量子ゲーム理論

大谷　和樹

富山県立大学　情報基盤工学講座

1. はじめに
2. 古典ゲーム理論のおさらい
3. 懲罰ルール，利他戦略
4. 量子戦略と利他性
5. ハーサニィとベル:量子的利得の分離
6. 量子的進化の可能性

May 25, 2020

はじめに

背景

時たま「量子ゲーム」という言葉を耳にするのだが一体これは何なのか，こういう質問を受けることがある．できたら画面のページを繰らなくても良いまとまった解説はないのか．こういう要望に答えたいと考えていたところ，折よく学会誌からの依頼を受けたので，この解説を書いてみた．

目的

本稿では筆者の研究を中心に，量子ゲーム理論の現状レヴューを行う．量子ゲーム理論とは，通常のゲーム理論の戦略を表現する連結確率を，ヒルベルト・ベクトル (量子波動関数) から生成される量子連結確率で置き換えて拡張したものである．量子連結確率には量子的エンタングルメントに由来して，通常の連結確率にはない環境パラメータが含まれている．量子戦略の内実を精査することで，そのなかに通常の戦略を環境パラメータで変形した修正された擬古典戦略と，量子干渉に由来して古典戦略としては決して表せない純量子的成分との，二 つを見出すことができる．

古典ゲーム理論のおさらい

ゲーム理論の中心概念は「効用関数の最大化」というものである．二名の独立した意思決定者 A と B がいて，それぞれに 2 つの行動の選択肢 (a_0,a_1) と (b_0,b_1) が与えられてあるとする．それぞれは自分にとっての望ましい結果を表す効用関数 Π_A と Π_B を最大化しようと行動の選択をするというモデルを考える．

プレイヤー A が (a_0,a_1) を選ぶ確率

$$p = (a_0, a_1)$$

プレイヤー B が (B_0,B_1) を選ぶ確率

$$q = (b_0, b_1)$$

この時全確率は 1 であるので，$p_0 + q_0 = 1$，$q_0 + q_0 = 1$ である．

A の効用関数 Π_A が，A の選択 p と B の選択 q の両方に依存し，B の効用関数 Π_B についても同様の場合，すなわち

$$\begin{aligned}\Pi_A &= \Pi_A(p,q)\\ \Pi_B &= \Pi_B(p,q)\end{aligned} \tag{1}$$

のとき，

$$\begin{aligned}\Pi_A(p,q^*) maximum \ \ at \ \ p=p^*\\ \Pi_B(p^*,q) maximum \ \ at \ \ q=q^*\end{aligned} \tag{2}$$

で与えられると考えられる．

この Π_A と Π_B を同時に最大化する選択の組 p^*, q^* のことを「ナッシュ均衡」と呼ぶ．

効用関数とゲームテーブル

Π_A と Π_B の代わりに，それが「ゲームテーブル」を通じて間接的に与えられることが多い．

両プレーヤーの行動が a_i,b_j のとき Π_A=$A_{i,j}$，Π_B=$B_{i,j}$ とすると，ゲームテーブルは行列式で表すと，

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} \\ B_{1,0} & B_{1,1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書くことにする．

効用関数とゲームテーブル

選択 a_i,b_j が行われる連結確率 $P_{i,j}$ は，両プレーヤーの選択が独立なので $P_{i,j}$=$p_i q = j$ と積で与えられ，その効果効用関数は

$$\Pi_A(p,q) = \Sigma_{i,j} A_{ij} p_i q_j$$

$$\Pi_B(p,q) = \Sigma_{i,j} B_{ij} p_i q_j \tag{4}$$

で与えられる．
こうして選択確率 p，q で効用関数が陽に表現されると，ナッシュ均衡は偏微分条件

$$\left.\frac{\partial}{\partial p_i}\Pi_A(p,q)\right|_{(p^*,q^*)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial q_i}\Pi_B(p,q)\right|_{(p^*,q^*)} = 0 \tag{5}$$

