提携の実現に制限のある協力ゲーム

楠木 祥文
高田 知樹

富山県立大学　電子・情報工学科
t915052@st.pu-toyama.ac.jp

November 4, 2021

本研究の背景と目的

背景と目的

提携に制限のあるゲームの紹介として, 伝達構造と許可構造を伴うゲームとそれらの値を解説し, 協力ゲーム的なモデリングと分析に興味を持ってもらうことである.

ゲーム理論とは

ゲーム理論とは, 複数の意思決定者が相互に影響を及ぼす状況を記述・分析する道具立てであると考えることができる. ゲーム理論は一つの理論体系ではなく, 相互作用する社会的意思決定状況を対象とする複数の異なる分野のアプローチの集まりである.
ゲーム理論には. 非協力ゲームと協力ゲームという異なるアプローチがある. この二つの違いは, 拘束力のある合意の仮定にあり, 非協力ゲームでは拘束力のある合意を仮定しない状況で, 各プレイヤーがその目的を達成するために, 行動をどのように選択するかが主題となる. これに対し, 本稿で解説する協力ゲームでは, 拘束力のある合意を持つことをプレイヤーに認める. その場合, プレイヤーは集団の利得の総和が最大となるよう行動し, 合意内容にしたがってその利益を分け合う. 協力ゲームでは, プレイヤーの行動選択は問題にならず, 利得分配に対するプレイヤー間の合意が主題となる.

提携形ゲーム

提携形ゲームとは

N={1,2,3,...,n} を n 人のプレイヤー集合とする.N の各部分集合 S ⊆ N は提携と呼ばれる. 各提携 S に対して, v（S）はそのメンバーが協力することによって得られる利益を表し,S の提携値と呼ばれる. 提携形ゲームでは, 特性関数に対して各プレイヤーの利得を与える関数によって, 交渉過程が表現される. そのような関数をゲームの解といい, 妥当な解を提案することや, それらを比較分析することが, 提携形ゲームの主な理論的研究となる.

提携形ゲームの例題

例題 1

5 人のプレイヤーが集合 R=123 と L=45 に分割されている.R の各プレイヤーは右の手袋 1 枚を,L の各プレイヤーは左の手袋 1 枚を持っている. 右と左の手袋は単独では価値がないが, 両方そろっている場合, 1 単位の価値がある. このとき提携 S ⊆ N=12345 が得る価値は v(S)=min{ | R ∩ S | , | L ∩ S | } となる.

例題 2

空港の滑走路の建設を計画している. 滑走路が長いほど建設費は高くなる. 飛行機の種類によって必要な滑走路の長さは異なるが, 空港の滑走路の長さは, そこを利用する飛行機が必要とする長さの最大となる. いま, その空港を利用する 4 機の飛行機があり, 各飛行機をプレイヤーとみなす. 各飛行機が, 必要とする滑走路の建設費に対応した年間資本火を (万円) を, それぞれ,c_1=600, c_2=900, c_3=1000, c_4=1200 とする. この時, 提携 S ⊆ N=1234 のコストは v(S)=max{c_i | i ∈ S} となる.

提携形ゲームの例題

例題 3

多数決投票によって意思決定が行われる 11 人の集団がある. 提供された議案が可決されるためには 6 人以上の賛成が必要となる. 集団は四つのグループに分かれており. 構成員の数はそれぞれ w_1=4, w_2=1, w_3=2, w_4=4 となっている. 各グループを一人のプレイヤーとして、提携 S $\subseteq$ N=1234 によって 6 人以上の賛成が得られる場合, その提携値を 1 とするゲーム v を考える. つまり,$\sum_{i\in S} \geqq$ 6 ならば v(S)=1 であり, それ以外の提携は 0 である. 提携値が 1 となる提携を勝利提携とよび, それ以外の提携を敗北提携とよぶ. この例の勝利提携条件は,13,14, 34, 123, 124, 234, 1234 となる.

Shapley 値

Shapley 値とは

Π^N を N の置換の全体集合, π ∈ Π^N をプレイヤーの順列, 各 i ∈ N に対して, π (i) は i 番目のプレイヤー, π において, プレイヤー i ∈ N に先行するプレイヤーの集合 P(π,i)={ π (1),..., π (k)=i} を定義すると Shapley 値は (1) のようにあらわされる.
つまり Shapley 値は,n 人のプレイヤーが順列 π ∈ Π^N にしたがって提携にかかわる状況を考えたとき, プレイヤー i ∈ N が加わることで増加する利得は v(P(π,i)-v(P(π,i)\{i}) となるので,i にその値を支払う.i の Shapley 値はそのようにして得られた利得の順列に関する平均値と解釈できる.

$$\phi_i(v) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} v(P(\pi,i)) - v(P(\pi,i) \setminus \{i\}) \quad (1)$$

満場一致ゲーム

満場一致ゲームについて

$\emptyset \neq$S $\subseteq$ N の満場一致ゲーム $v_s \in g^N$ は T $\subseteq$ N に対して (2) のように定義される.

v_s は,S のメンバーすべてが賛成すれば議案が可決される投票ゲームと解釈することができる.

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{if } S \subseteq T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

Harsanyi 係数

Hasanyi 係数とは

ゲームの集合 g^N を 2^N-1 次元の線形空間ととらえると, 満場一致ゲームの集合はその基底となる. したがって, その任意の v $\in g^N$ に対して $\sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} d_s(u)u_s$ となる係数 d_s,$\sum_{\emptyset \neq S \subseteq N}$ が一意に定まる. この係数が Haranyi 係数と呼ばれる.

