

日程計画問題 (スケジュール問題)

富山県立大学工学部電子・情報工学科
1515010 大谷和樹

指導教員：奥原浩之

1 はじめに

今回は、日程計画問題 (スケジュール問題) についてまとめる。日程計画問題とは、多くの仕事を限られた資源を用いて処理しなければならないという状況で、効率的な資源の割り当て方を求め、最適なスケジュールを導き出す問題のことである。このため、生産計画や配送など、現実世界における多くの問題はスケジューリング問題として表すことが可能である。こうした問題を速く効率的に解くことのできる方法は、多くの分野で作業の効率化につながるため、盛んに研究が行われている分野でもある。しかし、現実世界の問題はそれぞれに異なる複雑な制約を持ち、ある問題に対する効率的な解法が必ずしも別の問題に適用可能とは限らない。

2 一般的な日程計画問題

限られた資源を有効活用して最適な計画を立案したい、という状況を考える。ある制約条件の下で、費用、利益のような評価尺度を最大化、あるいは最小化する (つまり、最適化する) ような政策を求める代表的技法に数理計画法 (mathematical programming) がある。興味のある量を目的関数、組み合わせるものを変数、(限られた原料、というように) 変数の取り得る値を限定する条件を制約条件といい、目的関数を与えられた制約条件の下で、ある目的に合ように変数の組合せを決定する問題を数理計画という。数理計画の中でも特に、生産量を2倍にすると使用原料、利益とも2倍になる、というように、制約条件も目的関数値の変化も比例の関係になっている (線形という) 数理計画問題を解く方法論は線形計画法と呼ばれている。日程計画問題はこの線形計画法を用いて解くことができる。以下に、線形計画法の例題を示す。

(例題) mカ所の工場から nカ所の小売店に製品を輸送する際に、各工場の生産量を超えない範囲で各小売店が需要を満たすように輸送したいとき、輸送費用が最小となる計画を求めよ。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

a_i : 工場 i の生産量 (定数)
 b_j : 小売店 j の需要量 (定数)
 c_{ij} : 工場 i から小売店 j への単位量当たりの輸送費用 (定数)
 x_{ij} : 工場 i から小売店 j への輸送量 (変数)

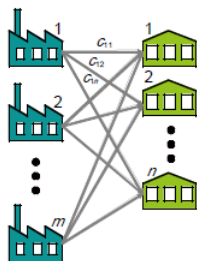


図1 輸送費用の関係図

式 (1) が最小となるような x_{ij} を求めることで最小値が求まる。

3 クリティカルパスを用いたスケジューリング

生産工程やプロジェクトなどで、お互いに従属関係 (前工程が終わらないと次工程に進めないなど) にある複数の作業のうち、開始から終

了までをつなぐ時間的余裕のない一連の作業の集まりのことをクリティカルパスという。クリティカルパス上にない作業は、遅れが出てても余裕 (フロート) の範囲内であればプロジェクト全体のスケジュールには影響しない。しかしクリティカルパス上の作業が遅延すると、プロジェクト全体の納期を遅らせてしまうことになる。逆にクリティカルパスが短縮できるとプロジェクト期間も短縮できる。クリティカルパスを短縮するにはたいていの場合追加費用がかかってしまう。最小費用でクリティカルパスを短縮する方法として、最小費用日程計画がある。以下に例題を示す。

(例題2) 表1のプロジェクトにおいて、プロジェクト完了時刻の経済的な短縮方法を提案せよ。

表1 プロジェクト例

作業名	先行作業	作業時間		1日短縮する時の費用
		標準	特急	
A	なし	5	3	1(百万円)
B	A	10	7	5(百万円)
C	A	15	10	3(百万円)
D	B	8	4	2(百万円)

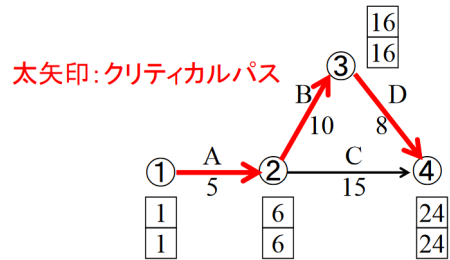


図2 プロジェクトのアローダイアグラム

図2の赤矢印の工程がクリティカルパスである。作業時間を短縮するために、カットという概念を利用する。カットとはプロジェクト開始イベントと終了イベントを二分する線上の作業群のことである。以下の表2と図3はプロジェクトにおけるカットの例を示している。

表2 カット例

開始イベント側	終了イベント側	
0	①, ②, ③	cut1
0, ①	②, ③	cut2
0, ①, ②	③	cut3
0, ②	①, ③	cut4

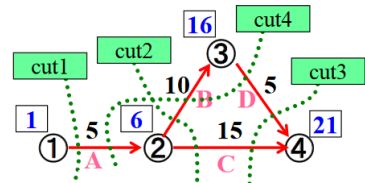


図3 カットの線を記入したアローダイアグラム

カットの短縮費用は「カットに含まれるクリティカルパス上の正の向きの作業の短縮費用の合計」から「すでに短縮されたことのある逆向きの作業の短縮費用の合計」を引いたものである。図4は作業の向きについて説明している図である。

