



はじめに

一般的な日程計画  
問題

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリング

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリングに関  
する論文

おわりに

# 日程計画問題 (スケジューリング問題)

大谷 和樹

富山県立大学 情報工学基盤講座

January 16, 2019



## はじめに

### クリティカルパスを用いたスケジューリング

## V おわりに

今回は、日程計画問題（スケジュール問題）についてまとめる。日程計画問題とは、多くの仕事を限られた資源を用いて処理しなければならないという状況で、効率的な資源の割り当て方を求め、最適なスケジュールを導き出す問題のことである。このため、生産計画や配送など、現実世界における多くの問題はスケジューリング問題として表すことが可能である。こうした問題を速く効率的に解くことのできる方法は、多くの分野で作業の効率化につながるため、盛んに研究が行われている分野でもある。しかし、現実世界の問題はそれぞれに異なる複雑な制約を持ち、ある問題に対する効率的な解法が必ずしも別の問題に適用可能とは限らない。



# 一般的な日程計画問題 (1)

限られた資源を有効活用して最適な計画を立案したい、という状況を考える。

## 数理計画法

ある制約条件の下で、費用、利益のような評価尺度を最大化、あるいは最小化する（つまり、最適化する）ような政策を求める代表的技法に数理計画法 (**mathematical programming**) がある。また、興味のある量を目的関数、組み合わせるものを変数、(限られた原料、というように) 変数の取り得る値を限定する条件を制約条件といい、目的関数を与えられた制約条件の下で、ある目的に合ように変数の組合せを決定する問題を数理計画という。

数理計画の中でも特に、生産量を 2 倍にすると使用原料、利益とも 2 倍になる、というように、制約条件も目的関数値の変化も比例の関係になっている（線形という）数理計画問題を解く方法論は線形計画法と呼ばれている。

## 例題

$m$ カ所の工場から  $n$ カ所の小売店に製品を輸送する際に、各工場の生産量を超えない範囲で各小売店が需要を満たすように輸送したいとき、輸送費用が最小となる計画を求めよ。



## 一般的な日程計画問題 (2)

### 数式

はじめに

一般的な日程計画  
問題

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリング

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリングに関  
する論文

おわりに

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$$

$a_i$  : 工場  $i$  の生産量 (定数)

$b_j$  : 小売店  $j$  の需要量 (定数)

$c_{ij}$  : 工場  $i$  から小売店  $j$  への単位量当たりの輸送費用 (定数)

$x_{ij}$  : 工場  $i$  から小売店  $j$  への輸送量 (変数)

式 (1) が最小となるような  $x_{ij}$  を求めることで最小値が求まる。



# クリティカルパスを用いたスケジューリング(1)

## クリティカルパス

生産工程やプロジェクトなどで、お互いに従属関係（前工程が終わらないと次工程に進めないなど）にある複数の作業のうち、開始から終了までをつなぐ時間的余裕のない一連の作業の集まりのこと。

クリティカルパス上にない作業は、遅れが出ても余裕（フロート）の範囲内であればプロジェクト全体のスケジュールには影響しない。しかしクリティカルパス上の作業が遅延すると、プロジェクト全体の納期を遅らせてしまうことになる。逆にクリティカルパスが短縮できるとプロジェクト期間も短縮できる。

クリティカルパスを短縮するにはたいいていの場合追加費用がかかってしまう。最小費用でクリティカルパスを短縮する方法として、最小費用日程計画がある。



# クリティカルパスを用いたスケジューリング (2)

## 例題

表 1 のプロジェクトにおいて、プロジェクト完了時刻の経済的な短縮方法を提案せよ。

表 1 プロジェクト例

作業名	先行作業	作業時間		1日短縮する時の費用
		標準	特急	
A	なし	5	3	1(百万円)
B	A	10	7	5(百万円)
C	A	15	10	3(百万円)
D	B	8	4	2(百万円)

