

ROSEリポジトリいばらき（茨城大学学術情報リポジトリ）

Title	時系列予測モデルを導入したポートフォリオモデルの効率的資産運用手法
Author(s)	猪瀬, 悟史
Citation	
Issue Date	2015-03-24
URL	http://hdl.handle.net/10109/12639
Rights	

このリポジトリに収録されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作権者に帰属します。引用、転載、複製等される場合は、著作権法を遵守してください。

お問合せ先

茨城大学学術企画部学術情報課（図書館） 情報支援係
<http://www.lib.ibaraki.ac.jp/toiawase/toiawase.html>

博士学位論文

時系列予測モデルを導入した
ポートフォリオモデルの
効率的資産運用手法

Effective Asset Management
Based on Portfolio Model
Applying by Time-Series Predictions

平成27年3月

茨城大学大学院 理工学研究科

生産科学専攻

猪瀬 悟史

要旨

分散投資によるリスク低減効果を説明したポートフォリオ理論は、1950年代に提唱されてから今日においても資産運用に活用されている。この理論では、リスク低減効果を説明するために、期待収益率およびリスクを用いている。これらを推計するために、平均分散ポートフォリオモデルが提案されたが、当時の計算機資源にとっては負担の大きいものだった。そのため90年代まで提案されたポートフォリオモデルの多くは、計算コスト削減のための提案が主流であった。近年は、リスクパリティポートフォリオモデルなど期待収益率の推計を行わないモデルが主流になりつつある。その理由は、推定が困難である期待収益率が、投資比率に対し大きな影響を与えるためである。しかし本研究では、近年発展した非線形科学の知見を利用した時系列予測法を適用することで、積極的に期待収益率を推定し、さらにポートフォリオ効果によって予測に伴うリスクを分散させることで、安全かつ効果的な資産運用戦略の立案を研究目的とする。

第1章では、ファイナンス関連分野およびポートフォリオモデルの発展の歴史的背景を述べ、本論文の目的および位置付けを示した。

第2章ではポートフォリオ理論の概要を、第3章では従来のポートフォリオモデルについて述べた。3.1章で述べる平均分散ポートフォリオモデルは、収益率の時間発展にダイナミクスが存在しないことを前提とした推定方法である。次に、投資比率の最適化において一般的な評価関数として用いられるシャープレシオを紹介した。この関数を最大化することで、リスクを小さくしつつ、超過収益率が大きなポートフォリオを構築できる。さらに、最適解を探索するためのアルゴリズムを紹介した。3.2章では、主成分分析を利用したリスクパリティポートフォリオモデルについて説明した。これは主成分分析によって得られた固有ベクトルに基づいて互いに無相関なポートフォリオを構築し、ポートフォリオ全体に対するリスク寄与度を均一化することで、リスクの源泉を分散したポートフォリオを構築できる。

第4章では、従来のポートフォリオモデルで用いられる単純移動平均予測法をより高次の予測法へ拡張した。まず4.3章において自己回帰予測法へ拡張し、4.4章では非線形モデルへ拡張した。そのために、カオス変動を予測する局所線形近似法に着想を得て、予測開始点と各学習データとのユークリッド距離に基づいた加重自己回帰予測法を利用した。

第5章では、これらの予測法をポートフォリオモデルへ適用した。単純移動平均予測以外を適用する場合、平均分散ポートフォリオモデルのように収益率の標本分散からリスクを推定できない。そこでポートフォリオの原義を再考し、過去の予測誤差からリスクを推定した。

第6章では前章で提案したポートフォリオモデルの有用性を検証すべく、2期間の実データを用いてシミュレーションを行った。6.1章では各予測モデルの予測精度を比較したが、高次の非線形予測を活用しても、想定していたよりも予測精度は低かった。しかし従来の予測法と比較すれば、その精度は有意に高いことを統計的仮説検定によって証明した。さらに6.2章では、予測モデルの尤度と予測精度に正の相関があることを確認した。つまり投資開始前に確認できる尤度に基づいて予測しやすい銘柄を厳選することで、より効果的なポートフォリオを構築できる。さらに投資シミュレーションを行ったところ、従来のポートフォリオモデルより高収益かつ低損失な資産運用を実現できた。

