

特集◎交通流の数理

交通流のセルオートマトンモデルについて

西成 活裕

1 はじめに

高速道路における渋滞現象は、信号機のある一般道路における渋滞とは異なり、物理的な対象として見ると興味深い一面がある。特に「自然渋滞」といわれる、原因のはっきりしない渋滞があり、これが実際に高速道路における渋滞原因の大きな部分を占めている。この渋滞発生のメカニズムは、物理学の立場で考えるとどのように説明できるのだろうか？そのためにはまず基礎方程式となる車の挙動を表す力学的なモデルが必要になる。そしてモデルから統計的な量が計算できれば、渋滞を自由走行相から渋滞相への「相転移」として統計力学的に考えることができると考えられる。しかし交通流は一般に非平衡開放系の物理であり、大変に複雑な現象であってこのような単純な相転移の理解では観測事実を全て説明することはできない。現在でも渋滞相転移付近における複雑な観測データを我々は理解しているとは言えないである。

近年、このように複雑なものが物理学の対象になってきた時に、基礎になるモデルを作るのに良く用いられるのがセルオートマトン(CA)の手法である。現在では、生命科学現象、経済現象、その他人間関係の心理など様々な分野でCAが用いられている[1]。CAとは簡単に言えば、時間と空間を離散的にし、さらに対象とする系を表す状態量まで離散化して、単純な近傍ルールを設定し、その状態量を時間更新していくものである。単純な更新ルールでも、その時間発展は極めて複雑な様相を示すことが分かっている[2]。それゆえ、複雑なシ

[筆者紹介]



にしなり かつひろ。1990年東京大学工学部航空学科卒業。1995年同大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻博士課程修了、博士(工学)。山形大学工学部機械システム工学科助手、1997年同助教授を経て1999年より龍谷大学理工学部数理情報学科助教授、現職。弾性体の非線形解析で日本機械学会研究奨励賞受賞、ボブスレー競技力学解析で同技術奨励賞受賞。ソリトン理論やその離散化、摂動論、セルオートマトン理論やそれらの様々な応用的研究に従事。著書「可積分系の応用数理」裳華房、日本物理学会、日本応用数理学会、日本機械学会各会員。

システムの有力な解析手法として近年注目されているのである。まさに全てがデジタルであり、計算機でシミュレーションするのにも大変適している。現在のCA理論の基礎はWolframによって確立されたと言えるだろう[2]。彼は2状態3近傍のCAを最も基本的で単純なものとしてElementary CA(ECA)と名づけた。これはルール0からルール255までの256種類存在する空間1次元のCAであり、これまで力学系の視点から詳細に研究されてきた。しかし現時点では我々は最も大切な問題である、「CAのルールをどのように設定すれば対象としている系を良く記述できるか」という問い合わせに完全に答えることができていない。微分方程式についてはある程度決まった規則に基づいて立式ができるが、CAにはそのようなものはまだ無い。この状態量の更新ルールこそが通常の運動方程式に相当するものなので、通常は力に相当する効果を状態量の変動に投影させて現象をうまく表すように試行錯誤を繰り返しながらルールを決めてゆくのである。したがって、幅広い物理数学の基礎が十分に無いと正しいルール作りやその検証は極めて難しいのも事実である。

交通流のCAモデルについても、これまでに様々なルールが考え出されてきている[3]。交通の流れは「車」というはっきりした離散的な「粒子」の運動であるので、CAを使って簡単にモデル化できないだろうか、と考えるのは自然であろう。しかしそのルールを作る際に難しいことは、車は単純な力学原理で動いておらず、人間の心理的な効果、つまりは自分自身の運転行動を振り返って考えなければならない点である。それゆえに、どういった効果を重要と見るかの違いでこれまでに様々なルールが提唱されている。そして、どのルールが優れているかを判断するためにはもちろん観測事実をいかに良く再現するかを見ることが最も大切である。そして色々な他のモデル、例えば流体モデルや追従モデルとの比較も大切な問題である。以下、本記事ではこれまでの主な交通流CAモデル研究をレビューするとともに、その統計的な妥当性の考察や各モデルとの比較検討をおこなう。そして交通渋滞における相転移の複雑さについてCAモデルを通じて考えてゆく。