Hasanyi 係数を用いた Shapley 値

harsanyi 係数を用いると, S hapley 値は (3) のように表現できる.

$$\phi_i(v) = \sum_{S \ni i} \frac{d_S(v)}{|S|}, \quad i \in N \tag{3}$$

Shapley 値の例題 2

例題 4

例題 1 と例題 2 の Shapley 値を求める.
例題 1 は,shapley 値の対称性から R と L からプレイヤーを一人づつ選び, その shapley 値を計算すればよい. 置換 $\pi \in \Pi^N$ でえられる利得は 0 か 1 となるので,i の利得が 1 となる置換を考えることで shapley 値が計算でき, その値は φ (v)=(0.23,0.23,0.23,0.65,0.65) となる.
例題 2 では, まず v の双対ゲーム $v^* \in g^N$ を考える. 双対ゲームは, 各 S ⊆ N に対して v^*=v(N)-v(N\S) で定義される. 双対置換に対して,shapley 値は, 不変であるので v^* の shapely 値を計算する.v^* の Harsanyi 係数は提携 4,34,234,1234 に対して d_4=200,d_34=100,d_234=300,d_1234=600 となり, ほかの提携 S では,d_s=0 となるので,shapley 値は φ (v)=(150,250,300,500) と求まる.

伝達構造

伝達構造とは

伝達構造は, プレイヤー集合 N を頂点集合とするグラフ (N,E) で与えられる. ただし,E $\subseteq$ {{i,j} | i,j $\in$ N,i≠j } は枝集合である. 枝 {i,j} が E に含まれることは, プレイヤー i と j が協力できることを表している. 伝達構造を伴うゲームは (N,v,E) で定義される, 伝達構造を伴うゲームでは, グラフ (N,) において連結な提携 S $\subseteq$ N が実行可能であると定義される. この定義は, たとえ i,j $\in$ S が直接の協力関係を持たなくても,S のほかのメンバーの仲介があれば,i と j は協力できるという考えに基づいている.

Myerson 値

制限ゲーム

Myerson は伝達構造を伴うゲームから, 制限ゲームと呼ばれる提携ゲームを定義した.(N,v,E) の制限ゲームは (4) のように定義される. ここで C_{f_e}(S) は, S に含まれ, かつ, 包含関係に関して極大な f_E の要素の酒豪である. つまり S の提携値は,S の含まれる実行可能な極大集合の提携値の和によって与えられる.

$$v^E(S) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}_E}(S)} v(T) \tag{4}$$

Myerson 値とは

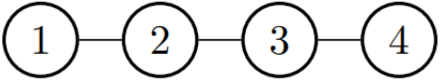
伝達構造を伴うゲーム (N,v,E) に対する Myerson 値 μ (v,E) は制限ゲーム v^E の shapley ちによって定義され (5) となる.

$$\mu(v, E) = \phi(v^E) \tag{5}$$

Myerson 値の例題

例題 5

例題 3 のプレイヤー間に第 1 図のような直線の伝達構造があるとするとき,shapley 値と Myerson 値を求める,
shapley 値は. ϕ (v)=($\frac{1}{3}$,0,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{3}$)
Myerson 値は, μ (v,E)=($\frac{1}{12}$,$\frac{1}{12}$,$\frac{7}{12}$,$\frac{1}{4}$) 例題 3 では 2 は null プレイヤーであったが, この例では勝利提携の形成に貢献することができる.



第 1 図　伝達構造

許可構造を伴うゲームとは

許可構造とは

許可構造はプレイヤーを頂点とする有効グラフ (N,D) で与えられる. ただし $D \subseteq \{\{i,j\} \mid i,j \in N, i \neq j\}$ は有向枝の集合である. 有向枝 (i,j) が D に含まれることは, プレイヤー j が行動するためには, プレイヤー i の許可が必要であることを表している. 許可構造を伴うゲームを (N,v,D) で表す.

許可値とは

(N,v,D) に対する制限ゲーム

各 S ⊆ N に対して,S に包含されている最大の実行可能連携を $\bar{S}$ とすると,(N,v,D) に対する制限ゲーム v^D は (7) のように定義される.

$$v^D(S) = v(\bar{S}) \tag{7}$$

許可値とは

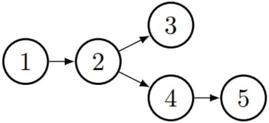
許可構造を伴うゲーム (N,v,D) に対する許可値 ρ (v,D) は, 制限ゲーム v^D の shapley 値によって (8) のように定義される.

$$\rho(v,D) = \phi(v^D) \tag{8}$$

許可構造を伴うゲームの例題

例題 6

N=12345,a=(1,2,3,4,5) とし, 各 S $\subseteq$ N に対して, 提携値を,v(S)=$\sum_{i\in S^{a_i}}$ で与える. プレイヤー間に第 2 図のような根付き木の許可構造 D=(1,2),(2,3),(2,4),(4,5) があるとする. 実行可能提携の集合 f_D={1,12,123,124,1234,1245,12345} となる,
制限がない場合,shapley 値はφ (v)=a=(1,2,3,3,5) となる. 許可値を求めると, 制限ゲーム v^D の Harsanyi 係数は,S $\in$ {1,12,123,124,1245} に対しては,d_1=1,$d_1 2$=2,$D_1 23$=3,$d_1 24$=3,$d_1 245$=4, それ以外の提携 S では d_S=0 となるため, 許可値は, ρ=(v,D)=(5,4,1,2,1) となる. 許可構造を考慮することで上位プレイヤーに利益が集中することがわかる.



第 2 図　許可構造

まとめ

まとめ

提携に制限のあるゲームの紹介として, 伝達構造と許可構造を伴うゲームとそれらの値を解説した.