として線形な条件に書き下すことができる．

懲罰者のいる不完備情報ゲーム

構成員の中でランダムに組み合わせを行い，囚人のディレンマが繰り返しプレイされる社会を考える．通常のプレイヤーをタイプ $\{0\}$，罰を与えるターミネータのようなプレイヤーをタイプ $\{1\}$ と呼ぶことにする．

このときゲームテーブルは $\{0\}\{0\}$ 間，$\{0\}\{1\}$ 間，$\{1\}\{0\}$ 間，$\{1\}\{1\}$ 間の 4 つ必要になる．それぞれを表す行列から

$$A = \begin{pmatrix} A^{\{0,0\}} & A^{\{0,1\}} \\ A^{\{1,0\}} & A^{\{1,1\}} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{\{0,0\}} & B_{\{0,1\}} \\ B_{\{1,0\}} & B_{\{1,1\}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

という拡大された行列を構成すれば，大行列 A，B がゲームのルールを指定する．

懲罰者のいる不完備情報ゲーム

相手のプレイヤーのタイプはプレイの結果を見るまで不明だとして，タイプ０と１の混合頻度を $r^{\{0\}}$，$r^{\{1\}}$（もちろん $r^{\{0\}}+r^{\{1\}}=1$）と書くことにする．戦略はタイプごとの選択肢の集合 $p=(p_0^{\{0\}},p_1^{\{0\}},p_0^{\{1\}},p_1^{\{1\}})$，および $q=(q_0^{\{0\}},q_1^{\{0\}},q_0^{\{1\}},q_1^{\{1\}})$ で与えられ，このゲームの効用関数は

$$\Pi_A(p,q) = \Sigma_{t,s}\Sigma_{i,j} r^{\{t\}} r^{\{s\}} A_{ij}^{\{t,s\}} p_i^{\{t\}} q_j^{\{s\}}$$

$$\Pi_B(p,q) = \Sigma_{t,s}\Sigma_{i,j} r^{\{t\}} r^{\{s\}} B_{ij}^{\{t,s\}} p_i^{\{t\}} q_j^{\{s\}} \tag{7}$$

と書くことができる．ナッシュ均衡は，形式的には以前と同様に

$$\Pi_A(p,q^*) maximum \;\; at \;\; p=p^*$$

$$\Pi_B(p^*,q) maximum \;\; at \;\; q=q^* \tag{8}$$

となり，これで戦略が決定される．

利他的戦略のあるゲーム

人間のような社会性の生物が，社会化されるよう教育（もしくは洗脳）をうけて，社会の中では個体の「本来の効用関数」とは異なった量を最大化するように習慣づけられることがある，と考えてみる．もちろん自分自身の個体の利益を守るという生物学的な動機も強いので，我々の社会の中での行動の動機は，自分の効用関数と他人の効用関数のある比率での組み合わせとしてモデル化することができるかもしれない．これを 2 プレイヤーゲームで考える．

「本来の」個体のゲームテーブルが $A_{i,j}$，$B_{i,j}$ で与えられる時，プレイヤー A，B はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}^a_{i,j} &= (1-a)A_{i,j} + aB_{i,j} \\
\tilde{B}^a_{i,j} &= (1-a)B_{i,j} + aA_{i,j} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

で与えられるということで表せそうである．

利他的戦略のあるゲーム

ゲームが両プレーヤーについて対象にできているときは $B_{i,j}=A_{i,j}$ という関係が成り立つ．
ここで a は 0 と 1 の間の実数をとる「利他性パラメータ」で，a = 0 が通常の「利己的」戦略の追求に相当し，a=1 が両者ともに，いわば相手と自分を逆に取り違えた「完全に利他的」動機を表している．さしあたってこの a は，社会全体の定数だと考えることにする．