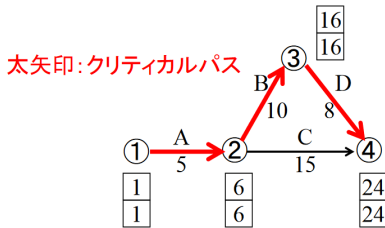


図 1 プロジェクトのアローダイアグラム



# クリティカルパスを用いたスケジューリング (3)

## カット

プロジェクト開始イベントと終了イベントを二分する線上の作業群のこと。これらの作業群は短縮有効作業群の候補である。

表 2 カット例

開始イベント側	終了イベント側	
0	①, ②, ③	cut1
0, ①	②, ③	cut2
0, ①, ②	③	cut3
0, ②	①, ③	cut4

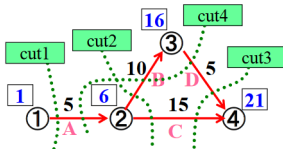


図 2 カットの線を記入したアローダイアグラム



# クリティカルパスを用いたスケジューリング (4)

はじめに

一般的な日程計画  
問題

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリング

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリングに関  
する論文

おわりに

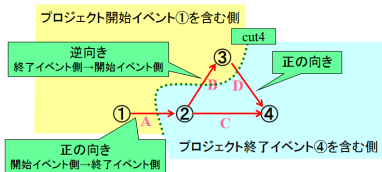


図 3 カットに対しての作業の向き

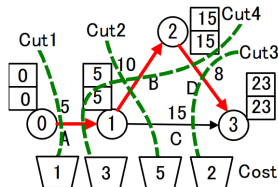


図 4 カットごとの短縮コスト

カットの短縮費用は「カットに含まれるクリティカルパス上の正の向きの作業の短縮費用の合計」から「すでに短縮されたことのある逆向きの作業の短縮費用の合計」を引いたものである。

図 4 の下にある数字がそれぞれのカットを短縮するときにかかるコストである。このカットにかかるコストがで最小の値のものを選び短縮することで、最小費用でクリティカルパスを短縮していくことができる。これを短縮可能な限り繰り返していくと、クリティカルパスが短くなっていく。





# クリティカルパスを用いたスケジューリング (5)

はじめに

一般的な日程計画  
問題

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリング

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリングに関  
する論文

おわりに

短縮 日数	短縮 作業	プロ ジェク ト完了 時刻	短縮費 用(百 万円/ 日)	短縮費 用(百 万円)
0		23	0	0
1	A	22	1	1
2	A	21	1	2
3	D	20	2	4
4	D	19	2	6
5	D	18	2	8
6	C,D	17	5	13
7	B,C	16	8	21
8	B,C	15	8	29
9	B,C	14	8	37
10	短縮不可能			

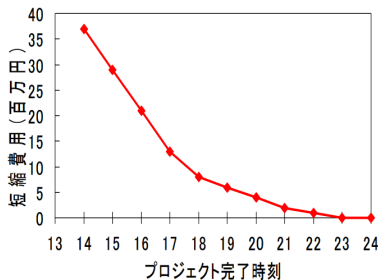
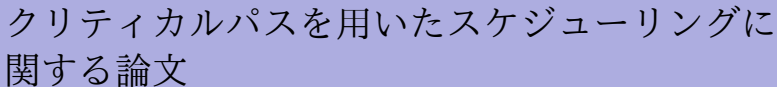


図 5 短縮費用とプロジェクト完了時刻の関係

図 5 のグラフの中で最適な組み合わせの点を選ぶことで最適解を得ることができる。  
このように、クリティカルパスを含む作業日程をカットという概念を用いて短縮可能な限り短縮  
していく手法を CPM (Critical Path Method) という。



従来のクリティカルパスを用いたスケジューリング問題は理論上のもので、実際に工事現場で適用するのが難しい原因として、建設工事における作業日数、費用は、そのもの自体が曖昧さを含んでいる上に、そのほか自然状態、現場環境などに影響を受けることから、計画の見誤りが生じることを挙げている。そこでこの研究では、要素の曖昧さの表現にファジィシステムを用いてスケジューリング問題へ適用している。具体的には、工期・費用の表現に、それらに含まれる工期短縮の起こりうる確かさの度合いや、その不確かさ、短縮費用が持つ曖昧さなど、各作業の状況を反映した形のメンバシップ関数を用いる。そしてそれらを、メンバシップ値の概念を考慮できるように拡張した CPM により計算しプロジェクト全体の工期や費用の推測を行っている。



# おわりに

## おわりに

今回は、一般的なスケジューリング問題とクリティカルパスを用いたスケジューリング問題についてまとめた。

今回まとめた内容はとても基本的な部分であり、使用した例題も非常に簡単な例のみであったが、実際に現実世界の問題に適用する際には、変数が多かったりクリティカルパスが非常に長くなることにより計算量が増えることや、工期や費用が含む曖昧さによって理論そのままでは現実問題に適用するのが難しいことも理解できた。

はじめに

一般的な日程計画  
問題

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリング

クリティカルパス  
を用いたスケ  
ジューリングに関  
する論文

おわりに