

- 1 はじめに
- 2 シナプス可塑性に影響する要因
- 3 シナプス可塑性方程式
- 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

# Dele 則を考慮した シナプス可塑性方程式の解析

## Analysis of the Synaptic Plasticity Equation Considering the Dale Rule

March 29, 2024

# 1 本研究の背景

2/19

## 背景

生体では、シナプス結合の性質が興奮性、抑制性であるのかは送り出すニューロンにより決まる。微小な領域では成長や活動に必要な物質は競合によりシナプスに摂取される。シナプス可塑性のモデル化において重要な要因であると考えられる。

## 目的

発火頻度や膜の特性変化を生じる物質の時間変化と、生理学的拘束条件である Dale 則や微小な領域での競合を考慮したシナプス可塑性方程式を導出する。提案するシナプス可逆性方程式を解析することで、シナプスでは分岐を利用した情報処理が可能であることを示す。

1 はじめに

2 シナプス可塑性に影響する要因

3 シナプス可塑性方程式

4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

## 2 シナプス可塑性に影響する要因

3/19

### シナプス可塑性

- 1 はじめに
- 2 シナプス可塑性に影響する要因
- 3 シナプス可塑性方程式
- 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

脳内には、ニューロンと呼ばれる神経細胞がシナプスを介し繋がっており、電子回路のようなネットワークを作成し情報を伝達している。ニューロン同士を接続するシナプスはニューロンから受け取った情報をそのまま流すのではなく、シナプスを大きくしたり小さくしたりすることで、情報の伝わりやすさを操作しており、その変化のことをいう。

### Hebb 則

シナプス可塑性は次の Hebb 則が提案され認められている。

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = A_i A_j \quad (1)$$

$A_i$ ：第  $i$  ニューロンの活動度

$\omega_{ij}$ ：第  $j$  ニューロンから第  $i$  ニューロンへのシナプス間感度

## 2 シナプス可塑性に影響する要因

4/19

### 記憶

- 1 はじめに
- 2 シナプス可塑性に影響する要因
- 3 シナプス可塑性方程式
- 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

### 短期記憶 (STM)

- ニューロン回路説  
電気刺激がシナプスの結合回路で保持され実現される

### 長期記憶 (LTM)

- シナプスの膜の特性が変化することで獲得されると考えられている  
一般的にたんぱく質の合成が必要であるとされる

## ニューロンとシナプスの関係性

神経細胞（ニューロン）は、脳を構成する基本的な単位です。ニューロンは主に細胞体、樹状突起、および軸索から構成されています。軸索の端部にあるシナプスは、隣接するニューロンの細胞体に化学伝達物質を放出することで情報を伝えます。この伝達はシナプス間隔を介して行われます。

1 はじめに

2 シナプス可塑性に影響する要因

3 シナプス可塑性方程式

4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

# 3 Dale 則を考慮したシナプス可塑性方程式

6/19

1 はじめに  
2 シナプス可塑性に影響する要因  
3 シナプス可塑性方程式

4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

シナプスが興奮性、抑制性に関わらず STM に関連する発火頻度と LTM に関連する神経成長因子 (NGF) の影響を組み合わせたものに従う。その関係性は以下の方程式で表される。

$$\frac{d\mu_j \omega_{ij}^k}{dt} = \epsilon \overline{\eta_i^k \zeta_{ij}^k} \mu_i \omega_{ij}^k + g_{ij}^k \mu_j \omega_{ij}^k + f_{ij}^k \quad (2)$$

- $B_i^k$  : NGF が他の因子と競合する際のシナプス感覚の微小な領域  
 $i$  はニューロンの番号,  $k$  はそのニューロン内の微小領域の番号
- $\zeta_{ij}^k$  : シナプス前終末発火頻度 (各ニューロンの微小領域において情報を送る側のニューロンの端部)
- $\eta_i^k$  : シナプス後発火頻度 (信号が次のニューロンの細胞膜に作用するときの受け取る側のニューロン)
- $\omega_{ij}^k$  : シナプス間感度 (どの程度効率的に信号が伝わるかを示した指標)

1 はじめに

2 シナプス可塑性に影響する要因

3 シナプス可塑性方程式

4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

(2) の式では

- $\mu_j$  : 第  $j$  ニューロンが興奮性であるときに 1 となり、抑制性であるときに -1 となる Dale 則を考慮するための識別子
- $g_{ij}^k$  :  $B_i^k$  に供給される NGF のうち、その領域に付着している第  $j$  ニューロンのシナプスが入手できる量
- $f_{ij}^k$  : NGF と環境因子に依存する揺らぎ
- $\omega$  は右辺第 1 項の発火頻度と、第 2 項の NGF という異なる次元を結び付けるための正の定数