この利他的パラメータ a のあるゲームのナッシュ均衡は．利他的に修正された効用関数

$$\tilde{\Pi}_A^a(p,q) = \Sigma_{i,j}\{(1-a)A_{ij} + aA_{ij}\}p_i q_j$$

$$\tilde{\Pi}_B^a(p,q) = \Sigma_{i,j}\{(1-a)B_{ij} + aB_{ij}\}p_i q_j \tag{10}$$

で与えられる．結果ナッシュ均衡は利他性を表すパラメータ a の関数になり，社会的生物はこの a を最適化するような「倫理」を進化的に獲得すると考えられる．

量子戦略とエンタングルメント

量子ゲーム理論では，量子戦略と言って，プレイヤーは量子的状態から生成された量子的確率を用いて行動の選択を行うことができると考える，ここでは簡単のために 2 プレイヤーがいて，それぞれが二つの行動の選択肢を持つ 2×2 のゲームに限定して考える．

プレイヤー A の行動の選択肢 (a_0,a_1) を二次元のヒルベルト・ベクトルの二つの基底の組 $(|0\rangle_A$ ，$|1\rangle_A)$ で表し，B の行動選択肢 (b_0,b_1) を $(|0\rangle_B$ ，$|1\rangle_B)$ で表す． ここに出てくる基底状態は A を表すベクトル，B を表すベクトルともに「正規直交性」と呼ばれる性質

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$$

$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0 \tag{11}$$

を持つ．(添字 A，B どちらでもよいので取って表記してある．) ここで $\langle 0|$，$\langle 1|$，は $|0\rangle$，$|1\rangle$ の共役ベクトルで，上の内積関係によってその性質が定義されていると考える．

量子戦略とエンタングルメント

プレイヤー A は α=(α_0,α_1) という二つの複素数からなる量子力学変数を制御して，B は β=(β_0,β_1) という二つの複素数からなる量子力学変数を制御して，それぞれヒルベルト・ベクトル

$$|\alpha\rangle_A = \alpha_0|0\rangle_A + \alpha_1|1\rangle_A$$

$$|\beta\rangle_B = \beta_0|0\rangle_B + \beta_1|1\rangle_B \tag{12}$$

で表される量子状態を作ると考える．ただし力学変数 α_i,β_j は $|\alpha_0|^2$+$|\alpha_0|^2$=1，そして $|\beta_0|^2$+$|\beta_0|^2$=1 となるよう選ばれているとする．直交関係から明らかなように，α_i=$\langle i|\alpha\rangle$(i=0,1)，そして β_j=$\langle j|\beta\rangle$(j=0,1) である．

量子戦略とエンタングルメント

いま A,B がそれぞれの行動選択の確率 p,q を

$$p_i = |\alpha_i|^2 = |\langle i|\alpha\rangle|^2 (i = 0, 1)$$

$$q_j = |\beta_j|^2 = |\langle j|\beta\rangle|^2 (j = 0, 1) \tag{13}$$

で定めるものと決めれば，(自明な添字 A,B は取って表記して)，量子力学変数 α，β，もしくは量子状態 $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ が，それぞれプレイヤー A,B のゲーム戦略を表しているとみなすことができることになる．これが量子戦略である．

量子戦略とエンタングルメント

(12) で表された両プレイヤー戦略から，二体ヒルベルト空間で許されるすべての状態の構成を行わねばならない (Cheon & Tsutsui 2006).

一つの方法は，二つの実数パラメータ γ=(γ_1,γ_2) のある相関演算子

$$J(\gamma) = e^{i\frac{\gamma_1 S}{2}} e^{i\frac{\gamma_1 S}{2}}$$

$$= (cos\frac{\gamma_1}{2} + isin\frac{\gamma_1}{2}S) \times (cos\frac{\gamma_2}{2} + isin\frac{\gamma_2}{2}SC) \tag{14}$$

を用いて，それを直積状態 $|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B$ に作用させて全ての許される二体状態

$$|\Psi(\alpha,\beta;\gamma)\rangle = J(\gamma)|\alpha\rangle|\beta\rangle \tag{15}$$