しかし現実の市場で取引をする場合、取引手数料が発生し端株処理も行う必要がある。もしこれらを考慮した場合、従来のポートフォリオモデルと同等程度の結果になってしまう。複雑な予測モデルを導入する意義は失われる。そこで7章ではこれらの制約を考慮したシミュレーションを行った。まず取引手数料を減額したい場合、取引頻度を低下させれば良いが、それに伴い長期の株価を予測する必要がある。しかし7.1章において、予測間隔を長期にするほどその予測精度は低下することが分かった。つまり短期予測であれば、予測精度の観点において有利であるが、しかし取引手数料が高くなるというデメリットが存在する。そこで7.2章では、取引手数料を考慮できる新しいシャープレシ

オを提案し、7.3 章では投資比率の端株処理を 0-1 計画問題と捉え、遺伝的アルゴリズムによって繰り上げ、繰り下げを最適化した。さらに 7.4 章では投資シミュレーションによって、各ポートフォリオモデルの有用性を比較した。まず従来の平均分散ポートフォリオモデルでは、収益率を予測できないため、バイアンドホールド戦略に劣るという先行研究を支持する結果が得られた。しかし提案するポートフォリオモデルでは期待収益率を十分に予測できるため、取引手数料が累積したとしても、良好な運用パフォーマンスを確認できた。特に、取引手数料のデメリットよりも素早い市場変化に対応できる短期予測が最良であった。ここからも高次の予測モデルを導入する意義を確認できた。

最後に 8 章では、リスク推定における改良を行った。まず 8.1 章では、非線形予測の誤差系列において長期にわたる正の自己相関構造を確認し、これを多変量 GARCH モデルの一種である時変条件付き相関モデルによって推定した。さらに 8.2 章では、各銘柄が高い連動性を有することに着目し、株式を買いおよび売りを同時に行うロングショート戦略を導入した。これによってリスクをさらに低減することができる。以上の有用性を検証すべく、8.3 章では投資シミュレーションを行った。まずロングショート戦略を適用すれば、最大損失額を大きく抑え、投資の効率性を大きく向上できることを確認した。さらに時変条件付き相関モデルによってリスクを推定したところ、最良の投資パフォーマンスを発揮した。

以上のように本論文では、効率的な資産運用手法の立案を主要な研究目的としている。その主要となる手法として、高次の予測モデルをポートフォリオ理論に組み合わせた。それによって期待収益率の推定精度を向上させ、さらに予測に伴うリスクも低減させた。また複数の市場や様々な期間に対して投資シミュレーションを行った結果、従来のポートフォリオモデルよりも有用な戦略であることを確認した。さらに現実の取引に伴う制約を考慮しても良好な運用パフォーマンスを実現できることから、市場のランダム性を仮定したバイアンドホールド戦略が最良という先行研究を否定する結果が得られた。この点において本研究は、パッシブ戦略に対するアクティブ運用の有用性を示す実証研究でもある。

Abstract

The portfolio theory proposed by Markowitz in 1952 has been used for an asset management. This theory uses the expected return rate and risk for explaining the portfolio effect that can theoretically reduce the risk. As the first numerical model, Markowitz proposed the mean-variance portfolio model, but in those days its computational cost was too huge for a practical use. For this reason, the most significant topic in this field was the reduction of numerical costs until the 1990's. In recent years, the models that do not estimate the expected return rate such as the risk parity portfolio model have been becoming popular. This reason is that the expected return rate has a great influence on the decision of asset allocation rates in spite of the fact that the expected return rate is so hard to be expected. However, in this study, I aggressively predict it by using a nonlinear time-series prediction developed in the dynamical theory. Moreover, I aim to reduce the risk caused by its prediction error, composing a multi-stock portfolio to make the asset management safer and more effective.

In Sect.1, I introduce the purpose of this study, explaining the historical background and development of some previous portfolio models. In Sect.2, I mention the detail of the portfolio theory. In Sect.3, I explain the mathematical definition of the previous portfolio models. For example, Sect.3.1 explains the mean-variance portfolio model, which does not assume any dynamics in the movement of return rates. Then, the Sharp ratio is introduced as an objective function to optimize the asset allocation, and its algorithm is also introduced. Section 3.2 explains the risk-parity portfolio model based on the principal-component analysis. This portfolio model is composed of several uncorrelated portfolios based on the eigenvectors which were given by the principal-component analysis. In addition, by equalizing each risk of the uncorrelated portfolios, I can spread the common risk sources affecting each stock.

In Sect.4, I expanded the simple moving average (SMA) prediction used for the mean-variance portfolio model into more advanced prediction models. In Sect.4.3, I expanded it into the autoregressive (AR) model, and in Sect.4.4, I applied the local linear approximation method, which is one of the nonlinear prediction models used in the chaotic time-series analysis.