2 基本となる交通流CAモデル

全ての交通流CAモデルの基礎になる、最も単純なモデルがルール184モデルといわれているものである。他のCAモデルは全てこのモデルの拡張であると言えるだろう。このCAはWolframのECAの一つであり、その184番目のルールである。ルールを物理的に表現すると以下の通りである。「道路をセルに区切り、車のいるセルを1、いないセルを0で表す。進行方向を右向きにとり、車は前が空いていれば時間1ステップで1セル右に動けるとする。もしも前に車があれば動けずその場にとどまる。」このルールをすべてのセルで同時に適用して時間更新してゆくという単純なものであり、セルの排他律だけを

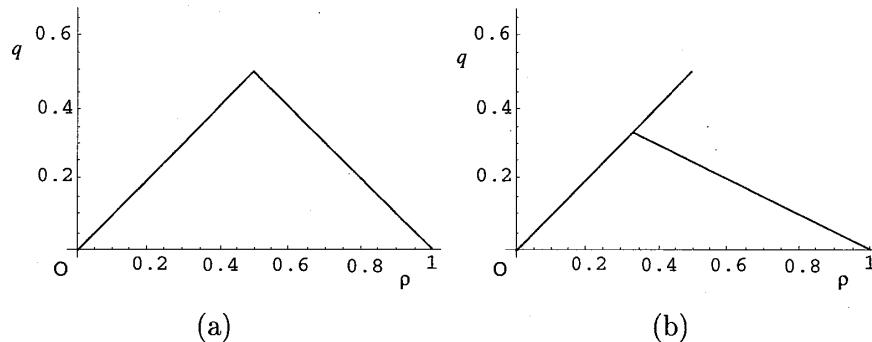


図1 (a)ルール184モデル (b)ストップアンドゴーモデルの基本図
(b)において $1/2 \geq \rho \geq 1/3$ の密度でメタ安定状態が現れている。

考慮している。適当な初期境界条件を設定して動かすと、1のかたまり(渋滞部分)は後ろに伝播してゆき、単純なルールではあるが結構よい車の動きになっているように見える。しかしこのモデルの渋滞相転移は極めて単純であり、残念ながら高速道路のデータに見られる複雑な現象を再現することができない。

それでは、CAモデルの良し悪しを判断するのに最も重要な基本図と相転移について見てゆこう。通常、交通工学では渋滞の様子を流量-密度図を描いて調べる。これは基本図ともいわれ、横軸に車の密度、縦軸に交通流量を取ったものとして定義される。CAモデルでもまず、この基本図を書いてみるとから始まる(図1(a))。ある時間 t における密度 ρ^t と交通流量 q^t は空間平均で考え、それぞれ $\rho^t \equiv (1 \text{ の総数}) / (\text{セルの総数})$, $q^t \equiv \rho^t \times (\text{時間 } 1 \text{ ステップで動いた } 1 \text{ の数}) / (1 \text{ の総数})$ のように与える。つまり、道路に単位セルあたり平均して何台車がいるのかが密度であり、また、 q^t の右辺の分数は車の平均速度(\bar{v})を表しており、それに密度をかけたものが流量の定義($q = \rho \bar{v}$)になっている。図1の書き方は、まず適当な初期条件を乱数で発生させ、それらを沢山選んで各々定常状態になるまで計算し、その時の密度と流量の値を図上に重ねてプロットする。ただし道路には周期境界条件を課してある。右上がりの部分が自由走行領域で、右下がりの部分が渋滞領域を表す。そして、ちょうど2等辺3角形の形をしており $\rho = 1/2$ の密度の時に渋滞相への相転移が起こっていることが分かる。これは、 $\dots 0101010 \dots$ のパターンのときに車が一番良く流れることより明らかであろう。

それでは次に現実の交通流とルール184CAモデルの基本図を見比べてみよう。図2が現実の交通流の実測データである[4]。現実のものはゆらぎが入っているが、平均化して考えると自由走行部の直線は3角形の頂点より少し上に伸びており、また渋滞が起こる密度あたりにデータ点が2次元的に広がった領域があるよう見える。これはどのデータを見てもある程度共通した性質である。つまり単純な3角形でなく、漢字の「人」のような図形になっており、さらに渋滞転移部には何か濃い2次元領域が存在していることに気付く。このように右上がりの自由走行相から右下がりの渋滞相への相転移はそう単純ではない。