を作ることである．

量子戦略とエンタングルメント

ここでS,Cはそれぞれ両プレイヤーの戦略の交換と，各プレイヤーの戦略の反転を行う演算子である．すなわち

$$S|i\rangle_A|j\rangle_B = |j\rangle_A|i\rangle_B$$

$$C|i\rangle_A|j\rangle_B = |1-i\rangle_A|1-j\rangle_B$$

$$CS|i\rangle_A|j\rangle_B = |1-j\rangle_A|1-i\rangle_B \tag{16}$$

こうして構成された二体状態が量子的連結確率

$$P_{ij}(\Psi(\alpha,\beta;\gamma)) = |{}_A\langle i|_B\langle j|\Psi(\alpha,\beta;\gamma)\rangle|^2 \tag{17}$$

を与え，これとゲームテーブルを組み合わせて量子的効用関数

$$\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma) = \Sigma_{i,j}A_{ij}P_{ij}(\Psi(\alpha,\beta;\gamma))$$

$$\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma) = \Sigma_{i,j}B_{ij}P_{ij}(\Psi(\alpha,\beta;\gamma)) \tag{18}$$

が求まる．

量子戦略とエンタングルメント

ここで相関関数のパラメータ γ を γ_1=0,γ_2=0 と選べば，J_γ は J_0=1 となり，二体状態は $|\Psi(\alpha,\beta;\gamma)\rangle=|\alpha\rangle|\beta\rangle$ と単なる直積に戻る．すると連結確率は $P_{i,j}(\Psi(\alpha,\beta;\gamma))=|\langle i|\alpha\rangle|^2|\langle j|\beta\rangle|^2=p_iq_j$ と単に両プレイヤーの選択確率の出来で書けるので，その結果効用関数は

$$\Pi_A(\alpha,\beta;0)=\Sigma_{i,j}A_{i,j}p_iq_j$$

$$\Pi_B(\alpha,\beta;0)=\Sigma_{i,j}B_{i,j}p_iq_j \qquad (19)$$

となって通常の「古典ゲーム」のものと同一になる．

つまり量子ゲーム理論は，量子的相関の消滅する極限で通常のゲーム理論を含んだより一般的な理論になっているわけである．

量子戦略の物理的内実と利他性

量子的な戦略のあるときのゲームの効用関数は，形式的には (17), (18) で与えられて，これから変数 α_i，β_i による変分

$$
\left.\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma)\right|_{(\alpha^*,\beta^*)} = 0
$$

$$
\left.\frac{\partial}{\partial \beta_j}\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma)\right|_{(\alpha^*,\beta^*)} = 0 \qquad (20)
$$

で量子的なナッシュ均衡が与えられる．

このままでは問題ごとに計算はできても，見通しが悪く一体何が起こっているのかを窺い知ることができない．

量子戦略の物理的内実と利他性

具体的な量子相関の形 (14) が与えられているので，ここで扱っている 2×2 の量子ゲームについては計算を進めて，量子効用関数を次の形に書き下すことができる．

$$\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma) = \Sigma_{i,j} A^{PC}_{i,j}(\gamma) p_i q_j + \Pi^Q_A(\alpha,\beta;\gamma)$$
$$\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma) = \Sigma_{i,j} B^{PC}_{i,j}(\gamma) p_i q_j + \Pi^Q_B(\alpha,\beta;\gamma) \qquad (21)$$

量子戦略の物理的内実と利他性

ここで $A^{PC}_{i,j}$,$B^{PC}_{i,j}$ は

$$A^{PC}_{i,j}(\gamma) = cos^2\frac{\gamma_1}{2}A_{i,j} + (cos^2\frac{\gamma_2}{2} - cos^2\frac{\gamma_1}{2})A_{i,j} + sin^2\frac{\gamma_2}{2}A_{1-i,1-j}$$

$$B^{PC}_{i,j}(\gamma) = cos^2\frac{\gamma_1}{2}B_{i,j} + (cos^2\frac{\gamma_2}{2} - cos^2\frac{\gamma_1}{2})B_{i,j} + sin^2\frac{\gamma_2}{2}B_{1-i,1-j} \tag{22}$$