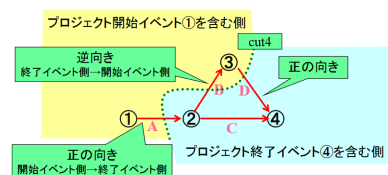


図4 カットに対しての作業の向き

図5の下にある数字がそれぞれのカットを短縮するときにかかるコストである。このカットにかかるコストがで最小の値のものを選び短縮することで、最小費用でクリティカルパスを短縮していくことができる。これを短縮可能な限り繰り返した時のそれぞれの短縮日数と費用もまとめたものと、グラフ化したものが図5である。

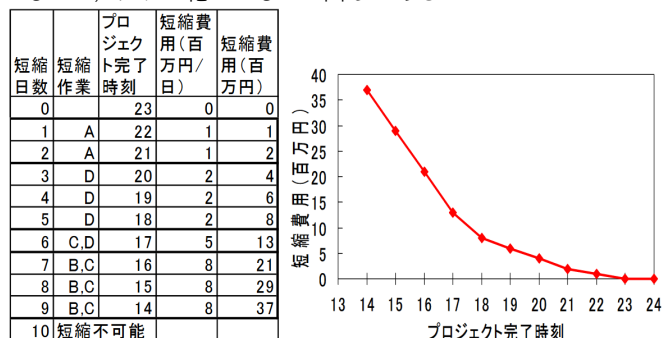


図5 短縮費用とプロジェクト完了時刻の関係

図4のグラフの中で最適な組み合わせの点を選ぶことで最適解を得ることができる。このように、クリティカルパスを含む作業日程をカットという概念を用いて短縮可能な限り短縮していく手法をCPM (Critical Path Method) という。

4 クリティカルパスを用いたスケジューリングに関する論文

以下にクリティカルパスを用いたスケジューリングに関する論文を示す。

4.1 品質を考慮に入れたスケジューリング問題に関する研究

この研究では、クリティカルパスを含むプロジェクトの先行研究は費用と納期を最適化する研究が多く、品質まで考慮した研究が少ないことから、3項目全てを考慮したプロジェクトの最適な作業スケジュールを局所探索法、ラグランジュの方法、Firefly アルゴリズムを用いて検証する方法を提案している。

4.2 日程と費用の曖昧さを考慮した工程管理マネジメントの研究

この研究では、従来のクリティカルパスを用いたスケジューリング問題は理論上のもので、実際に工事現場で適用するのが難しいとしている。原因として、建設工事における作業日数、費用は、そのものの自体が曖昧さを含んでいる上に、そのほか自然状態、現場環境などに影響を受けることから、計画の見誤りが生じることを挙げている。そこでこの研究では、要素の曖昧さの表現にファジィシステムを用いてスケジューリング問題へ適用している。具体的には、工期・費用の表現に、それらに含まれる工期短縮の起こりうる確かさの度合いや、その不確かさ、短縮費用が持つ曖昧さなど、各作業の状況を反映した形のメンバシップ関数を用いる。そしてそれらを、メンバシップ値の概念を考慮できるよう拡張したCPMにより計算しプロジェクト全体の工期や費用の推測を行っている。

5 終わりに

今回は、一般的なスケジューリング問題とクリティカルパスを用いたスケジューリング問題についてまとめた。今回まとめた内容はとても基本的な部分であり、使用した例題も非常に簡単な例のみであったが、実際に現実世界の問題に適用する際には、変数が多かったりクリティカルパスが非常に長くなることにより計算量が増えることや、工期や費用が含む曖昧さによって理論そのままでは現実問題に適用するのが難しいことも理解できた。

参考文献

- [1] スケジューリング問題 -北海道大学自律系工学研究室
<http://autonomous.jp/スケジューリング問題/>
- [2] 森戸晋・逆瀬川浩孝・椎名孝之 (2017) 「基礎オペレーションズリサーチ (上)」
<http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/pdf/iorText2017.pdf>
- [3] 最小費用日程計画
<http://www.bunkyo.ac.jp/nemoto/lecture/scheduling/2008/CPM2008.pdf>
- [4] 森重良太・永松正博 (2011) 「品質を考慮に入れたスケジューリング問題に関する研究」

https://www.jstage.jst.go.jp/article/pacbfsa/24/0/24_7/pdf/-char/ja

楠美剛史・佐々木敦司・小山健 (2000) 「日程と費用の曖昧さを考慮した工程管理マネジメントの研究」

https://www.jstage.jst.go.jp/article/procm1993/8/0/8_0121/pdf/-char/ja