In Sect.5, we applied these prediction models to the portfolio model. However, if I apply another prediction method except for the SMA prediction to the mean-variance portfolio model, the definition of risk has to be changed. Therefore, I redefined the risk by considering the original meaning of the risk, and I decided to apply the past prediction errors to estimate the risk of my portfolio models.

In Sect.6, to confirm the validity of my portfolio models, I performed investment simulations based on real financial data in two periods. First of all, in Sect.6.1, I confirmed the prediction accuracies of each prediction model, but more advanced prediction models could not realize better prediction accuracies than I expected. However, I could confirm that these prediction accuracies are significantly high in the statistical hypothesis test, compared to the SMA prediction model. In Sect.6.2, I also confirmed that there are positive correlations between the likelihoods and the prediction accuracies of each prediction model. This means that I can select hopeful stocks beforehand by checking the likelihood and can make more effective portfolio. In particular, this correlation becomes larger if I apply more advanced prediction models. Moreover, by performing investment simulations, I confirmed that my proposed portfolio model can realize higher profit and lower loss than the previous portfolio models.

However, for the actual trading in real financial markets, I have to pay commission fee and deal with fractional shares. If these micro structures of real markets are also considered in investment simulations and the investment performance of my proposed portfolio model is similar to that of the previous portfolio models, there is no advantage to apply more complicated prediction model to the portfolio model. For this reason, in Sect.7, I performed the investment simulations including these micro structures. At the beginning, if we want to reduce the commission fee, we can reduce the trading frequency. However, in this case, we have to perform long-term predictions of future return rates. Then, in Sect.7.1, I confirmed that the prediction accuracy of longer term prediction decreases as the prediction term is longer. Therefore, the short-term prediction has an advantage of better prediction accuracy, but has a disadvantage of higher commission fee. Next, in Sect.7.2, I modified the Sharpe ratio so as to consider the commission fee. In Sect.7.3, I proposed how to deal with fractional shares from the viewpoint of the 0-1 programming problem. Namely, fractional shares were rounded up or rounded down and these selections were optimized by the genetic algorithm. As the results of investment simulations, firstly, I obtained the same result as the previous study concluding that the performance of the mean-variance portfolio model is worse than that of the buy-and-hold strategy. This reason is that the SMA prediction cannot predict future return rates. On the other hand, I confirmed that my proposed nonlinear portfolio model can realize better asset management because the prediction accuracy of the nonlinear prediction is higher than that of the SMA prediction. Moreover, the short-term trading showed the best performance because it can follow market trends quickly although its trading commission fee is large. By these results, I confirmed the validity of my nonlinear portfolio model.

Finally, in Sect.8, I improved the estimation of the risk. In Sect.8.1, I show that the residual error of the nonlinear prediction has a long-term positive autocorrelation structure. Therefore, I estimated the risk by the dynamic conditional correlation (DCC) model, which is one of the multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity (GARCH) models. In addition, in Sect.8.2, because some stocks are often synchronized each other, I adopted the long short strategy where we take buy and sell positions simultaneously. By using this strategy, the risk of a portfolio can be reduced greatly. To confirm the validity of these improvements, I performed investment simulations again in Sect.8.3. As results, the long short strategy improved the efficiency of the investment and reduced the maximum draw-down rate. Moreover, the DCC model also worked well to make a portfolio more efficient and safer.

Main purpose of this study is the proposition of the effective asset management strategy. Firstly, I applied more advanced prediction models to the portfolio theory. This prediction model could improve the prediction accuracy of the return rate and reduce the risk based on its prediction error. Then, I confirmed that my proposed portfolio model is more useful than the previous portfolio models through many investment simulations. Moreover, it can realize favorable investment performance even if I consider the real trading restrictions such as the trading commission and the unit trading system. These results too strong the previous studies that have concluded the buy-and-hold strategy is the best because stock prices fluctuate like the random walk. Therefore, my study gives us a new viewpoint that the active strategy predicting financial markets aggressively can overcome the passive strategy like the buy-and-hold strategy.