と書ける「実効的等価古典ゲーム」を表すゲームテーブルを与え，また

$$\Pi^Q_A(\alpha,\beta;\gamma) = -\sqrt{p_0p_1q_0q_1}\times\{G+(\gamma)sin(\xi+\chi)+G-(\gamma)sin(\xi-\chi)\}$$

$$\Pi^Q_B(\alpha,\beta;\gamma) = -\sqrt{p_0p_1q_0q_1}\times\{H+(\gamma)sin(\chi+\xi)+H-(\gamma)sin(\chi-\xi)\} \tag{23}$$

は「量子干渉項」を表している．

ここで χ,ξ は量子戦略変数を，(α_0,α_1)=$(\sqrt{p_0},\sqrt{p_1}^{e^{i\chi}})$, (β_0,β_1)=$(\sqrt{q_0},\sqrt{q_1}^{e^{i\xi}})$ と表したときにあらわれる相対位相であり，また $G\pm(\gamma)$,$H\pm(\gamma)$ は

$$
\begin{aligned}
G+(\gamma) &= (A_{0,0}-A_{1,1})sin\gamma_1 \\
G-(\gamma) &= (A_{0,1}-A_{1,0})sin\gamma_2 \\
H+(\gamma) &= (A_{0,0}-A_{1,1})sin\gamma_1 \\
H-(\gamma) &= (A_{0,1}-A_{1,0})sin\gamma_2 \qquad (24)
\end{aligned}
$$

で与えられる量である．

形をみてわかるとおり，この量子干渉項は古典ゲームの変形として理解することができない量子論特有の効果である．

量子戦略の物理的内実と利他性

仮にここで「量子干渉項」が無視できるほど小さい状況があるとすれば，そのときは量子ゲームというのは畢竟「ゲームテーブルを変更した古典ゲーム」と実質同等なことを示している．

ここで特に γ_2=0 という選択を行えば，(22) は

$$A^{PC}_{i,j}(\gamma) = cos^2\frac{\gamma_1}{2}A_{i,j} + +sin^2\frac{\gamma_1}{2}A_{1-i,1-j}$$

$$B^{PC}_{i,j}(\gamma) = cos^2\frac{\gamma_1}{2}B_{i,j} + +sin^2\frac{\gamma_1}{2}B_{1-i,1-j} \tag{25}$$

となって，これは前に見た「利他的戦略のもとでプレイしたゲーム」に他ならない．

これは量子戦略の中に入っている演算子 S が「プレイヤーの入れ替え」に相当する効果をもたらしたのである．このときのパラメータ γ_1 は

$$a = sin^2 \frac{\gamma_1}{2} \tag{26}$$

を通じて実効的利他性パラメータ a を与える．

量子戦略は古典戦略を含み，さらにそれを環境パラメータで拡張して，いわば新たなレパートリーを加えたものとなっている．環境パラメータを最適に選んだ場合，量子的ナッシュ利得が古典的な利得を下回ることはないというのは，容易に理解できる．

量子的不完備情報ゲーム

これまで囚人のディレンマのもとにある社会が，より平均利得を高める機構を得る状況のモデルとして，「監視者」の混入した不完備ゲーム取り扱った．今度はこの不完備ゲームに量子的確率を導入することを考えてみる．

プレイヤー A は t=0,1 で表される二つのタイプ，プレイヤー B は s = 0,1 の二つのタイプを取ることができると考え，両方のプレイヤーについて各タイプの出現確率が $\gamma^{\{0\}}$,$\gamma^{\{1\}}$ で与えられるとする．ゲームテーブル A,B は双方のタイプに応じた 4 つの行列 $A^{\{t,s\}}$,$B^{\{t,s\}}$ の集合と考えることにする．

