ゲーム理論

木下大輔

富山県立大学　電子情報工学科

October 23, 2020

はじめに

背景

ゲーム理論は、利害関係のある意思決定主体間の相互作用を定式化し、議論するための数学である。ゲーム理論は触れる機会が少ないため初歩的な応用に関しても多くの人が知らないのが現実である。

目的

今回説明をしようとしているのは、研究室に配属される学生のような、ゲーム理論はもちろん集合論等の記述に不慣れな方である。
ゲーム理論にあまり理解のない方にも理解ができるように、数学の面からの基礎を最適化理論との共通点・相違点に注目して説明する。次に無線リソース制御への初歩的な応用例を述べる。次にゲーム理論はそれまでになかったパラダイム一物の見方・思考の枠組みや記述言語も提供できることが重要であるという点を説明する。次にゲーム理論が記述言語であることに加えて、ゲーム理論の記述言語として集合論が用いられていることを説明する。最後にゲーム理論と確率、線形代数、強化学習との関連を指摘する。

最適化問題と戦略形ゲーム

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \tag{1}$$

$$\begin{cases} \max_{x_1} f_1(x_1, x_2) \\ \max_{x_2} f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2}$$

目的関数 f に関する最大化問題、戦略形二人ゲームは以下の二つの最適化問題の組み合わせと捉えて問題ない。

最適化理論と戦略形ゲーム

最適化理論	ゲーム理論
最適化問題	（戦略形）ゲーム
（対応する用語は存在しない）	プレーヤ
決定変数	戦略
制約条件・実行可能領域	戦略集合
目的関数	利得関数
最適解	ナッシュ均衡

図 1: 最適化理論とゲーム理論の用語の対応

戦略形ゲーム都は異なるゲーム展開形ゲームや進化ゲームなどがある。更には、ゲーム理論の応用としてマッチング理論やオークション理論などがある。

最適解とナッシュ均衡

$$f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2), \forall f(x_1, x_2) \tag{3}$$

$$\begin{cases} f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2^*), \forall x_1 \\ f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1^*, x_2), \forall x_2 \end{cases} \tag{4}$$

式（１）は最適化問題の最適解を満たす。一方式（２）における下

位概念はナッシュ均衡と呼ばれる。与えられた x_2 に対して f_1 が最大となる x_1 を最適応答と呼ぶ。次に互いの応答となっている戦略組、具体的には次式を同時に満たす戦略組ナッシュ均衡が定義される。

無線リソース制御へのゲーム理論の応用

送信電力制御とチャネル割当という無線リソース制御の基本となる制御に関するゲーム理論の応用例について基礎的な事項を紹介する。

,

・干渉が相互作用であることに着目し、相互作用を定式化可能なゲーム理論を応用した
・議論したい問題を戦略形ゲームをはじめとしたゲームとして定式化できればゲーム理論を使って議論することが可能である。しかし個々の事例は各論的にならざるを得ない
・とりあえず Web スクレイピングしてきたデータを csv ファイルにし，結合させるところまでやって中間を乗り切る予定

送信電力制御

信号対干渉雑音電力比に対する伝送速度の関数として、シャノンの通信路容量の式を用いる。

$$f(p_1, p_2) = f_1(p_1, p_2) + f_2(p_1, p_2) \tag{5}$$

$$f_1(p_1, p_2) = \log 2(1 + \frac{G_{11}p_1}{G_{21}p_2 + N}) \tag{6}$$

$$f_2(p_1, p_2) = \log 2(1 + \frac{G_{22}p_2}{G_{21}p_1 + N}) \tag{7}$$

式（5）を目的関数とした最大化問題に対しては、非線形計画法で代表的な凸計画法のような単純なが存在するわけではない。そこで何らかの解が得られるように、問題を簡単化する。

チャネル割当

ナッシュ均衡の存在が保証されている戦略形ゲームのクラスとして、ポテンシャルゲームがある。ポテンシャルゲームとは戦略の変更に関して、次式を満たす関数 ϕ が存在する戦略形ゲームである。