目次

1	はじめに	1
2	ポートフォリオ理論	5
3	従来のポートフォリオモデル	8
3.1	平均分散ポートフォリオモデル	8
3.1.1	シャープレシオ	8
3.1.2	勾配法	9
3.2	リスク源泉分散ポートフォリオモデル	9
4	期待収益率の推定に対する時系列予測モデルの適用	12
4.1	予測モデルの評価	12
4.2	交差確認法	12
4.3	線形予測モデル	13
4.4	非線形予測モデル	13
4.4.1	埋込み定理	14
4.4.2	局所線形近似法をベースとした加重 AR モデル	14
5	平均分散モデルの書換え	15
6	完全市場下における日次投資シミュレーション	17
6.1	予測モデルの有用性	17
6.2	投資銘柄の厳選	18
6.3	投資シミュレーション	18
6.3.1	投資行動	18
6.3.2	投資成績の評価	20
6.3.3	シミュレーション結果	21
7	現実市場を想定したシミュレーション	31
7.1	長期予測	31
7.2	シャープレシオの一般化	32
7.3	端株処理	34
7.4	投資シミュレーション	35
8	より効率的な資産運用戦略	47
8.1	リスク推定に対する DCC モデルの適用	47
8.1.1	GARCH モデル	47
8.1.2	DCC モデル	48
8.2	ロングショート戦略	51
8.3	投資シミュレーション	51
8.3.1	ロングショート戦略の有用性	52
8.3.2	NAR-DCC ポートフォリオモデルの有用性	53
9	まとめ	63

目 次	8
10 謝辞	64
参考文献	65

1 はじめに

1952年にMarkowitzは、分散投資によって投資のリスクを低減できるポートフォリオ理論を提唱した[1]。以来、半世紀以上が過ぎた現在でも資産運用の世界では中心的存在となっている。しかし、この理論が実務に適用されるようになってから、30年程度しか経過していない。その最大の理由は、投資比率の最適化において大きな計算コストが掛かったためである。この理論では、将来に最も実現しうる収益率を期待収益率、そこからの乖離量の期待値をリスクと定義している。またこれらの情報と各銘柄間の相関情報を利用して、各銘柄に対する投資比率が最適化される。これは凸二次計画問題に相当するが、当時は効率的な解法が存在していなかった。またMarkowitzは簡潔な理論証明のために、過去の収益率の標本分布を将来の確率分布と見做すことで、最も単純な平均分散ポートフォリオモデルを提案した[1]。しかし標本共分散行列の計算や、その後に実行する投資比率の最適化に多大な計算コストが掛かる問題があった。

この背景から、分割統治法やシングルファクターモデル[2,3]、CAPM[4,5]など、平均分散ポートフォリオモデルの簡便解法が提案された。分割統治法は多数の銘柄をいくつかのタイプのクラスに分割し、そのクラスを代表するインデックスを選び出す。これらのインデックスへの投資比率を最適化した後、各クラス内の銘柄に対しても同様の方法によって投資比率を最適化する方法である[6]。しかしこのアプローチでは、クラス数やインデックスをどのように設定するかが問題となっている[7]。シングルファクターモデル[2,3]は、まず各銘柄の収益率を、GNPなどの経済指標を説明変数とした線形回帰モデルとして表現する。平均分散ポートフォリオモデルにおけるリスクは、一般的に密な共分散行列から推定されるが、このモデルは対角成分のみの疎な2次形式となるため、高速に解くことができる。しかし銘柄数が増えるに連れ、平均分散ポートフォリオモデルとは大きく違った結果を導出することが明らかになっている[8]。CAPM[4,5]は、日経平均株価やTOPIXなどの市場平均ポートフォリオの収益率を基準として、各銘柄の収益率の連動性をベータとよばれる指標によって評価する。つまりCAPMは、市場平均ポートフォリオの収益率を説明変数としたシングルファクターモデルと解釈できる。そしてこのベータを用いると、20~30銘柄程度を組み合わせるだけで、市場平均ポートフォリオと同様のパフォーマンスを期待できるポートフォリオを構築できるとしている[5]。しかしその後の実証研究では、ベータが時間関数として不安定な挙動をすることによる収益率との無関係性や[9,10]、選択する市場平均ポートフォリオによってパフォーマンスが大きく変化することが指摘されている[11]。その後、これらの問題を修正したマルチファクターモデル[12-14]が提案されている。このモデルは、各銘柄の収益率が市場平均ポートフォリオの収益率のみならず、いくつかのファクターによって表現できるとした裁定価格理論[15]に基づいて構築される。ただし、採用されるファクターは大きいものになると50以上にまで達する。そのため、適切なファクター数やその内容の選定が困難であること、それに付随して重回帰分析によるパラメータの推定には大きな計算コストが発生する。しかし近年では、二次計画問題解法の発展や計算機資源の普及により、大規模ポートフォリオに対しても高速に解けるようになり、今日の実務においても活用されている。