よって、右辺の第 1 項は Hebb 則を表しているといえる。 $\overline{\eta_i^k \zeta_{ij}^k}$  は以下のように定義される。

$$\overline{\eta_i^k \zeta_{ij}^k} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \eta_i^k(t') \zeta_{ij}^k(t') dt' \quad (3)$$

- $\tau$  : シナプス間感度の大きさの時間変化に、Hebb 側の効果が影響を及ぼす時間の長さを規定するもの

# 3 Dale則を考慮したシナプス可塑性方程式

8/19

1 はじめに

2 シナプス可塑性に影響する要因

3 シナプス可塑性方程式

4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

また NGF の量  $g_{ij}^k$  は次の方程式に従う.

$$\frac{dg_{ij}^k}{dt} = \alpha_i^k (G_i^k - g_{ij}^k) - (\beta_i^k \mu_j \omega_{ij}^k + \sum_{h \neq k} \mu_h \omega_{ih}^k) \quad (4)$$

- $G_i^k : B_i^k$  への NGF の供給速度. 膜の特性により決定される変数  
NGF の供給速度の時間変化が無視できるものとし, 定数とみなす.
- $\alpha = i^k \cdot \beta_i^k$  : 正の定数

シナプス間感度の時間変化は発火頻度に依存するため, シナプス間感度の時間変化に対し, NGF の量の時間変化は無視できるものとする. 以下の Dale 則を考慮したシナプス可塑性の方程式が導かれる.

$$\frac{d\mu_j \omega_{ij}^k}{dt} = (G_i^k - \frac{a_i^k}{1} \sum_{h \neq k} \mu_h \omega_{ih}^k + \epsilon \overline{\eta_i^k \zeta_{ij}^k}) \mu_j \omega_{ij}^k - \frac{a_i^k}{\beta_i^k} (\omega_{ij}^k)^2 + f_{ij}^k \quad (5)$$

## 探索機能

1 はじめに

2 シナプス可塑性に影響する要因

3 シナプス可塑性方程式

4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

$$x_i = (\lambda_i - \alpha x_i - \sum_{j \neq i} x_j) x_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (6)$$

ここで  $x_i \geq 0, \alpha > 1, \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N > 0$  であり, この系は次のような分岐特性が示される.

1  $\frac{\lambda_N}{\lambda_1} > \alpha > 0$  の場合

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\lambda_i}{\alpha} & (i = i_0 : i_0 \in 1, \dots, N) \\ x_i &= 0 & (i \neq i_0) \end{aligned}$$

2  $\frac{\lambda_N}{\lambda_1} > \alpha > \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_1}$  の場合

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\lambda_i}{\alpha} & (i = i_0 : i_0 \in 1, \dots, n) \\ x_i &= 0 & (i \neq i_0) \end{aligned}$$

1 はじめに

2 シナプス可塑性  
に影響する要因

3 シナプス可塑性  
方程式

4 シナプス可塑性  
方程式における競  
合と分岐

3  $1 + \Lambda > \alpha > \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  の場合

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\alpha} \quad (i = 1)$$

$$x_i = 0 \quad (i = 2, \dots, N)$$

4  $1 + \Lambda > \alpha > (1 - \Lambda_{n-1})$  の場合

$$x_i = \frac{(\alpha+n-1)\lambda_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j}{(\alpha-1)(\alpha+n-1)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x_i = 0 \quad (i = n+1, \dots, N)$$

5  $\alpha > (1 - \Lambda_{N-1})$  の場合

$$x_i = \frac{(\alpha+N-1)\lambda_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j}{(\alpha-1)(\alpha+N-1)} \quad (i = 1, \dots, N)$$

ここで  $\Lambda_n = \sum_{j=1}^n (\lambda_j / \lambda_{n+1} - 1)$  であり,  $\Lambda_0 = 0$  である.

