

# 超離散化

## -セルオートマトンと微分方程式をつなぐ-

大谷 和樹

富山県立大学 情報基盤工学講座

1. はじめに
2. ソリトンセルオートマトン
3. ソリトン方程式の超離散化
4. 非可積分系への利用

## 背景

解析学の原点は Newton, Leibnitz による微分を用いた物体の運動の記述にある。以降、天文学や物理学におけるさまざまな現象が微分方程式として表現され、その解を求めるという努力がなされてきた。時代が進むと、技術すなわち工学にもそうした方法が導入されるようになる。現在ではさらに生物学や経済学を含むさまざまな分野で微分方程式が用いられている。

## 目的

可積分とは完全積分可能ともいい、初期値問題の解が得られるという意味をもっている。その概念を無限次元の力学系ともいえる非線形偏微分方程式へ拡張したのが、無限次元可積分系である。離散可積分系の典型例は、（独立変数の一部が離散的な）半離散もしくは（すべてが離散的な）完全離散方程式である。連続系も離散系も共通した性質をもっているとき、従属変数まで離散化した超離散系（CA をこのように呼ぶことにする）ではどうであろうかという問題が自然に生じてくる。本稿の主題はその問題に対するこれまでの研究成果と応用例を示すことにある。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

# 無限次元可積分系の例

3/25

ソリトン方程式は無限次元可積分系の典型的なもので、代表的な例として Korteweg -deVries (KdV) 方程式がある。

## Korteweg -deVries (KdV) 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

この方程式は、相互作用に際して安定に振る舞う非線形分散孤立波ソリトンを解としてもち、原理的に初期値問題を解くことのできる逆散乱法の定式化が可能であり、無限個の独立な保存量・対称性が存在するという性質を有している、そのことが無限次元可積分系と呼ぶ理由である。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

# 離散化積分系の例

4/25

反離散方程式の例として戸田方程式、完全離散方程式の例として広田・三輪方程式（もしくは離散 KP 方程式）がある。

## 戸田方程式

$$\frac{d^2u_n(t)}{dt^2} = \exp[u_{n+1}(t)] - \exp[u_n(t)] + \exp[u_{n-1}(t)] \quad (2)$$

## 広田・三輪方程式

$$\begin{aligned} & -\delta\tau(l-1, m, n)\tau(l, m-1, n-1)(1, m-1, n-1) + (1+\delta)\tau(1, m-1, n) \\ & \cdot \tau(l-1, m, n-1) - \tau(l, m, n-1)\tau(l-1, m-1, n) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

なお、(3)式において  $\delta$  は適当なパラメータとする。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

# ソリトンセルオートマトン

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の  
超離散化

非可積分系への  
応用

おわりに

CAにおいてソリトン的な解が存在することは Wolfram の初期の研究においても指摘されていたが、そのようなパターンの解析が活発になったのは 1980 年代の後半からである。しかしながら、これらの CA がそうした解をもつ理由については明らかではなく、またソリトン的な振る舞いをするパターンはごく限られた初期条件のものに限られていた。

一方、Bruschi らは、ソリトン解の構成は代数的な操作のみで行なえることに注目し、対応する線形方程式系 (Lax 形式) を有限体上で考えることによって「可積分」CA を構成した。ただし、得られるパターンは、コヒーレントな構造はもつものの、粒子的な孤立波 (= ソリトン) の性格はもっているようには見えない。もともとのソリトン解は有限体上で閉じていて、方程式は変わっていないため、「有限体上でのソリトン解」が構成できないものと考えられる。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の  
超離散化

非可積分系への  
応用

おわりに

これらの CA に対して、1990 年に高橋と薩摩が提案したもの（以下ソリトン CA と呼ぶ）は、無限遠方で 0 という境界条件のもとで、「すべてのパターンがソリトン的になる」という著しい性質をもっている。

## ソリトン CA

このセルオートマトンは 0, 1 の二値のみをとる空間 1 次元系であり、その時間発展の規則は

$$u_n^{t+1} \begin{cases} 1 & (u_n^t = 0 \text{ and } \sum_{i=-\infty}^{n-1} u_n^t > \sum_{i=-\infty}^{n-1} u_n^{t+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4)$$

で与えられる。

この時間発展規則は、次の簡単な操作を時刻  $t$  の 0, 1 列に施して時刻  $t + 1$  の 0, 1 列を得ることと等価である。

## ソリトンセルオートマトン

- 1, すべての 1 をただ一度だけ動かす.
  2. まず, 一番左にある 1 をその右の最も近い 0 と入れ替える.
  3. 次に, 残りの 1 のうち最も左にある 1 をその右の最も近い 0 と入れ替える.
  4. 以上の操作をすべての 1 を動かし終えるまで続ける.