このように平均分散ポートフォリオモデルから発展したポートフォリオモデルの多くは、計算コストの削減を目的としてきた。またマルチファクターモデルは、特定のファクターに注目して割安銘柄を検出し、その銘柄に大口投資をするといったティルト運用に用いられている。そのため、どのファクターが収益率の推定精度に貢献するかを測定することや、推定精度の向上を目的としていない。

しかし、もし株価変動がある程度予測可能であれば、その分リスクを軽減できるため、より安定した資産運用ができる。ファイナンスに関連する研究や実務では、昔からこの問題について多くの議論がなされている。Famaが提唱した効率的市場仮説[16,17]では、過去の全ての情報は株価に反映されているため、収益率を予測することは不可能であると主張している。また先行研究[13,18]では、分析をすることはほとんど無意味であるとして、インデックスファンドを購入後はリバランスを行わ

ないバイアンドホールド戦略が有用であるとしている。さらに現代ポートフォリオ理論 [1, 4, 19–21] においてもこの仮定が理論的前提として用いられており、このランダムウォーク仮説も自明のこととして受け入れられている。しかしこの仮説を否定する意見も多くある。Lo は市場が進化論における適応性を有しているとした、適応的市場仮説 [22] を提唱している。新しく有用な投資戦略が開発されると、従来の戦略よりも優位であるため利益を得ることができるが、多くの投資家に利用されると利益が分散されてしまう。そのため新たに提案された投資戦略は、市場に適応できることから、予測ができるとしている。この仮説は数学的根拠を欠いているが、市場のアノマリーをこの仮説で説明できるとしている。また Jegadeesh はアノマリーの一例として、トレンドが継続するモメンタム現象の存在を実証している [23]。さらに、モメンタム現象と逆の特徴であるリバーサル現象もアノマリーとして実証分析がなされている [24, 25]。特に月次収益率にリバーサル現象があり、逆に 1 年毎の月次収益率間にはモメンタム現象が確認されている [24]。そして Alexander は設定した閾値を株価が超えたら取引を行うフィルタールール戦略を提案し、バイアンドホールド戦略と比較した結果から、市場の株価にトレンドが存在するとしている [26]。その他、小型株効果や低 PER 効果や、小型株効果や 1 月効果など季節性に関する規則性も確認されている [27–29]。

またファイナンスの世界では、期待収益率の予測可能性の議論以上に、リスクの推定に注目が集まっている。リスクにはボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる現象がしばしば観測される。これは長期にわたる正の自己相関構造であり、収益率の特徴と比較して高い特徴量を有している。Engle は 1982 年に、この特徴を捉えた ARCH モデルを提案した [30]。しかしこのモデルを適用する場合、多くのパラメータが必要とされるため、過学習による不安定性が指摘されている [31]。そこで 1986 年に彼の弟子である Bollerslev が、少ないパラメータで自己相関構造を表現できる GARCH モデルを提唱した [31]。さらに、利益よりも損失可能性を把握することが優先されるという実務背景により、これらの拡張モデルが多く提案されている [32–50]。

このようにリスクのほうが推定し易いという理由から、近年のポートフォリオモデルは期待収益率の推計を活用せず、リスクのみによってポートフォリオを最適化するリスクパリティポートフォリオに注目が集まっている。リスクパリティポートフォリオモデルは、ポートフォリオ全体のリスクに対する各資産のリスク寄与度を均一にするポートフォリオモデルである [51]。ポートフォリオ理論では、各銘柄間が逆に変動するほどリスクを低減することができるが、実際の市場では非常に高い連動性を有することが知られている。そのため投資比率を最適化すると、特定の資産のみに投資してしまう問題点が指摘されている。これは資産運用のパフォーマンスが期待収益率の推定精度に大きく依存するためであり、期待収益率の影響を除外することで、従来のポートフォリオモデルと比較して安定的に資産運用できるとしている。しかしこのポートフォリオモデルは、リスク寄与度を均一にしても、必ずしもリスクの源泉を分散していることにはならない可能性が指摘されている [52]。それは、異なる資産間に存在する同じリスクの源泉を低減できていない可能性があるためである。この課題の解決には、大きく分けて 2 つの方法が提案されている。まず 1 つ目は各銘柄のリスクに対し、マルチファクターモデルを応用する方法である [52]。しかし実用化するためには、各ファクターからのリスク寄与度がとても小さく、リスクの源泉を完全に特定できる等、強い制約があることが指摘されている。2 つ目は各銘柄の相関に着目した方法であり、代表的なものに Meucci が提案したリスク分散ポートフォリオモデルがある [53]。彼は、主成分分析によって固有ベクトルを混合比とした互いに無相関な主成分ポートフォリオを作成し、リスクの源泉を分散したリスクパリティポートフォリオモデルを提案している。