## シナプスは nerve growth factor

- はじめに
- シナプス可塑性に影響する要因
- シナプス可塑性方程式
- シナプス可塑性方程式における競合と分岐

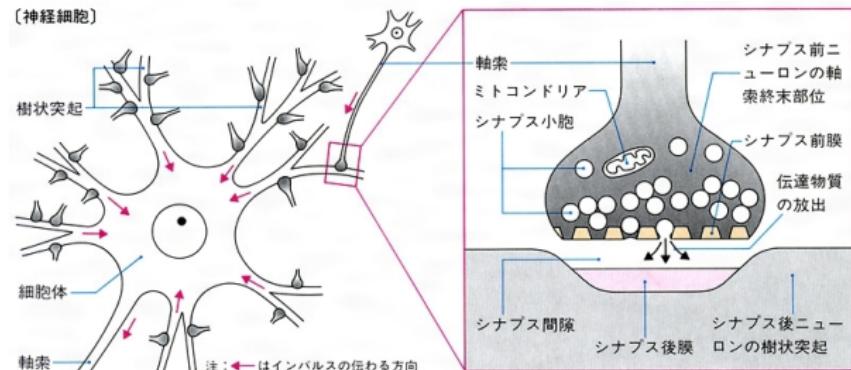


図 1

# 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

12/19

上記の探索機能の式をプログラムで実行させる

- 1 はじめに
- 2 シナプス可塑性に影響する要因
- 3 シナプス可塑性方程式
- 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

```

1  import numpy as np
2  from scipy.integrate import odeint
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  # システムの定義
6  def model(x, t, alpha, lambdas):
7      N = len(x) # xの要素数
8      dxdt = np.zeros(N) # 微分方程式の結果を格納する配列
9      for i in range(N):
10          x_i = x[i]
11          lambda_i = lambdas[i]
12          sum_x_j = np.sum(x) - x_i # i以外のx_jの合計
13          dxdt[i] = (lambda_i - alpha * x_i - sum_x_j) * x_i
14      return dxdt
15
16  # 初期条件とパラメータ
17  N = 5
18  x_0 = np.random.rand(N) * 5 # 初期値をランダムに設定
19  #lambdas = np.random.rand(N) * 2 # lambda_iの値をランダムに設定
20  lambdas=[1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0]
21  alpha = 1 # alphaの値
22
23  # 時間の定義
24  t = np.linspace(0,10,100) # 0から10までの時間を100ステップに分ける
25
26  # ODEを解く
27  x_t = odeint(model, x_0, t, args=(alpha, lambdas))
28
29  # 結果をプロット
30  for i in range(N):
31      plt.plot(t, x_t[:, i], label=f'x_{i+1}')
32
33  plt.xlabel('Time')
34  plt.ylabel('x_i(t)')
35  plt.ylim(0,2)
36  plt.legend()
37  plt.show()

```

図 2: プログラム全体

# 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

13/19

初期値とパラメーターは以下のように行った。  
 $N, x_0$  は固定させ,  $\lambda, \alpha$  は条件により変更させる

```
16  # 初期条件とパラメータ
17  N = 5
18  x_0 = np.random.rand(N) * 5 # 初期値をランダムに設定
19  #lambdas = np.random.rand(N) * 2 # lambda_iの値をランダムに設定
20  lambdas=[1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0]
21  alpha = 1 # alphaの値
```

図 3: 初期値とパラメーター

1 はじめに

2 シナプス可塑性  
に影響する要因

3 シナプス可塑性  
方程式

4 シナプス可塑性  
方程式における競  
合と分岐

## 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

1 はじめに

2 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

3 シナプス可塑性方程式

4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

1  $\frac{\lambda_N}{\lambda_1} > \alpha > 0$  の場合

$\lambda = [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0]$  の場合,  $5 > \alpha > 0$  となる.  
 $\alpha$  は 2 とした.

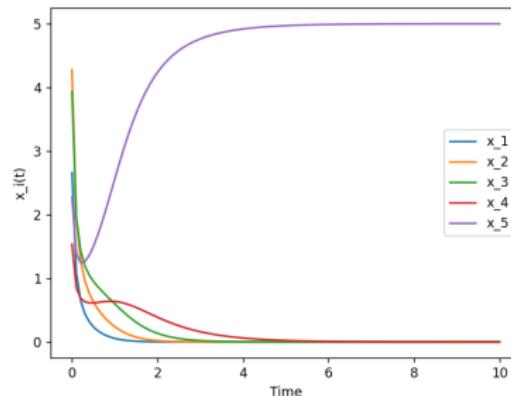


図 4

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\alpha} \quad (i = i_0 : i_0 \in 1, \dots, N)$$

$$x_i = 0 \quad (i \neq i_0)$$

## 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

2  $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} > \alpha > \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1}$  の場合

$n=3$

$\lambda=[1.0, 2.0, 4.0, 3.0, 5.0]$  の場合,  $4 > \alpha > 3$  となる.  
 $\alpha$  は 3.5 とした

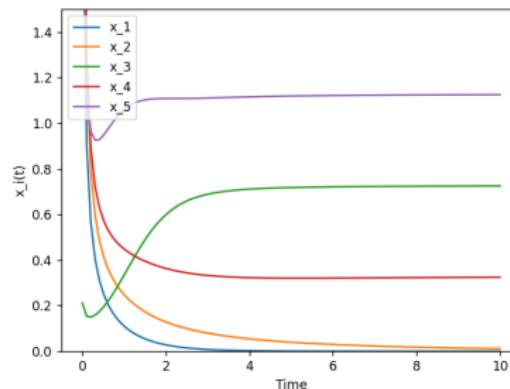


図 5

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\alpha} \quad (i = i_0 : i_0 \in 1, \dots, n)$$

$$x_i = 0 \quad (i \neq i_0)$$

### 3 $1 + \Lambda_1 > \alpha > \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ の場合

$\lambda = [4.0, 1.0, 3.0, 2.0, 5.0]$  の場合,  $4 > \alpha > \frac{1}{4}$  となる.  
 $\alpha$  は 1 とした