Figure: ソリトン CA の時間発展

Figure: ソリトン CA の時間発展

1のかたまりを孤立波, その長さを波の振幅とみると, (i) 振幅の大きいものほど速く進み, (ii) 衝突の前後で位相はずれるが振幅は変わらない, ことがわかる. これはまさにソリトンである. このCAは, Nソリトン状態, 無限個の保存量をもっている. 実はすべての状態がソリトンから構成されていることもわかる. その意味で, 純粹に「ソリトンセルオートマトン」と呼んでもいいCAである.

# 箱と玉の系

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の  
超離散化

非可積分系への  
応用

おわりに

箱と玉の系とは、ソリトンCAにおいて、0, 1という数を「箱の中の玉の個数」と読み替えたものである。つまり、一列に並んだ無限個の箱の中を有限個の玉が運動する力学系とみなすのである。このように解釈し直すことによって、新たに2つの自由度を導入できる。一つは、箱の容量であり、もう一つは玉の種類である。

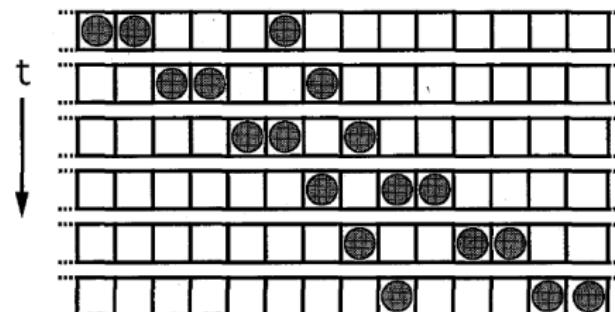


Figure: 箱と玉の系 空き箱が0に玉の入った箱が1に対応している

$M$  種類の玉が存在するとき、その玉を 1～ $M$  の自然数で区別し、時間発展の規則を書き下すと次のようになる。

## 時間発展の規則

- すべての玉をただ一度だけ動かす。
- まず、一番左にある番号 1 の玉をその右の最も近い空きのある箱に移す。
- 次に、残りの番号 1 の玉のうち最も左にあるものをその右の最も近い空きのある箱に移す。
- 以上の操作をすべての番号 1 の玉を動かし終えるまで続ける。
- 次に、番号 2 の玉について以上と同じ操作を行う。
- 以下、3, 4, …,  $M$  の玉について順次この操作を繰り返す。

このように拡張しても玉の動きはやはりソリトン的となる。ただし、玉の種類を増した系では、ソリトンを構成する玉の種類が衝突の前後で複雑に入れ替わる性質をもつ。

はじめに

ソリトンセルオー  
トマトン

ソリトン方程式の  
超離散化

非可積分系への  
応用

おわりに

## 戸田型 CA

数年前高橋と松木平により提案されたもので、

$$u_n^{t+1} - 2u_n^t + u_n^{t-1} = \max[u_{n+1}^t, 1] - 2\max[u_n^t, 1] + \max[u_{n-1}^t, 1] \quad (5)$$

で与えられる発展系である。

先行研究では、数値計算により、適当な初期条件のもとでソリトン的なパターンを生じることが示されている。ただし、 $u_n^t$  は、0, 1 の 2 値だけではなく、一般にすべての整数値をとり得る。

この CA は (2) 式において、時間微分を中心差分に置き換え、 $\exp u$  を  $\max [u, 1]$  に置き換えたものになっている。すなわち、(5) 式は CA と微分方程式との対応関係を考える上できわめて都合の良い ( $\max$  という操作とソリトンに特有な指數関数との対応が良く見える) 形を与えており、さらに、従属変数が離散値のみをとることを可能にしているのである。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の  
超離散化