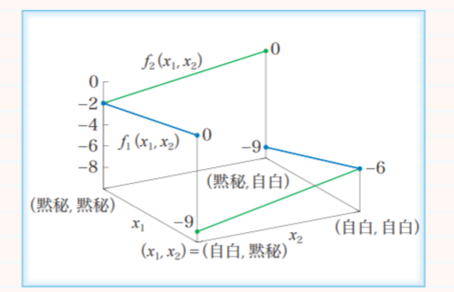
$$f_1(x_1, x_2) - f(x_1^*, x_2) = \phi(x_1, x_2) - \phi(x_1^*, x_2) \tag{8}$$

$$f_1(x_1, x_2) - f(x_1, x_2^*) = \phi(x_1, x_2) - \phi(x_1, x_2^*) \tag{9}$$

パラダイムとしてのゲーム理論

これまで説明した応用例があるという面とは別に、主体間の相互作用が定式化できるという、それまでになかったパラダイムを提供するという点でゲーム理論は重要である。

有名な例であるがゲーム理論によって初めて定式化された主体間の相互作用として、囚人のジレンマがある。



ここでナッシュ均衡になっているのは $x_1 = x_2 =$ 自白の場合のみであり、双方が刑期 6 年である。ほかの状況では、少なくとも片方のプレーヤが戦略を変更することで自らの利得の向上が可能である。

戦略形ゲームの定義

ゲーム理論やその応用を扱った書籍や論文では、戦略形ゲームやナッシュ均衡は次のように定義される。

定義 1

プレーヤの展示集合を I、プレーヤ i ∈I の戦略集合を χ_i, 利得関数を f_i:$\Pi_{j\in I}\chi_j \to \mathbf{R}$ とする。プレーヤの添字集合、戦略集合、利得関数の「順序組」

$$(I, (\chi_i)_{i\in I}), (f_i)_{i\in I}) \quad (10)$$

を戦略形ゲームと呼ぶ

定義 2

戦略形ゲーム $(I, (\chi_i)_{i\in I}), (f_i)_{i\in I})$ において $x_{-i} \in \chi_{-i} := \Pi_{j\in I}, \chi_j$ に対するプレーヤ i の最適応答都は、次式で定義される「対応である

$$BR_i(X_{-i}) = arg \max f_i(x_i, x_{-i}) \quad （１１）$$

定義 3

すべてのプレーヤの戦略がほかのプレーヤの戦略に対して最適応答となっている戦略組をナッシュ均衡と呼ぶ。

戦略形二人ゲーム、任意のプレーヤ数の戦略ゲーム

プレーヤが 2 の場合を考える。戦略集合 ϕ_i は戦略 x_i の取り得る値の集合を表している。すなわち $x_i \in \phi_i$ である。送信電力制御であれば
$\chi_i = [0, P]$ であり、囚人のジレンマであれば $\chi_i =$ [黙秘, 自白]
戦略の順序対を考える。最適化理論でいうと実行可能領域を表している。
内包的記法を用いれば以下の通りである。

二人ゲーム

$\chi_1 \times \chi_2 {:=} \{(x_i, x_2) | x_1 \in \chi_1 \Lambda x_2 \in \chi_2\}$(12)

定義 2 において最適応答 BR_i は関数ではなく、対応と呼ぶのは、利得関数が最大となる戦略は一つとは限らないためである。そもそも $arg\max$ が対応である。次の $arg\max$ を使わない表現をすれば、関数でなく対応であることが明示的になるので以下のようになる。

任意数ゲーム

$BR_i(x_{-i}) := \{x_i^* \in \chi_i — f_i(x_i^*, x_{-i}) \geq f_i(x_i, x_{-i}), \forall x_i \ni \chi_i$ (13)

混合戦略と確率

戦略を確率的に決定することも考えられる。プレーヤ１の混合戦略集合は、淳戦略集合 χ_1 上の確率分布の集合

$$\Delta := \{(p_1, p_2, ...p_m) \in \mathbf{R}^m_{\geq} | \sum_i^m = 1 p_i = 1\} \quad (14)$$

線形代数・最適化理論

$a := f_1(i, j)$ と書き換える、混合戦略に対して、プレーヤ１利得の期待値は次式のとおり表現できる

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

強化学習

単一主体の強化学習問題では、とりえる状態の集合 S と、とりえる集合 A を既知として、観測された状態に対して各行動がどのような報酬をもたらすかという未知の行動価値関数

$$\varrho : A \times S \to \mathbf{R}$$

を学習する。

強化学習問題	戦略形ゲーム
行動価値関数 $Q : \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$	利得関数 $f_i : \mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_{-i} \to \mathbb{R}$
グリーディ方策 $\arg\max_{a} Q(a, s)$	最適応答 $\arg\max_{x_i} f_i(x_i, x_{-i})$

図 2: 強化学習とゲーム

まとめ

まとめ

ゲーム理論は上記に記したように最適化問題、無線リソース制御,機械学習などの問題に応用が可能だったり、今後役立つようになると予想されます。しかしそれぞれの問題に応じた定式化をする必要があったりと、ゲーム理論を用いれば簡単にそれらの問題が解けるといったことはできない。