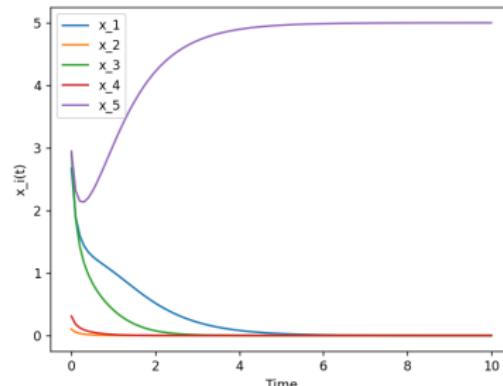


図 6

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\alpha} \quad (i = 1)$$

$$x_i = 0 \quad (i = 2, \dots, N)$$

1 はじめに

2 シナプス可塑性  
に影響する要因

3 シナプス可塑性  
方程式

4 シナプス可塑性  
方程式における競  
合と分岐

## 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

### 4 $1 + \Lambda_n > \alpha > (1 + \Lambda_{n-1})$ の場合

$n=3$

$\lambda = [5.0, 4.0, 3.0, 2.0, 1.0]$  の場合,  $7 > \alpha > 2.5$  となる.  
 $\alpha$  は 3 とした

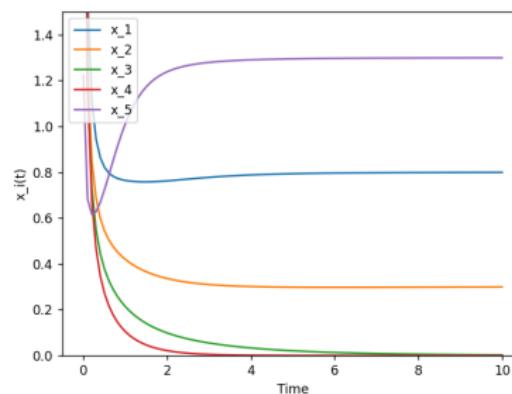


図 7

$$x_i = \frac{(\alpha+n-1)\lambda_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j}{(\alpha-1)(\alpha+n-1)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x_i = 0 \quad (i = n+1, \dots, N)$$

## 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

### 5 $\alpha > (1 - \Lambda_{N-1})$ の場合

$\lambda = [5.0, 4.0, 3.0, 2.0, 1.0]$  の場合,  $\alpha > 10$  となる.  
 $\alpha$  は 14 とした

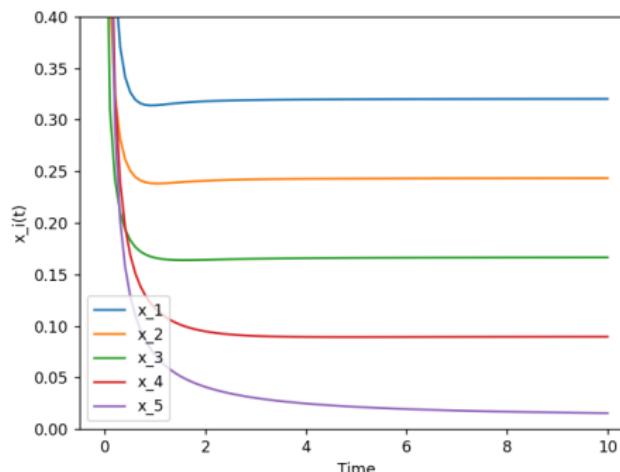


図 8

$$x_i = \frac{(\alpha + N - 1)\lambda_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j}{(\alpha - 1)(\alpha + N - 1)} \quad (i = 1, \dots, N)$$

## 課題

- 1 はじめに
- 2 シナプス可塑性に影響する要因
- 3 シナプス可塑性方程式
- 4 シナプス可塑性方程式における競合と分岐

今回は探索機能の式を用い、実行を行った。  
実際の式である

$$\frac{d\mu_j \omega_{ij}^k}{dt} = (G_i^k - \frac{a_i^k}{1} \sum_{h \neq k} \mu_h \omega_{ih}^k + \epsilon \overline{\eta_i^k \zeta_{ij}^k}) \mu_j \omega_{ij}^k - \frac{a_i^k}{\beta_i^k} (\omega_{ij}^k)^2 + f_{ij}^k \quad (7)$$

を実際に動かし、理解する。