御系設計

2 節で得られた超離散 BurgersCA を用いた Burgers 方程式の制御系設計を考える．超離散化モデルに対し，制御系設計を行い．超離散化モデルを逆超離散化によって差分モデルを求める．

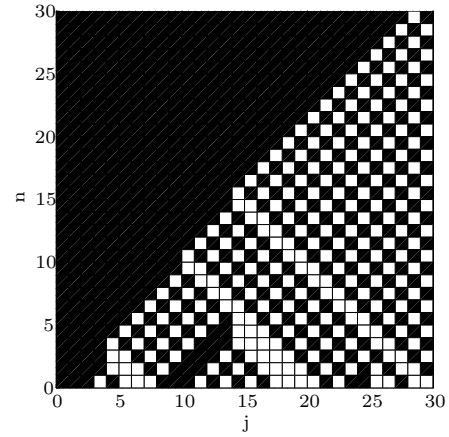


Fig. 1: BurgersCA

3.1 超離散 BurgersCA についての制御系設計

(12) 式で得られた超離散 BurgersCA は，任意の j で $0 \leq U_j^n \leq L$ のとき， $0 \leq B_j^n \leq L$ かつ， $0 \leq B_{j+1}^n \leq L$ である．よって， B_j^n を増加項， B_{j+1}^n を減少項として考えると，安定化を達成するには発散しない範囲で増加項を小さくするか，減少項を大きくすればよいことがわかる．

Table 1: Value of B_j^n , C_j^n , and D_j^n

U_{j-1}^n	U_j^n	U_{j+1}^n	B_j^n	C_j^n	D_j^n
0	0	0	0	0	$\max(0, b')$
0	0	L	0	0	$\max(0, b')$
0	L	0	0	$-L$	b'
0	L	L	L	$-L$	b'
L	0	0	L	L	L
L	0	L	L	L	L
L	L	0	0	0	$\max(0, b')$
L	L	L	L	0	$\max(0, b')$

増加項について注目すると，Table 1 より任意の j で $(U_j^n, B_j^n) = (0, L)$ ，となる部分は $(U_{j-1}^n, U_j^n) = (L, 0)$ であることから， $C_j^n = U_{j-1}^n - U_j^n$ を制御入力に利用することを考える．

ここで，ゲインを a' として $a' C_j^n$ を制御入力として考えると， $(U_{j-1}^n, U_j^n) = (0, L)$ のとき $U_j^{n+1} = (1 + a')L$ となることから，一様減衰ではない．そこで，より収束性を高めるため，制御器 C_j^n のとる負の値を $|b'| < L$ に抑制することを考えると，制御器を含む BurgersCA

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = U_j^n + B_j^n - B_{j+1}^n - a' D_j^n \\ D_j^n = \max(U_{j-1}^n - U_j^n, b') \end{cases} \quad (13)$$

を得た．この制御入力について，シミュレーションを行った結果を示す．

$a' = 0.1, b' = -0.01$ のとき Fig.2 のようになり， $-L < b' < 0$ かつ $0 < a' < 1$ のとき，超離散 BurgersCA の解が 0 に収束することがわかる．

3.2 制御器の逆超離散化

次に超離散モデルに基づいて設計した制御器を含むモデル超離散 BurgersCA (13) 式を逆超離散化し，極限をとることで，連続系における制御系を考える．逆超離散化とは，超離散化を逆の手順で行うことで，超離

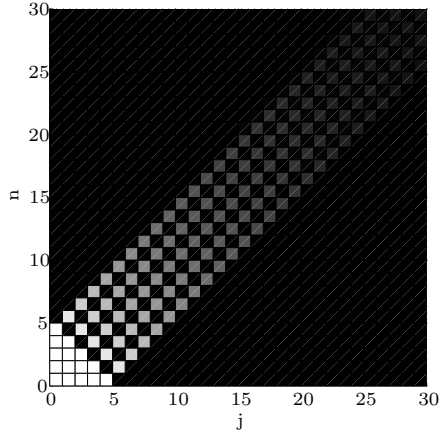


Fig. 2: Controlled BurgersCA

散モデルから差分モデルを得ることである．(13) 式について， $-L < b' < 0$ かつ $0 < a' < 1$ として逆超離散化すると，

$$v_j^{n+1} = v_j^n \left(\frac{v_j^n}{v_{j-1}^n} \right)^{a'} \frac{v_{j+1}^n + \frac{1}{v_j^n} + (\frac{1}{\alpha\nu} - 2)}{v_j^n + \frac{1}{v_{j-1}^n} + (\frac{1}{\alpha\nu} - 2)} \quad (14)$$