ただしリスクパリティポートフォリオモデルは、前述のようにリスクのみを利用して投資比率を最適化する。つまり、期待収益率に対する推定精度の向上を諦めていることに相当する。一方で、期待収益率の推定精度の向上のために、古くから自己回帰 (AR) モデルや自己回帰移動平均 (ARMA) モデルの適用がなされてきた。しかし、リスクのように明確な法則性を持たないため、推定精度をあ

まり向上できない。また多くの先行研究では、多変量モデルの VAR モデルや VARMA モデルの適用が検討されている [54, 55] が、実用上ほとんど利用されていない。まず、パラメータの数を多くしすぎるとモデルが過大になる。 n 銘柄かつ d 期間の過去の値に回帰した VAR モデルの変数の数は、 $n(nd+1) + n(n+1)/2$ 個のパラメータをもつため、指数関数的にパラメータが増大する。そうすると過学習を引き起こしてしまい、推定精度が低下してしまう。しかし、ポートフォリオのリスクを低減するためには多くの銘柄が必要となることから、トレードオフの関係にある。また VAR モデルは多くのパラメータを含むため、有意でないパラメータも多い可能性がある。予測モデルの次数選択には赤池情報量基準を用いられることが多いが、有意でないパラメータの影響で必要以上に小さなモデルが選択されてしまう場合もある。そのため情報量基準に頼らず解析者が経験的に次数を設定する等、正確な評価指標がないことも問題視されている [55]。その他、ファンダメンタルな要因も利用するモデルも提案されており、例えば投資家の主観的な見通しもその自信度に応じて混合するブラックリッターマンモデルが提案されている [28]。しかし本研究では、Markowitz の平均分散ポートフォリオモデルの改良を目的とし、過去の収益率変動のみによってポートフォリオを構築したい。

そこでまず 2, 3 章でポートフォリオ理論および従来のポートフォリオモデルを紹介する。なお Markowitz が提案した平均分散ポートフォリオモデル [1] と、Meucci が提案したリスクパリティポートフォリオモデル [51] を従来のポートフォリオモデルとして活用する。次にこれらのモデルで用いている単純移動平均 (SMA) 予測を AR モデルに拡張することで、将来の収益率を積極的に予測する。さらに AR モデルに非線形的な近似能力を持たせた時系列予測モデルも検討する (4 章)。本来の AR モデルは線形回帰式であるため、説明変数と目的変数の関係を平面で近似する。しかし類似した変動パターンを重要視して平面近似すれば、大域的には非線形な曲面で近似できる。これはカオス変動を予測する局所線形近似法 [56, 57, 59, 60] に基づいているが、近似面としてより自由度の高い曲面を許す柔軟さは、予測対象がカオスでなくても有意義である [58]。なお本研究では、この局所線形近似法に基づく AR モデルを非線形自己回帰 (NAR) モデルと称する。この近似面に制約を与えることで AR モデルや単純移動平均モデルを再現できるため、平均分散ポートフォリオモデルと親和性が高く、拡張し易い予測モデルである。しかし当然ながら、平均分散ポートフォリオモデルにおける期待収益率の定義と異なるため、リスクの推定において辻褃合わせが必要となる。そこでリスクを根本的に考えれば、分散は期待収益率からの乖離量の期待値となるので、過去の予測誤差に基づいてリスクを推定する (5 章)。これにより期待収益率の予測モデルは選択自由になり、従来の SMA 予測に束縛されない。この妥当性を検証すべく、実際の収益率データを用いて各予測モデルの有用性を検証する。さらにポートフォリオを構築する銘柄の厳選方法を説明し、これらの投資シミュレーションの運用成績から従来手法との比較を行う (6 章)。しかし理想的な市場の下で利益が獲得できたとしても、取引手数料等を考慮すれば利益が相殺されるため、バイアンドホールド戦略が有用とする先行研究がある [18]。そこで現実的な株式市場を考慮した投資シミュレーションを行い、それでも十分な利益を獲得できるか検証を行う。また、良好なパフォーマンスを得るために必要となる初期資金についても議論する (7 章)。8 章では、リスクをより低減するための手法を導入する。平均分散ポートフォリオモデルのリスク推定は、期待収益率と同様に、過去の予測誤差の単純移動平均予測をしている。そこでより高度な時系列予測モデルを導入することで、リスクの推定精度の向上を図る。ただしポートフォリオのリスクを推定する場合、共分散を推定する必要があるため、多変量モデルを用いる必要がある。VARMA モデルと同様にパラメータ数の急激な増大が問題となる [61] が、先行研究では、パラメータを抑えた多変量モデルが多数提案されている [62–76]。本研究ではその中でも、相関情報に時変性を許容した時変条件付き相関 (DCC) モデルを活用する [77]。さらに前述したように、各銘柄間の高い連動性はポートフォリオのリスクを大きく低減できないというデメリットを引き起こす。しかしロングショート戦略という投資手法を応用することにより、逆にリスクを大きく低減できる方法を示す。以上のアイデアを統合することで新しいポートフォリオモデルを提案し、そ