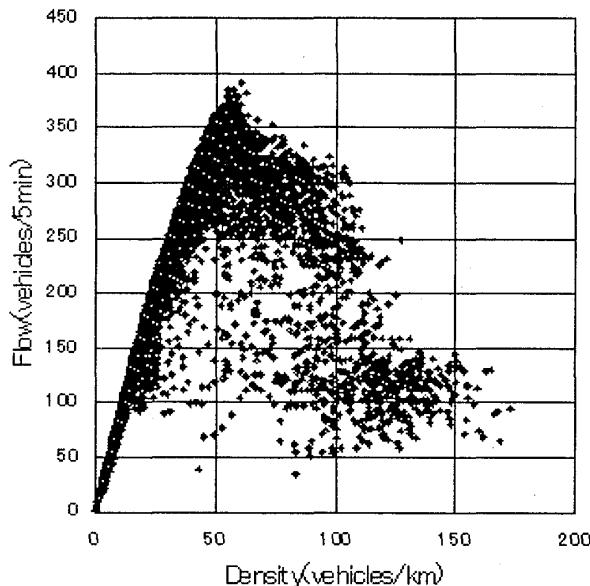


図2 東名高速道路東郷PA付近下りの実測データによる基本図

1996年8月の1ヶ月分の流量と密度を重ねてプロットしたもの。流量は5分あたりの断面交通量である。

く、現実には自由走行相のオーバーシュートが存在すると考えられる。これは物理的に考えても明らかであり、過密度で高速な流れは不安定であるがある程度存在して、これは基本図において自由走行を示す直線が渋滞になる臨界密度を越えて少し伸びた状態(メタ安定分岐)として表現できる。そしてこの不安定性は高速交通流の持つ本質的な性質であり、自然渋滞を引き起こす要因として考えられている。また濃い2次元領域であるが、これは最近Kernerらによって「同期流」という名前がつけられた非常に複雑な状態で[5]、詳しい事は良く分かっていないが様々な渋滞状態が共存していると考えられている。本記事では拡張されたCAモデルを通じて後ほどこの部分について考察する。以上より、現実の交通流の特性を表すにはこれら様子を表現できるCAが望ましい。そういう意味でルール184CAは単純すぎるるのである。

3 拡張された交通流CAモデル

では、より良いモデルを得るためにこれまで考えられてきた、ルール184モデルの主な拡張について見てゆこう。

3.1 スロースタートモデル

ルール184モデルに車の慣性の効果を入れたもので、一度止まった車は動きにくいことをルールに組み込むものである。代表的なものとして、一度停止した車は前が空いて動けるようになっても一度待ってから動き始める、とする「一回休み」のルールである。停止した車以外はルール184モデルと同じである。なお、このルールを初めて扱った1993年の高安らの原論文[6]では、「停

止した車の前の空きが2セルになったら動き始める」と書いてあるが、これを文字通り解釈すると空きが1セルの間はずっと先に進まないことになり、高密度のとき不自然な動きになる。したがって、「一度停止した場合、前が空いても1時間ステップ待つ」と解釈した方が自然である。このモデルの基本図は図1(b)で与えられる。注目すべき点は、スロースタートルールを組み込むことでメタ安定の分岐が出現したことである。現在、メタ安定状態を表現するにはこのスロースタートのルールが最も有効であると考えられている。実はこのルールでもうまく初期条件を設定しなければ、基本図ではっきりとメタ安定状態は見えない。特にメタ安定の高流量部の枝を出すためには1が2つ以上並ばないようにしなくてはならず、適当な乱数で初期条件を選んだだけではほとんど出現しないことを注意しておく。これは現実には高密度自由走行は不安定でほとんど出現しないことに対応している。

3.2 FI モデル

ルール184 モデルは1時間ステップあたりに進むセル数が最大で1である。これを拡張して、最高速度を $V \geq 1$ とするモデルが1993年に福井・石橋(FI)によって考案された[7]。つまり、1時間ステップで前が V セル以上空いていれば V セル進むことができるとするものである。 V セルより小さい空きの時は、車を追い越すことはないのでその空きの分だけ動く。残念ながらこの基本図はメタ安定分岐は出ず、自由走行側の傾きが速度 V なので2等辺3角形の頂点が左にシフトするだけである。しかしその状態量の時間発展の厳密解が求められるなど良い数理的性質がある[8]。

3.3 クイックスタートモデル[9]