二体の量子的連結確率を作るため，個々のプレイヤーの戦略から二体ヒルベルト空間全体を張る状態を作るのに，ここでは前章と少し違う「シュミット直交状態」を使ったアプローチ (Ichikawa, Tsutsui & CheQn 2008) を採用する．

量子的不完備情報ゲーム

まずエンタングルした二体の「初期状態」

$$|\Phi_{\gamma,\phi}\rangle = cos\frac{\gamma}{2}|0\rangle_A|0\rangle_B + e^{i\phi}cos\frac{\gamma}{2}|1\rangle_A|1\rangle_B \tag{27}$$

を用意する．ここで γ，ϕ はエンタングルメントの程度と位相を決める角度変数である．両プレイヤーの戦略はこの初期状態上への「自分の状態」への操作と考えることにする．

プレイヤー A の戦略を，作用

$$U(\alpha^{\{t\}})|0\rangle_A = cos\frac{\alpha^{\{t\}}}{2}|0\rangle_A + sin\frac{\alpha^{\{t\}}}{2}|1\rangle_A \quad (28)$$

$$U(\alpha^{\{t\}})|1\rangle_A = -sin\frac{\alpha^{\{t\}}}{2}|0\rangle_A + cos\frac{\alpha^{\{t\}}}{2}|1\rangle_A \quad (29)$$

で定義される操作 $U(\alpha^{\{t\}})$ で，プレイヤー B の戦略は作用

$$V(\beta^{\{s\}})|0\rangle_B = cos\frac{\beta^{\{s\}}}{2}|0\rangle_B + sin\frac{\beta^{\{s\}}}{2}|1\rangle_B \quad (30)$$

$$V(\beta^{\{s\}})|0\rangle_B = -sin\frac{\beta^{\{s\}}}{2}|0\rangle_B + cos\frac{\beta^{\{s\}}}{2}|1\rangle_B \quad (31)$$

で定義される操作 $V(\beta^{\{s\}})$ で指定することにする．

量子的不完備情報ゲーム

量子的連結確率は，初期状態に操作 $U(\alpha^{\{t\}})$ と $V(\beta^{\{s\}})$ を加えた状態から

$$P_{i,j}^{\{t,s\}}(\alpha^{\{t\}},\beta^{\{s\}};\gamma,\phi) = |{}_A\langle i|_B\langle j|U(\alpha^{\{t\}})V(\beta^{\{s\}})\Phi_{\gamma,\phi}\rangle|^2 \tag{32}$$

と求まるとする．これとゲームテーブル $A^{\{t,s\}}$,$B^{\{t,s\}}$ から

$$\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma,\phi) = \Sigma_{t,s}\Sigma_{i,j}\gamma^{\{t\}}\gamma^{\{s\}}A_{i,j}^{\{t,s\}}P_{i,j}^{\{t,s\}}(\alpha^{\{t\}},\beta^{\{s\}};\gamma,\phi)$$

$$\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma,\phi) = \Sigma_{t,s}\Sigma_{i,j}\gamma^{\{t\}}\gamma^{\{s\}}B_{i,j}^{\{t,s\}}P_{i,j}^{\{t,s\}}(\alpha^{\{t\}},\beta^{\{s\}};\gamma,\phi) \tag{33}$$

と効用関数が定まる．

量子的不完備情報ゲーム

これから量子的なベイズナッシュ均衡

$$\left.\frac{\partial}{\partial \alpha_i^{\{t\}}} \Pi_A(\alpha, \beta; \gamma, \phi)\right|_{(\alpha^*, \beta^*)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \beta_j^{\{s\}}} \Pi_B(\alpha, \beta; \gamma, \phi)\right|_{(\alpha^*, \beta^*)} = 0 \quad (34)$$

が求まるのである.