非可積分系への  
応用

おわりに

戸田方程式 (2) の可積分性を保ったまま時間を離散化した式が広田によって与えられている。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

$$\begin{aligned}
 v_n^{t+1} - 2v_n^t + v_n^{t-1} &= \log[\delta + \exp(v_{n+1}^t)] - 2\log[\delta + \exp(v_n^t)] \\
 &\quad + \log[\delta + \exp(v_{n-1}^t)]
 \end{aligned} \tag{6}$$

$\delta = \exp(1/\epsilon)$  とおいて,  $u_n^t = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon v_n^t$  とすれば, (6) は形式的に

戸田型 CA (5) と一致する。そればかりでなく, (6) の解も  $\epsilon$  に依存するので ( $v_n^t = v_n^t(\epsilon)$ ), 極限  $u_n^t$  が存在すれば, それが (5) を満たすことは明らかである。こうして, 連続的な値をとる離散方程式から離散的な値のみをとる CA とその解を系統的に作り出す手法が見いだされた。

「箱と玉の系」において箱の容量が場所ごとに異なることを許す拡張版を考える。これは (3) で  $\delta$  が  $n$  に依存するとした非自律離散 KP 方程式の超離散極限として得られるものである。

## 非自律離散 KP 方程式

$$-\delta_n \tau(l-1, m, n) \tau(l, m-1, n-1) (1, m-1, n-1) + (1+\delta_n) \tau(1, m-1, n) \cdot \tau(l-1, m, n-1) - \tau(l, m, n-1) \tau(l-1, m-1, n) = 0 \quad (7)$$

まず (7) において,  $\tau(l, m, n)$  に以下の条件を課す。(M は与えられた自然数)

## 条件式

$$\tau(l, m, n) = tau(l - M, m - 1, n) \quad (8)$$

ここで,  $\sigma_s^n \equiv \tau_{s-1, m=0, n}$  とおくと, (7) 式は以下のような双線形方程式になる.

$$(1 + \delta_n) \sigma_{s-M}^{n-1} \sigma_{s+1}^n - \delta_n \sigma_{s-M}^n \sigma_{s+1}^{n-1} = 0 \quad (9)$$

一方, 箱と玉の拡張系で  $n$  番目 ( $-\infty < n < \infty$ ) の箱の容量を  $\theta_n$  で表し, また玉が  $M$  種類存在するとしてそれらを整数指標  $j$  ( $1 \leq j \leq M$ ) で区別することとする. 時刻  $t$  において  $n$  番目の箱の中にある指標  $j$  をもって玉の個数を  $u_{n,j}^t$  と書くと, その時間発展規則は以下のようになる.

## 時間発展規則

$$u_{n,j}^t = \min \left[ \sum_{n'=-\infty}^{n-1} u_{n',j}^{t-1} - \sum_{n'=-\infty}^{n-1} u_{n',j}^t, \theta_n - \sum_{j'=1}^{j-1} u_{n,j'}^t - \sum_{j'=j}^M u_{n,j'}^{t-1} \right] \quad (10)$$

さらに,  $Y_n^s (s \equiv Mt + j)$  を以下のように定義する.

$$Y_n^s \equiv Y_n^{Mt+j} := \sum_{n'=-\infty}^n \left( \sum_{j'=j}^M u_{n',j'}^t + \sum_{t'=t+1}^{\infty} \sum_{j'=1}^M u_{n',j'}^{t'} \right)$$

すると, (10) 式は,

$$Y_n^{s+1} + Y_{n-1}^{s-M} = \max[Y_n^s + Y_{n-1}^{s+1-M}, Y_{n-1}^{s+1} + Y_n^{s-M} - \theta_n] \quad (11)$$

となる. この式は,  $\delta_n = \exp[-\theta_n/\epsilon]$  として (9) を離散化したものに等しい.