これまでのモデルは、運転者は1台先の車を見て運転するとしたものである。これを拡張して、 $S(\geq 1)$ 台先まで見て運転するとしたものがこのクイックスタートモデルで、運転者の見通しがあるモデルと言える。現実でも直前の車だけでなく、前々方まで見て運転している場合が多いだろう。しかしこの基本図もメタ安定分岐は出ず、渋滞相の傾きが $-S$ なので3角形の頂点が逆に右にシフトするだけである。

3.4 NS モデルとその周辺

以上のすべてのモデルには確率が入っていない決定論的モデルであった。ランダム性を取り入れた確率CAへの拡張は1992年にNagelとSchreckenberg(NS)によってなされた[10]。その時間更新ルールは4つのステップで構成される。ステップ1は加速過程で、もしも現在の速度が系の最高速度 V_{\max} より小さい場合、なるべく早く移動したいという心理から速度を1増加させる。ス

ステップ2は減速過程で、前の車との衝突を避けるために、もしもステップ1の後の速度が前の車との車間セル数を超えていれば、その速度を車間セル数まで落とす。ステップ3はランダム化と呼ばれ、各々の運転者は一般に個性があり加減速の仕方にばらつきがあると考え、確率 ρ で今の速度を1下げる操作を全ての車についておこなう。もちろん止まっている車は速度はゼロのままである。ステップ4で以上の3ステップの後に得た新しい速度で車を移動させる。以上で時間1ステップになる。そして時間更新は、全ての車で同時に同期して行う。なお、この時間更新はステップの順序が重要であり、例えばステップ2と3を入れ替えるとその振る舞いは全く異なり、渋滞は起きにくくなる。実際にシミュレーションする場合、1セルは7.5 mで $V_{\max}=5$ とし、1時間ステップは実時間で約1秒とするのを Nagel らは提唱している。実はこの基本図もメタ安定分岐は出ないが、確率モデルのため3角形の周りにデータ点がばらつく。そしてその形は平均場近似やその拡張により現在かなり詳しく理解が進んでいる[11]。次に、メタ安定状態を実現するために提案されたNSモデルの拡張についてふれておこう[3]。それは前述のスロースタートルールを導入するものである。2種類考えられ、1) 速度がゼロの車は、次の時刻の時にステップ1で確率 q で速度1にする、とするルール、2) 前の時刻で速度がゼロだった車だけ次の時刻のステップ3で別の確率 q を使って速度を1下げる、とするルールである。いずれにしろもう一つスロースタートを表す確率 q を導入するものであり、止まっている車は動きにくい状況をいかにルールに組み込むかでいろいろな方法が考えられる。

3.5 BCA モデルとその周辺

最後に超離散化の方法を使った新しいCAモデルについてふれよう[12]。これは、Burgers CA(BCA)といわれ、一つのセルに0, 1だけでなく最大 L までの整数が入ることができる多値モデルである。詳細は次章で述べる。

ルール184CAは $L=1$ の場合であり、その多値拡張版になっている。この多値の物理的解釈は2つあり、一つは L 車線をまとめて考えて粗視化したものであり、もう一つは1セルの長さを最大 L 台車が入る長さと考えるものである。そのルールは、前のセルの空きに最大限移動するというものである。今のセルの位置を j とし、時刻 t でのその位置のセルを占有する車の台数を U_j^t と表すと、その先のセルの空きは $L - U_{j+1}^t$ と表される。したがって、セル j からセル $j+1$ にうつる車の台数は $\min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)$ である。同様にセル j に入ってくる車の台数は $\min(U_{j-1}^t, L - U_j^t)$ となるので、セル j の時間変化は

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (1)$$

と表される。この基本図にはメタ安定状態は見られず、ルール184CAモデルと同じ3角形になる。BCAをメタ安定状態が実現されるように拡張したもの

が拡張 BCA (EBCA) である [13], [9]。それは以下のようなルールである。まず、ルール 184 で 1 を動かす。そして「その動いた 1 の中で」さらに動けるものがあれば、もう 1 つ動かす。この新しいルールでは、実は時間 1 ステップで 2 つのセルを動ける車があり、ルール 184 の速度アップ版、と考えられる。あるいはドライバーの積極性を表現している、と考えても良い。そして、スロースタートルールを内包していることも示せる。この基本図にはメタ安定分岐が現れ、さらに 1 章で言及した「濃い 2 次元領域」も現れることが最近明らかになった [14]。しかし EBCA をさらに多速度へと拡張するのはこのままでは困難であり、より一般的なモデルを作るためには後述する Lagrange 表現により BCA を扱う方が良いことが分かってきた [15]。

