論文紹介
CPM を用いた不確実・不確定状況下における
クリティカルパスの求解

氷見夏輝

富山県立大学

November 26, 2024

本研究の背景

背景

都市の再開発や町おこし，震災復興といった非常に大規模なものや，新商品開発といった企業に特化したもの，また生産物流におけるサプライチェーンも原料の仕入れから消費者へ商品を届けるまでの一連の流れもプロジェクトと見なすことができる．
このようなプロジェクトにおいて，プロジェクト内の個々の作業の遅延や中間生成物の品質の低下は，プロジェクト全体の崩壊を引き起こす可能性があり，特にボトルネックとなる一連の過程は，危険な要因として最も注視する必要がある．よって，プロジェクト内のボトルネック過程を発見することは，プロジェクト遂行において最重要課題となる．

本研究の目的

目的

本論文ではプロジェクト完了時間に至るまでの時間・日程管理に関するボトルネックを発見する手法に着目し，CPM を導入する．
CPM において，ボトルネックとなる工程はクリティカルパスと呼ばれ，クリティカルパスを発見管理することで，プロジェクト全体の管理遂行を行うことが可能である．
CPM を用いたクリティカルパスを求めるための数理モデリングはネットワーク計画問題の枠組みで行われ，最長路問題 (最短路問題の逆) として定式化することができる．
資源導入により作業時間が短縮される確率が増加するものと仮定した状況下において，状況を満たす確率最大化をリスク管理の観点から導入した CPM を提案する．また提案 CPM を用いた数理モデルに対し，主問題の最適性を失うことなく等価確定変換を行うとともに，ネットワーク計画法を用いた解法アルゴリズムを開発する．

TOYAMA Prefectural University

用語解説

まとめ

CPM(Critical Path Method)

CPM は PERT(ProgramEvaluation and Review Technique) とともに，プロジェクト内のボトルネック工程を発見する代表的な手法の 1 つであり，様々な生産システムや経営システムの中に組み込まれている．

ファジィ数

実数のファジィ概念化であり，例えば募集人員 100 人とかいてあると 100 人がもっともありうるが 99 人とか 101 人の場合であってもよいような状況を表すことができる．帰属度関数が上半連続，正規かつ凸性をもつファジィ集合と定義される場合が多い．特にデータに曖昧性が含まれる現実問題をモデル化する際に有効である．解析等の簡便さなどから，帰属度関数が三角形をした三角型ファジィがよく用いられる．

研究の概要

まとめ

不確実性不確定性を考慮した CPM によるクリティカルパス求解の数理モデル提案

各有向枝を以下のように最短作業時間となる場合から最悪作業時間となる場合までに分割を行い，それぞれに作業時間が $t_{ij}^{(k_{ij})}$ 以下となる累積確率 $\beta_{ij}^{(k_{ij})}$ を付与する．

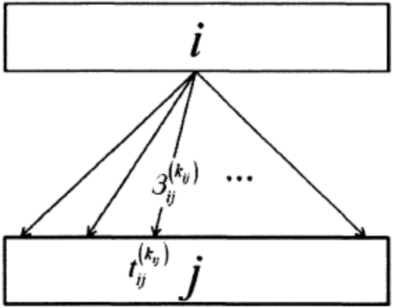

図 1　起こりうる作業時間(有向枝) $t_{ij}^{(k_{ij})}$ とその累積確率分布 $\beta_{ij}^{(k_{ij})}$

研究の概要

不確実性不確定性を考慮した CPM によるクリティカルパス求解の数理モデル提案

さらに $\tilde{c}_{ij}$ として，作業時間が少なくなるような有向枝の累積確率を上昇させるための資源導入量を設定する．本論文ではファジィ数の最も基本的かつ特殊な場合として，以下のような区間値として設定している．

$$\tilde{c}_{ij} = \left[c_{ij}^{L}, c_{ij}^{U}\right] = \left[\overline{c}_{ij} - \varepsilon_{ij}, \overline{c}_{ij} + \varepsilon_{ij}\right]$$

研究の概要

不確実性不確定性を考慮した CPM によるクリティカルパス求解の数理モデル提案

以上の設定から，$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{ij}}^{(k_{ij})}$ を有向枝の中からどの枝を選択するかの 0-1 変数，また y_j を作業 j の開始可能時刻，プロジェクト完了時刻を T とし，作業時間の不確実性を有しながら，できるかぎり最終作業 t が完了時刻 T 以下となるように，つまり，完了時刻 T 以下となる累積確率をできるだけ大きくするような CPM を以下のように定式化する．

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & \prod_{(i,j)\in E_R,\, k_{ij}\in A_{ij}} \beta_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} \\
\text{subject to} \quad & y_i + t_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} - y_j \le 0, \ \left((i,j)\in E\right) \\
& y_s = 0,\ y_t \le T, \\
& y_j \ge 0,\ j \in V \\
& \sum_{k_{ij}\in A_{ij}} x_{ij}^{(k_{ij})} = 1,\ x_{ij}^{(k_{ij})} \in \{0,1\}, \begin{pmatrix} (i,j)\in E, \\ k_{ij} \in A_{ij} = \{1,\ldots,\alpha_{ij}\} \end{pmatrix} \\
& \sum_{(i,j)\in E} \tilde{c}_{ij} \preceq \tilde{C}
\end{aligned}
$$