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

箱と玉の系にはもう一つ重要なソリトン方程式である戸田分子方程式がある。すなわち、 $Q_n^{Mt+j}$  を時刻  $t$  において  $n$  番目の「ソリトン」に含まれる指標  $j$  の玉の個数、 $E_n^{Mt+j}$  を  $j$  番目の玉を動かした後の  $n$  番目と  $n+1$  番目のソリトンの間の間隔としたとき、箱と玉の系は以下のようになる。

$$Q_n^{s+M} = \min \left[ \sum_{i=1}^n Q_i^s - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i^{s+M}, E_n^s \right], (n = 1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

$$E_n^{s+1} = Q_{n+1}^s + E_n^s - Q_n^{s+M} (n = 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

ただし、 $E_0^s = E_N^s = 0$  である。

# 戸田分子方程式

これは、以下のような拡張された戸田分子方程式の超離散極限で得られるものである。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

$$I_n^{s+M} = I_n^s + V_n^s - V_{n-1}^{s+1} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

$$V_n^{s+1} = \frac{I_{n+1}^s V_n^s}{I_n^{s+M}} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \quad (15)$$

この結果を用いると、箱と玉の系がソリトン的に振る舞うこと、無限個の保存量が存在すること、散乱行列が Yang-Baxter 関係式を満たすことなどを証明できる。

# 非可積分系への応用

西成と高橋は以下の Burgers 方程式を超離散化して対応する CA を導出し、交通渋滞の解析にその結果を適用した。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (16)$$

彼らはまず Cole-Hopf 変換、 $u = f_x/f$ 、で (16) を線形化した式、 $f_t = f_{tt}$ 、を差分化し、以下の完全離散方程式を得ている。

$$u_n^{t+1} = \frac{(1 - 2\delta)u_n^t/c + \delta(1 + u_{n+1}^t u_n^t/c^2)}{(1 - 2\delta)u_{n-1}^t/c + \delta(1 + u_{n-1}^t u_n^t/c^2)} \quad (17)$$

# 非可積分系への応用

ここで、小さな変数  $\epsilon$  を導入して、 $u_n^t = \exp(U_n^t/\epsilon)$ ,  
 $(1 - 2\delta)/c\delta = \exp(-M/\epsilon)$ ,  $1/c^2 = \exp(-L/\epsilon)$  の変換を施し、 $\epsilon \rightarrow +0$  の超離散化を行って得られるのが以下の CA である。

$$\begin{aligned} U_n^{t+1} = & U_{n-1}^t + \max[0, U_n^t - M, U_{n+1}^t + U_{n+1}^t - L] \\ & - \max[0, U_{n-1}^t - M, U_{n-1}^t + U_n^t - L] \end{aligned} \quad (18)$$

彼らはこの CA を用いた計算において、非渋滞相から渋滞相への移行でオーバーシュートする状況を実現している。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

# 非可積分系への応用

はじめに  
ソリトンセルオートマトン  
ソリトン方程式の超離散化  
非可積分系への応用  
おわりに

西成と高橋が提案した CA は、特別な場合に ( $L = M = 1$  のとき), Wolfraln の ECA のうちの一つ, ルール 184 に一致する。この例のような対応関係は、実は他の ECA についても考えることができる。いくつかの試みが既に行われているが、ここでは野辺による結果を紹介する。

CA の時間発展を与える函数  $u_n^{t+1} = F(u_n^t, u_{n+1}^t, u_{n-1}^t)$  に以下の規則で番号  $R$  をつける

$$R = \sum_{u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t} F(u_n^t, u_{n+1}^t, u_{n-1}^t) \cdot 2^{2^2 \cdot u_{n-1}^t + 2^1 \cdot u_n^t 2^0 \cdot u_{n+1}^t} \quad (19)$$

すると ECA の全体は  $\{F_{2^0}, F_{2^1}, \dots, F_{2^7}\}$  を生成元とする  $Z_2$ –加群と見なせる。

# 非可積分系への応用

はじめに  
ソリトンセルオートマトン  
ソリトン方程式の超離散化  
非可積分系への応用  
おわりに

この  $Z_2$ –加群は、集合  $S = (u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t)$  に演算  $\max$  を導入することにより、自然に  $Z$ –加群の中に埋め込まれる。すなわち、ルール番号  $R$  が偶数のもの (EECA と呼ぶことにする) は、集合  $S$  に演算  $\max$  を導入して得られる半群から生成される  $Z$ –加群の元として一意的に表すことが可能である。奇数ルールの ECA は適当な変換により偶数ルールの ECA と 1 対 1 の対応関係をつけることができる、偶数ルールの ECA (EECA) のみ考察すればよい。