4 各モデルの関係

これまで様々な CA モデルの紹介をしてきたが、この章では他のモデルとの数理的な関係について考えてゆく。各モデルの特徴を考える上でモデル同士のつながりを明らかにするのは大変重要である。交通流モデルは大きく、1) 流体モデル (Burgers 方程式 [16] など), 2) 追従モデル (最適速度モデル [17] など), 3) CA モデルの 3 つに分けることができる。そしてこれらの関係であるが、まず、1) と 3) を超離散法によって、そして 2) と 3) を Euler=Lagrange 変換によって関連付けられるのを見てゆこう。

4.1 超離散法

最近、ソリトン理論の発展により、ソリトン方程式に対応した可積分 CA が見出された [18]。その際に、差分方程式からある極限操作で CA を構成する方法が新しく提案され、それを超離散法という。この方法の特徴は、もとの偏微分方程式の持つ様々な数学的性質、例えば保存量や厳密解などを崩さずに CA に変換できる、という点にある。つまり、得られた CA はもとの偏微分方程式と極めて類似した振る舞いをするのである。そして、この手法を用いてルール 184 モデルと Burgers 方程式とは密接な関係があることが明らかになった [12]。まず、Burgers 方程式は

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \quad (2)$$

である。これは武者らによって 1978 年に初めて交通流のモデルとして使われ、 u は車の密度を表している。(2) は Cole=Hopf 変換 $u=f_x/f$ によって線形化でき、熱伝導方程式 $f_t=f_{xx}$ になることは良く知られている。さて、この方程式から超離散法により CA を構成するわけであるが、まず第一ステップでは偏微分方程式を差分方程式に変換する。差分方程式でもこの線形化可能性という構造を不变に保つために、まず熱伝導方程式から差分方程式に変換してゆく。それは

$$f_j^{t+1} - f_j^t = \delta(f_{j+1}^t - 2f_j^t + f_{j-1}^t) \quad (3)$$

としておこう。ただし、 $\delta = \Delta t / \Delta x^2$ であり、 $\Delta t, \Delta x$ はそれぞれ時間、空間差分間隔である。次に、Cole=Hopf 変換の離散版として、 c を定数として $u_j^t = cf_{j+1}^t / f_j^t$ というものを考える。そしてこれを用いて式(3)を u のみで表すと

$$u_j^{t+1} = u_j^t \frac{1 - 2\delta + \delta \left(\frac{c}{u_j^t} + \frac{u_{j+1}^t}{c} \right)}{1 - 2\delta + \delta \left(\frac{c}{u_{j-1}^t} + \frac{u_j^t}{c} \right)} \quad (4)$$

となる。これが時間・空間の差分化された Burgers 方程式である。次にこれを CA に変換する。そのために従属変数を離散化する操作が必要であり、これが超離散法と言われる手法である。まず、

$$u_j^t = \exp \left(\frac{U_j^t}{\varepsilon} \right), \quad \frac{1 - 2\delta}{c\delta} = \exp \left(-\frac{M}{\varepsilon} \right), \quad \frac{1}{c^2} = \exp \left(-\frac{L}{\varepsilon} \right) \quad (5)$$

とおいて、新たに小さい変数 ε を導入し、さらに δ, c の代わりに L, M を導入する。そして極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ を考える。すると、超離散法における重要な公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left(\exp \left(\frac{A}{\varepsilon} \right) + \exp \left(\frac{B}{\varepsilon} \right) \right) = \max(A, B) = -\min(-A, -B) \quad (6)$$

より、式(4)は

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t). \quad (7)$$

となる。これが BCA である。そして BCA には、もとの Burgers 方程式が持つ衝撃波を表す厳密解に対応する、離散版の厳密解があり、その性質が極限操作を通して CA に引き継がれていることが分かる。さらにここで、もし $M > 0, L > 0$ で、かつ全ての j に対して $0 \leq U_j^t \leq L$ ならば、全ての j に対して $0 \leq U_j^{t+1} \leq L$ が成り立つことが示せる。つまり式(1)は $\{0, 1, \dots, L\}$ の $(L+1)$ 状態 3 近傍 CA と見なすことができる。また、式(1)において、 $L = M = 1$ とおくと、0 と 1 の値をとる通常の CA になり、これがまさにルール 184 モデルになっていることが分かる。以上により、2 つの一見異なる交通流モデルの数理的関係が示された。そして M は全体的な流量制限(ボトルネック)を表しているので、 $M \geq L$ とすれば \min の中で効いてくることは無いことが分かる。これが前章で述べた(1)である。以降、簡単のためこの M をとった形で考えてゆく。