不確実性不確定性を考慮した CPM によるクリティカルパス求解の数理モデル提案

ここで，E_R は開始ノード s から終了ノード t まで到達可能なルートの集合である．また $\tilde{C}$ は最大投入可能コストであり，左辺の $\tilde{\boldsymbol{c}}_{ij}$ がファジィ数 (区間値) を考慮して，本論文では $\tilde{C}$ を区間値として設定する，つまり，$\tilde{C} = [C^L, C^U]$ と設定する．

累積確率

投入資源により累積確率が変化する場合

提案モデルでは資源投入 $\tilde{\boldsymbol{c}}_{ij}$ により累積確率が変化することを考慮する，つまり累積確率 $\beta_{ij}^{(k_{ij})}$ は次のような $\tilde{c}_{ij}$ に依存した形

$$\beta_{ij}^{(k_{ij})} \leftarrow \overline{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} \triangleq \min\left\{\beta_{ij}^{(k_{ij})}\left(\overline{c}_{ij}\right), 1\right\}$$

投入資源により累積確率が変化する場合

で再設定される．またファジイ数 (区間値) による制約条件 $\sum_{(i,j)\in E} \tilde{c}_{ij} \preceq \tilde{C}$ は，区間値の下限値，上限値の不等式関係を次のように表現することで，確定変換を行う．

累積確率

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad \sum_{(i,j)\in E,\, k_{ij}\in A_{ij}} \left(\log \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})}\right) x_{ij}^{(k_{ij})} \\
&\text{subject to} \quad y_i + t_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} - y_j \le 0, \ \left((i,j)\in E\right) \\
&\qquad y_s = 0,\ y_t \le T,\ y_j \ge 0,\ j \in V \\
&\qquad \sum_{k_{ij}\in A_{ij}} x_{ij}^{(k_{ij})} = 1,\ x_{ij}^{(k_{ij})} \in \{0,1\}, \left((i,j)\in E, k_{ij}\in A_{ij}\right) \\
&\qquad \sum_{(i,j)\in E} \left(\bar{c}_{ij} - \varepsilon_{ij}\right) \le C^L,\ \sum_{(i,j)\in E} \left(\bar{c}_{ij} + \varepsilon_{ij}\right) \le C^U, \\
&\qquad \bar{\beta}_{ij}^{(k_{ij})} = \left[\beta_{ij}^{(k_{ij})}\left(\bar{c}_{ij}\right), 1\right]^{-} \ \left((i,j)\in E\right)
\end{aligned}
$$

累積確率

投入資源により累積確率が変化する場合

この問題は連続決定変数の y_j および 0-1 決定変数 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{ij}}^{(k_{ij})}$ の両方が含まれる 0-1 混合整数計画問題であり，さらに累積確率 $\overline{\beta_{ij}}^{(k_{ij})}$ に関して min 関数が用いられているため非線形性が強く，規模の大小にかかわらず厳密解法を適用するには限界があり，近似解法やタブサーチ，またはソフトコンピューティングなどの手法を利用する必要がある．

作業時間

まとめ

投入資源により作業時間が変化する場合

提案モデルでは資源投入 $\tilde{c}_{ij}$ が作業時間に直接的に作用する場合，作業時間が資源投入に依存する以外の部分，次の問題に変換される．

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize}\quad & \sum_{(i,j)\in E,\, k_{ij}\in A_{ij}} \left(\log \beta_{ij}^{(k_{ij})}\right) x_{ij}^{(k_{ij})} \\
\text{subject to}\quad & y_i + \bar{t}_{ij}^{(k_{ij})} x_{ij}^{(k_{ij})} - \lambda_{ij}\bar{c}_{ij} x_{ij}^{(k_{ij})} - y_j \le 0,\ \left((i,j)\in E\right) \\
& y_s = 0,\ y_t \le T,\ y_j \ge 0,\ j\in V \\
& \sum_{k_{ij}\in A_{ij}} x_{ij}^{(k_{ij})} = 1,\ x_{ij}^{(k_{ij})} \in \{0,1\}, \left((i,j)\in E, k_{ij}\in A_{ij}\right) \\
& \sum_{(i,j)\in E} \left(\bar{c}_{ij} - \varepsilon_{ij}\right) \le C^L,\ \sum_{(i,j)\in E} \left(\bar{c}_{ij} + \varepsilon_{ij}\right) \le C^U,
\end{aligned}
$$

作業時間

投入資源により作業時間が変化する場合

min 関数を含まない通常の 0-1 混合整数計画問題となっているため，規模がそこまで大きくない問題であれば CPLEX などのソルバーを用いることで厳密に解くことは可能である．中規模から大規模になると厳密解法を適用するには限界があるが，ネットワーク計画法を近似解法やタブサーチ，またはソフトコンピューティングなどの手法にうまく組み込むことにより，効率的にクリティカルパスを求めることが可能であると考えられる．

まとめ

今後の展開

今後は，実際にネットワーク計画法とソフトコンピューティングやタブサーチといった手法との組合せによる効率的かつ汎用的な解法アルゴリズムの開発や，実プロジェクトのデータを適用したモデルの検証，評価を行うことで改良点の考察を行っていく．

[1].

[1]大阪大学大学院・情報科学研究科 蓮池隆 “CPM を用いた
不確実・不確定状況下におけるクリティカルパスの求解 ”, 数理解析研究所講究録第 1829 巻 2013 年 72-79