となる．一般に逆超離散化には一意性はないが，(14) 式が (13) 式の逆超離散化になっていることは，(14) 式を超離散化することによって確認できる．

微分を以下のように定めると，

$$\begin{aligned} \Delta_t^+ g(x, t) &= (\Delta t)^{-1} [g(x, t + \Delta t) - g(x, t)] \\ \Delta_x^2 g(x, t) &= (\Delta x)^{-2} [g(x + \Delta x, t) - 2g(x, t) \\ &\quad + g(x - \Delta x, t)] \end{aligned} \quad (15)$$

となる．

(14) 式を $v_j^n = e^{\frac{\Delta x u_j^n}{c}}$ により u_j^n について書き直し \log を両辺にとると以下ようになる．

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \Delta_t^+ u_j^n &= \Delta_x^+ \frac{1}{\alpha(\Delta x)^2} \left[a' \frac{\Delta x u_{j-1}^n}{c} \right. \\ &\quad \left. + \log \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu \left(e^{\frac{\Delta x u_j^n}{c}} + e^{-\frac{\Delta x u_{j-1}^n}{c}} - 2 \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

ここで， $\Delta t \rightarrow 0$ で下線部は 0 に近づくので， $x \approx 0$ のとき成り立つ近似式

$$\log(1 + x) \approx x \quad (17)$$

を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \Delta_t^+ u_j^n &= \Delta_x^+ \frac{1}{\alpha(\Delta x)^2} \left[a' \frac{\Delta x u_{j-1}^n}{c} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \nu \left(e^{\frac{\Delta x u_j^n}{c}} + e^{-\frac{\Delta x u_{j-1}^n}{c}} - 2 \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

(18) 式右辺の $e^{\frac{\Delta x u_j^n}{c}}, e^{-\frac{\Delta x u_{j-1}^n}{c}}$ をそれぞれ $u = 0$ まわりでテイラー展開すると以下ようになる．

$$\begin{aligned} e^{\frac{\Delta x u_j^n}{c}} &= 1 + \frac{\Delta x}{c} u_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{2c^2} (u_j^n)^2 + h.o.t. \\ e^{-\frac{\Delta x u_{j-1}^n}{c}} &= 1 - \frac{\Delta x}{c} u_{j-1}^n + \frac{(\Delta x)^2}{2c^2} (u_{j-1}^n)^2 + h.o.t. \end{aligned} \quad (19)$$

ここで， $h.o.t.$ は Δx^3 以上の高次項を表す．これを (18) 式に代入し， $\Delta x \rightarrow 0$ において Δx^3 以上の高次項は無視すると，

$$\frac{1}{c} \Delta_t^+ u = \Delta_x^+ \left(\frac{2a'}{c\Delta x} u + \frac{\nu}{c} u_x + \frac{\nu}{c^2} u^2 \right) \quad (20)$$

となり，時間と空間の極限を $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ とすれば，

$$u_t = \nu(u_{xx} + \frac{2}{c} u_x u) + \frac{2a'}{c\Delta x} u_x \quad (21)$$

となる．ここで a' は制御パラメータであるため， Δx に対応して小さくすることで (21) 式下線部を定数と考え，次に示す制御器付き Burgers 方程式を得る．

$$u_t = \nu(u_{xx} + \frac{2}{c} u_x u) + \frac{A}{c} u_x \quad (22)$$

ただし， $A > 0$ ．

4 数値シミュレーション

制御系に対して，数値シミュレーションによる検討を行う．数値シミュレーションは一次風上差分法を用い，差分分解の数値振動回避のため Patankar の正係数条件⁸⁾⁹⁾を用いた．

Patankar の正係数条件は，差分式

$$u(x) = \sum_k a_k u(x + k\Delta x) \quad (23)$$

において，ある格子点での値が増加すれば隣接点での値は増加する．という物理要請から，そのための十分条件として $a_k \geq 0$ という条件をあたえる．

4.1 制御性能検証

各パラメータ，境界条件，初期条件を各々次の様に与える．

$$\begin{cases} c = -0.2 \\ \nu = 0.1 \\ A = 0.1 \\ \Delta x = 0.01 \\ \alpha = 1/2 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} 0 \leq t \\ 0 \leq x \leq 3 \\ u(0, t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 3 & (1 \leq x \leq 3) \\ 0 & (0 \leq x < 1) \end{cases} \quad (26)$$