4.2 Euler=Lagrange 変換

次に(1)と最適速度モデルの関係について考える。最適速度モデルでは、自分の車の速度をそのときの車間距離で決まるある最適な速度に調整するように動かすものである。したがって車に注目したモデルであり、(1)は道路に注目したもので車の個別性はないモデルである。流体力学的に言えば、最適速度モデルは Lagrange 変数で表したモデルであり、上記 CA モデルは Euler 変数の

モデルである。したがってこれらの変換を考えよう。まず、(1)における関数 U を $U_j^t = G_{L(j+1)}^t - G_{Lj}^t$ で定義される G を用いて変換する。これを(1)に代入すると G に対する式

$$G_{Lj}^{t+1} = \max(G_{L(j-1)}^t, G_{L(j+1)}^t - L). \quad (8)$$

を得る。また、 G の定義より、それは j に関して単調増加関数で $U \neq 0$ のとき、つまり各 j で、その値が j における車の台数分増えることが分かる。したがって G を

$$G_j^t = \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t - 1) \quad (9)$$

とおくことが出来る。ここで $H(x)$ はステップ関数であり、また、 N は道にいる車の全台数である。変数 x_i^t がいわゆる「Lagrange 変数」で、左から数えて i 台目の車の時刻 t における位置を表す。(9)を(8)に代入し簡単にすると Lagrange 変数だけの式に変形できて最終的に

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(L, x_{i+L}^t - x_i^t - L) \quad (10)$$

となることが示せる[15], [19]。つまり、これが Lagrange 変数で書かれた BCA である。そして $L=1$ とすればもちろんルール 184 モデルのラグランジュ表現になっている。(10)を少し一般化して

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(V, x_{i+S}^t - x_i^t - S) \quad (11)$$

としよう。ここで $V=S=L$ とすれば(10)に一致する。また $V=1, S>1$ とすればクイックスタートモデル、 $S=1, V>1$ とすれば FI モデルの Lagrange 表現になっていることが分かる。そして、 V は系の最高速度、 S は運転者の見通しという物理的な意味があることも分かる。ここでさらに最適速度モデルとの関連を考えよう。FI モデルの Lagrange 表現において両辺に $-(x_i^t - x_i^{t-1})$ を加えると

$$x_i^{t+1} - 2x_i^t + x_{i-1}^t = \min(V, h_i^t) - (x_i^t - x_i^{t-1}) \quad (12)$$

となる。ここで $h_i^t = x_{i+1}^t - x_i^t - 1$ は i 番目の車と $i+1$ 番目の車との車間距離を表す。そして $\Delta t \rightarrow 0$ の連続極限をとって適当なスケール変換をすれば

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \min(V, h_i^t) - \frac{dx_i}{dt} \quad (13)$$

が得られる。これはまさに最適速度モデルであり、最適速度関数は $\min(V, h_i^t)$ という区分線形タイプ[20]のものが自動的に得られたことになる。ただし、注意すべき点は FI モデルの一様流は擾乱に対して常に安定であり、ここで得られた最適速度モデルも感応度のパラメータが大きい場合に相当しており、一様流は安定なものに限られている。その他本記事で扱ったモデルはこのような枠組みで相互関係を考える事ができるが紙面の都合で省略する。

5 ラグランジュ形式の新モデルと同期流

最後にごく最近考えられた(11)にスロースタートを結びつけた総合的な Lagrange 形式のモデルを紹介して、1章で言及した基本図の相転移点付近に見られる濃い2次元領域について考えよう。そしてこのモデルはクイックスタートや FI モデルをもすべて含むものである。式で書けば

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min \left(V_i^t, \min_{k=1, \dots, S-1} (x_{i+k}^t - x_i^t - k + V_{i+k}^t) \right) \quad (14)$$