の妥当性について実データを用いた投資シミュレーションによって広く検証する。最後に 9 章にて、本研究のまとめを述べる。

2 ポートフォリオ理論

時刻 t における投資対象銘柄 i ($i = 1, 2, \dots, n$) の取引価格を $y_i(t)$ とし, s 期前の取引価格 $y_i(t-s)$ に対する収益率 $r_{i,s}(t)$ は

$$r_{i,s}(t) = \frac{y_i(t) - y_i(t-s)}{y_i(t-s)} \quad (1)$$

として算出される.

将来 $t+s$ における収益率 $r_{i,s}(t+s)$ は不確定であるが, 確率過程によって表現されることが多い. したがって期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ と分散 $\hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s)$ は, 時刻 t までの情報を利用して次のように書ける.

$$\hat{r}_{i,s}(t+s) = E_t[r_{i,s}(t+s)] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s) &= \text{Var}_t[r_{i,s}(t+s)] \\ &= E_t[(r_{i,s}(t+s) - \hat{r}_{i,s}(t+s))^2] \end{aligned} \quad (3)$$

ここで E_t , Var_t は, それぞれ t 期までの情報に基づく条件付き期待値と条件付き分散を表す. また, ポートフォリオ理論では, 標準偏差 $\hat{\sigma}_{i,s}(t+s)$ をリスクと定義している [1].

次に投資比率 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ でポートフォリオを構築 (分散投資) すると, その期待リターン $\hat{r}_{p,s}(t+s)$ は次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} \hat{r}_{p,s}(t+s) &= E_t[\mathbf{x}(t)\mathbf{r}_s(t+s)] \\ &= E_t\left[\sum_{i=1}^n x_i(t)r_{i,s}(t+s)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(t)E_t[r_{i,s}(t+s)] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(t)\hat{r}_{i,s}(t+s) \end{aligned} \quad (4)$$

なお $\hat{\mathbf{r}}_s(t+s) = [\hat{r}_{1,s}(t+s), \hat{r}_{2,s}(t+s), \dots, \hat{r}_{n,s}(t+s)]^t$ とすると, $\hat{r}_{p,s}(t+s) = \mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{r}}_s(t+s)$ と書ける.

またポートフォリオのリスク $\hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s)$ は以下のように書くことができる.

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s) &= \text{Var}_t [\mathbf{x}(t) \mathbf{r}_s(t+s)] \\
&= \text{E}_t \left[(\mathbf{x}(t) \mathbf{r}_s(t+s) - \mathbf{x}(t) \hat{\mathbf{r}}_s(t+s))^2 \right] \\
&= \text{E}_t \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i(t) r_{i,s}(t+s) - \sum_{i=1}^n x_i(t) \hat{r}_{i,s}(t+s) \right)^2 \right] \\
&= \text{E}_t \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i(t) r_{i,s}(t+s) - \sum_{i=1}^n x_i(t) \hat{r}_{i,s}(t+s) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j(t) r_{j,s}(t+s) - \sum_{j=1}^n x_j(t) \hat{r}_{j,s}(t+s) \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i(t) x_j(t) \hat{\sigma}_{ij}(t+s)
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで $\hat{\sigma}_{ii}(t+s)$ は共分散であり、以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s) &= \text{Cov}_t [r_{i,s}(t+s), r_{j,s}(t+s)] \\
&= \text{E}_t [(r_{i,s}(t+s) - \hat{r}_{i,s}(t+s)) (r_{j,s}(t+s) - \hat{r}_{j,s}(t+s))]
\end{aligned} \tag{6}$$