これらの条件のもと，(2) 式の Burgers 方程式と (22) 式について数値シミュレーションを行った．

得られた結果が，Figs.3,4 であり，設計した制御器によって解が 0 に収束していることがわかる．

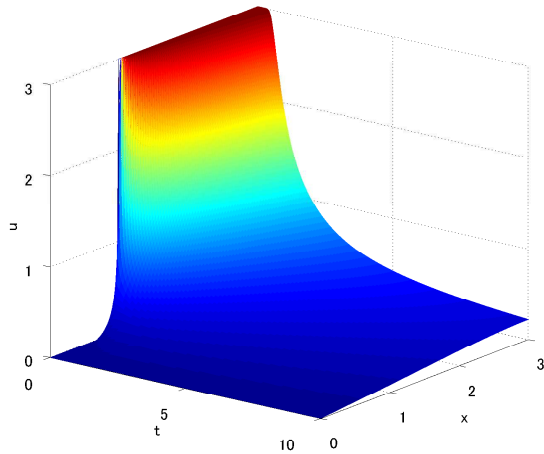


Fig. 3: Solution of Burgers equation

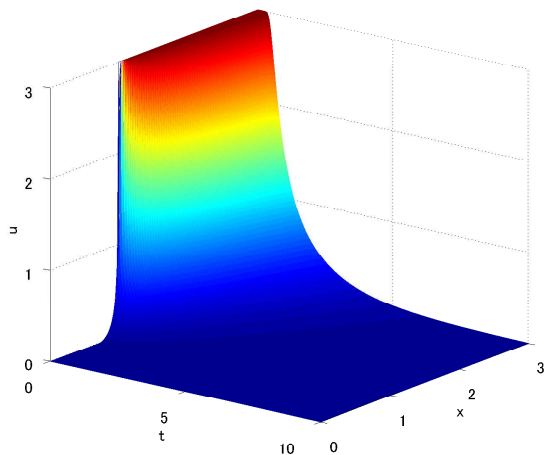


Fig. 4: Solution of controlled Burgers equation

4.2 制御性能評価

(22) 式の制御入力のパラメータ A の影響を見るため、異なる A における数値シミュレーションを行った。集合 Ω を $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$ と定義する。性能を定量的に比較するため、

$$V = \int_{\Omega} |u(x, t)| dx \quad (27)$$

を定め、 V が 0 に漸近するとき解が一様に 0 に収束すると考え、 V と時間に注目して制御入力のパラメータ A による影響を比較した。なお、 A 以外のパラメータ、境界条件、初期条件は各々(24), (25), (26) 式と同じものを用いた。

得られた結果は Fig.5 であり、制御入力のパラメータ A が大きいほど収束性が早くなることがわかる。

5 おわりに

本稿では、非線形偏微分方程式で記述されるシステムについてひとつのアプローチとして超離散化を用いた制御系設計を行った。まず、超離散化を用いて Burgers 方程式から超離散 BurgersCA を導出し、超離散 BurgersCA に対して制御系を設計し、制御器付き超離散 BurgersCA を逆超離散化し、差分方程式から極限をとり制

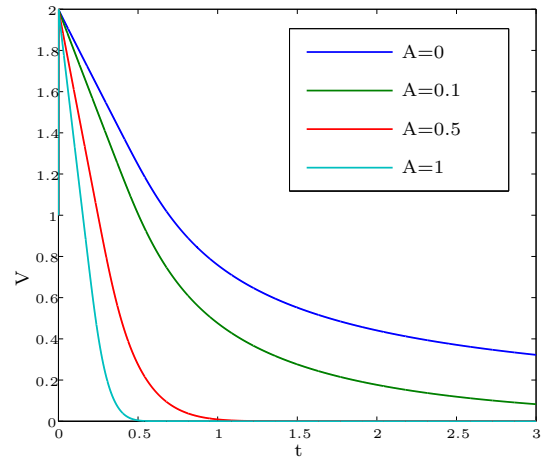


Fig. 5: Effect of parameter A

御器付き Burgers 方程式を得た。次に制御の妥当性とパラメータによる影響を数値シミュレーションによって確認した。

これにより、一部の偏微分方程式系について超離散化を用いて制御器の設計が可能であることがわかった。

今後は、この手法の他の偏微分方程式系への拡張について検討したいと考えている。

参考文献

- 1) M. Krstic, A. Smyshlyaev, Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs, SIAM, Philadelphia (2008)
- 2) 濱口謙一, 西田豪, 坂本登, 山本裕, 分布定数系の最適制御, 第 56 回自動制御連合講演会予稿集 (2013)
- 3) 薩摩順吉, 時弘哲治, 超離散化:セルオートマトンと微分方程式をつなぐ, 応用数理, Vol.9, No.3 (1999)
- 4) 山田剛, 拡張結合型 Burgers 方程式による多車線交通流モデルの提案, 応用力学研究所研究集会報告 No.19ME-S2 (2008)
- 5) 清田将太, 山本茂, 拡張 Burgers セルオートマトンモデルに基づく渋滞制御, 第 43 回 SICE 北海道支部学術講演会 (2011)
- 6) R. Hirota, Nonlinear Partial Difference Equations. V. Nonlinear Equations Reducible to Linear Equations, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.46, No.1 (1979)
- 7) 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 153/179, 共立出版 (2003)
- 8) 富山明男, 高橋亮一, 流れの数値解法における高次差分法の数値的安定性と数値振動, 日本原子力学会誌, Vol.32, No.10 (1990)
- 9) V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, 36/39, McGRAW-HILL(1980)