となる[15]。ここで、 $V_i^t = \min(V, x_{i+S}^t - x_i^t - S, x_{i+S}^{t-1} - x_i^{t-1} - S)$ であり、もし $S=1$ のときは $k=1$ とおく。(14)において、右辺の $\min_{k=1, \dots, S-1} (\dots)$ の項は車同士の衝突を避けるための項である。見通しがあるために直前にいる車との衝突回避だけでは不十分であり車から見える視野内のすべての車との衝突回避を考慮にいれなくてはならない。このモデルで $V=S=1$ とすればスロースタートモデルである。この基本図は図3(a)となる。メタ安定分岐が現れ、しかも複雑な相転移を示している。図3(b)において流量最大の点 A の密度と流量は $(S/(V+S), SV/(V+S))$ であり、渋滞相との分岐点 B の密度と流量は $(S/(2V+S), SV/(2V+S))$ である。そしてこの間の密度での自由走行相がメタ安定相である。このメタ安定部の擾乱に対する安定性を調べよう。以下、 $V=5, S=2$ とする。A に相当する一様流の状態 $\dots 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \dots$ は最も擾乱に対して不安定であり、その流量は $Q=SV/(V+S)=1.42857$ である。まず、擾乱として車を一つだけ後ろにずらす。 $\dots 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \dots$ とすると、流量が減少してまた別の定常状態に移行する。このときの流量は $Q=1.28571$ である。つぎにさらに擾乱を大きくしてゆき、1をさ

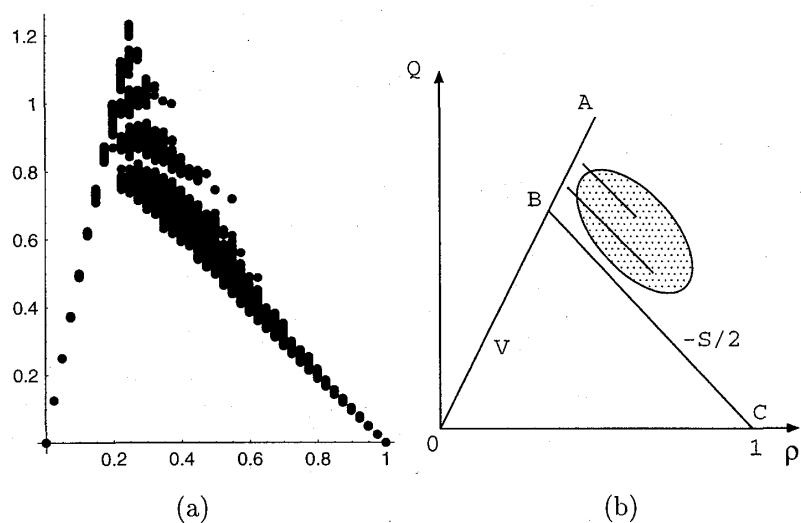


図3 (a)新しいラグランジュ形式のモデルの基本図($V=5, S=2$)と(b)その模式図

相転移部分において沢山の分岐が出現している。模式図において、直線 $A-B, B-C$ はそれぞれ傾き $V, -S/2$ である。点 A の状態に擾動を加えると、途中の網掛け部の準安定状態を経て渋滞相 $B-C$ になる。

らに後ろへずらした状態から計算すると定常状態の流量はどんどん減少し、最終的に $Q=0.714286$ となる。これは渋滞線 $B-C$ 上の点である。したがって、不安定な高密度一様流は擾乱によって何段かの安定なメタ安定状態を経て最終的に渋滞状態になることが分かる。このたくさんの中間安定状態の存在が2次元領域を作っていると考えることができる。自由走行流が密度の増加により不安定化してより低い流量の安定状態へ移行し、最後に強い渋滞になる、というシナリオは Kerner らのいう同期流の特徴に合致しており、相転移部分はこのようなたくさんのメタ安定状態の「弱い」渋滞段階があることが予想される。

6 おわりに

以上、これまで提案してきた CA モデルの性質と、各種モデルとの関連について紹介した。これからも様々なモデルが改良され提案されると思われるが、それと同時にいっそう実測データの分析をしなければならない段階に来ている。最終的にモデルの妥当性を決めるのは実測データであり、質の高いデータとそこから得られるモデル判定の足がかりは大変重要である。現在までで得られているデータだけでは、例えば2車線以上の場合やランプ部などの重要な CA モデルの良し悪しを判定することができない。それゆえ、本記事では基本的な1車線モデルの場合だけに限って議論した。そして、同時に CA による自然界のモデル化という分野はまだまだ発展途中であり、CA 自身の拡張や解析方法などもこれから大きな数理的課題である。CA のような離散手法はコンピュータによる数値計算に適しており、ますます色々な分野で使われ、様々な複雑現象に応用されていくであろう。そのためにも CA ルールを実データより構築する帰納的な数理的手法、あるいは微積分のような強力な解析手法と CA の代数的手法をつなげる超離散法についてますます研究を深めてゆくことが重要であると思われる。