集合  $S = (u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t)$  から演算  $\max$  を積とする位数  $2^3 - 1 = 7$  の可換な半群を以下のものとする。

$$H = \{u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t, \max(u_{n-1}^t, u_n^t), \max(u_{n-1}^t, u_{n+1}^t), \max(u_n^t, u_{n+1}^t), \max(u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t)\}$$

# 非可積分系への応用

また、先ほどの式から得られる以下の  $Z$ -加群を考える。

$$\begin{aligned}\tilde{G} = \{G &| G = a_1 u_{n-1}^t + a_2 u_n^t + a_3 u_{n+1}^t \\ &+ a_4 \max(u_{n-1}^t, u_n^t), a_5 \max(u_{n-1}^t, u_{n+1}^t) \\ &+ a_6 \max(u_n^t, u_{n+1}^t), a_7 \max(u_{n-1}^t, u_{n+1}^t), A_i \in Z\end{aligned}$$

EECA を  $Z$ -加群とみたときの基底は  $Z$ -加群  $\tilde{G}$  の元として一意に表現可能である。こうした事実は 3 近傍 2 値の CA だけではなく、もっと一般的な CA についても成り立つ。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

# 非可積分系への応用

以上の準備のもとで、各EECAに微分方程式を対応づける。次の操作を逆超離散極限と呼ぶことにする。

## 逆超離散極限

$$\max(x_1, \dots, x_n) \implies \epsilon \log\{C_1 \exp(x_1/\epsilon) + \dots + C_n \exp(x_n/\epsilon)\}$$

ただし、 $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$  は適当な正定数である。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

# 非可積分系への応用

$Z$ -加群  $\tilde{G}$  の元として表されている EECA にこの逆超離散を施すと、以下の差分方程式が得られる。

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに

$$e^{\hat{U}} = C_1 C_2 C_3 e^{a_1 \underline{U}} e^{a_2 U} e^{a_3 \bar{U}} (C_4 e^{|a_4| \underline{U}} + C_5 e^{|a_4| U}) \frac{a_4}{|a_4|} (C_6 e^{|a_5| \underline{U}} + C_7 e^{|a_5| \bar{U}}) \frac{a_5}{|a_5|}$$

$$\times (C_8 e^{|a_6| U} + C_9 e^{|a_6| \bar{U}}) \frac{a_6}{|a_6|} (C_{10} e^{|a_7| \underline{U}} + C_{11} e^{|a_7| U} + C_{12} e^{|a_7| \bar{U}}) \frac{a_7}{|a_7|} \quad (20)$$

ただし、 $U \equiv U_n^t, \hat{U} \equiv U_n^{t+1}, \underline{U} \equiv U_{n-1}^t, \bar{U} \equiv U_{n+1}^t$  である。

こうして導いた差分方程式に連続極限を施すことにより以下の結果が得られる。番号  $R \geq 128$  の EECA に対応する微分方程式は波動方程式、拡散方程式、Burgers 方程式のいずれかである。また、 $R < 128$  の EECA に対応する微分方程式は、それらに  $e^{-U} - 1$ ,  $-e^U + 1$  などの項が加わったものに限られる。

## おわりに

以上, ECA から微分方程式を構成する一つの方法を紹介した. 得られた微分方程式は ECA がもつ解のもつとも基本的な振る舞いを反映したものになっている. しかし, いくつかの ECA の解が示すような自己相似構造は微分方程式では一切見られない. 連続近似のもとでは解はなめらかになり, そのような構造は消えてしまうのである. それに対し, 数値計算によると, 得られた差分方程式の解はセルオートマトン同様自己相似構造を示している. 今後, CA と微分方程式を結ぶ差分方程式すなわち完全離散方程式の数学的構造を調べることが重要であり, そのことによって両者の関係がより一層明らかになることを期待している.

はじめに

ソリトンセルオートマトン

ソリトン方程式の超離散化

非可積分系への応用

おわりに