不完備情報男女の諍いゲームとベル不等式

このような不完備情報ゲームの量子版を一般的に解析することは，いまの 2 タイプ 2 プレイヤー 2 戦略の $2 \times 2 \times 2$ 型に制限しても，複雑すぎてなかなか困難である，ここでは，ナッシュ利得の純量子的成分を抜き出すという目的に特化した，きわめて特殊な例を調べることにする.

プレイヤー A に対してのゲームテーブルは

$$A^{\{0,0\}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\{0,1\}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{\{1,0\}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{\{1,1\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{35}$$

である.

プレイヤー B に対してのゲームテーブルは

$$B^{\{0,0\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{\{0,1\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$B^{\{1,0\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B^{\{1,1\}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

である．また，プレイヤータイプの出現率は

$$\gamma^{\{0\}} = \frac{1}{2} \quad \gamma^{\{1\}} = \frac{1}{2}$$

と等確率であるとする．

不完備情報男女の諍いゲームとベル不等式

効用関数 (33) を計算すると

$$
\begin{aligned}
\Pi_A &= \frac{3}{4}(P_{0,0}^{\{0,0\}} - P_{0,0}^{\{1,0\}} - P_{0,0}^{\{0,1\}} - P_{1,1}^{\{1,1\}}) \\
&+ \frac{1}{4}(P_{1,1}^{\{0,0\}} - P_{1,1}^{\{1,0\}} - P_{1,1}^{\{0,1\}} - P_{0,0}^{\{1,1\}}) \\
\Pi_B &= \frac{3}{4}(P_{0,0}^{\{0,0\}} - P_{0,0}^{\{1,0\}} - P_{0,0}^{\{0,1\}} - P_{1,1}^{\{1,1\}}) \\
&+ \frac{1}{4}(P_{1,1}^{\{0,0\}} - P_{1,1}^{\{1,0\}} - P_{1,1}^{\{0,1\}} - P_{0,0}^{\{1,1\}}) \qquad (37)
\end{aligned}
$$

となる.

不完備情報男女の諍いゲームとベル不等式

ここから量子的ベイズ=ナッシュ均衡を求めることができて，結果は

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \qquad \phi = 0$$

$$\beta^{\{0\}*} - \alpha^{\{0\}*} = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta^{\{1\}*} - \alpha^{\{0\}*} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha^{\{1\}*} - \beta^{\{0\}*} = \frac{5\pi}{4} \tag{38}$$

と求まり，その時の利得は

$$\Pi_A^* = \Pi_B^* = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \tag{39}$$

である．

不完備情報男女の諍いゲームとベル不等式

効用関数が (37) で与えられる不完備情報ゲームで，古典利得がゼロとなっていて，正の量となる量子利得は純粋に量子的起源のものだ，ということの事実は決して偶然ではなく，実は (37) はゲーム理論とは全く無関係に，量子的確率事象の局所的因果律の破れ（または量子的確率の非分離性）を示す目的でベルによって考えられた．

おわりに

今回の進捗

ゲーム理論の中のルールを変更修正する多くの環境パラメータが，最初から理論に内在的に含まれている量子ゲームの，進化的な強みが理解されてくる．ベル不等式の破れによって古典戦略を常に，上回る利得が保障されている量子的利得の存在は，その強みをさらに補強するであろう．生物がいかにして進化してきたかを，ゲーム理論的な数理モデルで記述することはいずれ可能となるだろう．生命活動を支えるのは細胞の中で進行する生化学反応であるが，これは当然すぐれて量子的なものである．細胞レベルでのミクロな生命の進化を考えると，少なくともその初期の発展段階で，そこにはゲーム理論的な競争の過程が存在して，その競争は量子的スケールで行われたと推測できる，そしてそのとき，量子戦略をもつゲームのもつ二つの強みが，生命により迅速で優位な進化をもたらすことも想像されるのである