[参考文献]

- [1] 加藤恭義, 光成友孝, 築山 洋, セルオートマトン法, 森北出版, 東京, 1998.
- [2] Wolfram, S., Theory and applications of cellular automata, World Scientific, Singapore, 1986.
- [3] Chowdhury, D., Santen, L., and Schadschneider, A., Statistical physics of vehicular traffic and some related systems, Physics Report, 329(2000), 199-329.
- [4] Nishinari, K., and Hayashi, M. (editors), Traffic statistics in Tomei express way, The Mathematical Society of Traffic Flow, Nagoya, 1999.
- [5] Kerner, B. S., Experimental features of the emergence of moving jams in free traffic flow, Journal of Physics A : Mathematical and general, 33(2000), L 221-L 228.
- [6] Takayasu, M., and Takayasu, H., $1/f$ noise in a traffic model, Fractals, 1(1993), 860-866.
- [7] Fukui, M., and Ishibashi, Y., Traffic flow in 1d cellular automaton model including cars moving with high speed, Journal of Physical Society of Japan, 65(1996), 1868-1870.
- [8] Fukś, H., Exact results for deterministic cellular automata traffic models, Physical Review E, 60(1999), 197-202.
- [9] Nishinari, K., and Takahashi, D., Multi-value cellular automaton models and metastable states in a congested phase, Journal of Physics A : Mathematical and general, 33(2000),

7709-7720.

- [10] Nagel, K., and Schreckenberg, M., A cellular automaton model for freeway traffic, *Journal of Physics I France*, 2(1992), 2221-2229.
- [11] Schreckenberg, M., Schadschneider, A., Nagel, K., and Ito, N., Discrete stochastic models for traffic flow, *Physical Review E*, 51(1995), 2939-2949.
- [12] Nishinari, K., and Takahashi, D., Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton, *Journal of Physics A : Mathematical and general*, 31 (1998), 5439-5450.
- [13] Nishinari, K., and Takahashi, D., A new deterministic CA models for traffic flow with multiple states, *Journal of Physics A : Mathematical and general*, 32(1999), 93-104.
- [14] Fukui, M., Nishinari, K., Takahashi, D., and Ishibashi, Y., Metastable flow in a two-lane traffic model equivalent to extended Burgers cellular automaton, to appear in *Physica A*.
- [15] Nishinari, K., A Lagrange representation of cellular automaton traffic-flow models, *Journal of Physics A : Mathematical and general*, 34(2001), 10727-10736.
- [16] Musya, T., and Higuchi, H., Traffic current fluctuation and the Burgers equation, *Journal of Physical Society of Japan*, 17(1978), 811-816.
- [17] Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., and Sugiyama, Y., Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, *Physical Review E*, 51(1995), 1035-1042.
- [18] Tokihiro, T., Takahashi, D., Matsukidaira, J., and Satsuma, J., From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, *Physical Review Letters*, 76 (1996), 3247-3250.
- [19] Nishinari, K., Euler and Lagrange representation of traffic models, to appear in the proceedings of traffic and granular flow '01.
- [20] Nakanishi, K., Itoh, K., Igarashi, Y., and Bando, M., Solvable optimal velocity models and asymptotic trajectory, *Physical Review E*, 55(1997), 6519-6532.

[Abstract]

There are many different models of traffic flow proposed up to now. In this paper, we will concentrate on cellular automaton(CA) models and study their validity in detail. The rule-184 model is considered as a prototype of all CA models. The model is extended to more realistic ones by adding new rules. Among them, we will mainly consider the Fukui-Ishibashi model, the Nagel-Schreckenberg model, the slow-to-start model and the Burgers model. We will also study the relationship among different models by using the methods of ultradiscretization and Euler-Lagrange transformation. Moreover, a new hybrid Lagrange model, which is recently proposed by using the above methods, is reviewed and we consider complex phase transition from free to jamming state by using the model.