Cov_t は t 期までの情報に基づく条件付き期待値と条件付き分散を表す。つまり $\hat{\sigma}_{ii}(t+s)$ は、式 (3) と同一となることから i 銘柄の分散 $\hat{\sigma}_i^2(t+s)$ を表す。そして $\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s)$ を要素とする行列 $\hat{\mathbf{H}}_s(t+s)$ は $n \times n$ かつ対称行列である。これは共分散行列と呼ばれ、式 (5) は

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i(t) x_j(t) \hat{\sigma}_{ij}(t+s) \\
&= \mathbf{x}(t) \hat{\mathbf{H}}_s(t+s) \mathbf{x}^t(t)
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。

そして共分散と同様の性質を有する指標として、相関係数 $\hat{\rho}_{ij,s}(t+s)$ がある。

$$\hat{\rho}_{ij,s}(t+s) = \frac{\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s)}{\hat{\sigma}_{i,s}(t+s) \hat{\sigma}_{j,s}(t+s)} \tag{8}$$

これは各銘柄がどの程度連動するかを表す指標と考えることができ、もし完全に連動しているデータがあれば $\hat{\rho}_{ij,s}(t+s) = 1$ となり、完全に逆に連動しているデータでは $\hat{\rho}_{ij,s}(t+s) = -1$ となる。そして完全相関の場合、ポートフォリオのリスク $\hat{\sigma}_{p,s}(t+s)$ は

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{p,s}(t+s) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i(t) x_j(t) \hat{\sigma}_{i,s}(t+s) \hat{\sigma}_{j,s}(t+s)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t) \hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i(t) x_j(t) \hat{\sigma}_{i,s}(t+s) \hat{\sigma}_{j,s}(t+s)} \\
&= \sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^n x_i(t) \hat{\sigma}_{i,s}(t+s) \right\}^2} \\
&= \sum_{i=1}^n x_i(t) \hat{\sigma}_{i,s}(t+s)
\end{aligned}$$

となり、式 (4) の期待収益率と同様に、投資比率と各銘柄のリスクの加重平均の形をとる。しかし完全相関でなければ、 $\hat{\sigma}_{p,s}(t+s) < \sum_{i=1}^n x_i \hat{\sigma}_{i,s}(t+s)$ となり、リスクはより低下する。これがポートフォリオのリスク分散効果である。

3 従来のポートフォリオモデル

3.1 平均分散ポートフォリオモデル

Markowitz は期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ とリスクの計算で必要となる共分散 $\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s)$ を推定するために、過去の収益率変動の標本分布を将来の確率分布と見なして推定している [1]。よって期待収益率は標本平均、リスクは標本分散、標本共分散から推定されることになる。

$$\begin{aligned}\hat{r}_{i,s}(t+s) &= \bar{r}_{i,s}(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{a=1}^T r_{i,s}(t - (a-1)s)\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s) &= \bar{\sigma}_{i,s}^2(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{a=1}^T [r_{i,s}(t - (a-1)s) - \bar{r}_{i,s}(t)]^2\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s) &= \bar{\sigma}_{ij,s}(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{a=1}^T [r_{i,s}(t - (a-1)s) - \bar{r}_{i,s}(t)] \\ &\quad \cdot [r_{j,s}(t - (a-1)s) - \bar{r}_{j,s}(t)]\end{aligned}\quad (11)$$

ここで、 T は参照する過去のデータ長であり、式 (11) を要素とする標本共分散行列を $\bar{H}(t)$ とする。そして式 (4) および式 (6) に代入することで、ポートフォリオの期待収益率 $\hat{r}_{p,s}(t+s)$ およびリスク $\hat{\sigma}_{p,s}(t+s)$ を計算することができる。そしてこのように推定する方法は、平均分散ポートフォリオモデルと呼ばれている。

3.1.1 シャープレシオ

投資家がリスク回避的 [1] であるならば、リスクは小さく、期待収益率は大きいほど良いポートフォリオと判断する。本研究では一般的な指標であるシャープレシオ [4] を導入し、

$$N_{SR}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\hat{r}_{p,s}(t+s) - r_{f,s}(t+s)}{\hat{\sigma}_{p,s}(t+s)} \quad (12)$$

を最大にする投資比率 $\mathbf{x}^*(t)$ を採用する。つまり式 (12) は、1 リスクを取ったときに期待する超過収益率を最大化することを意味している。ここで $r_f(t+s)$ は、国債や銀行貯蓄に代表される、無リスク資産の収益率である。これらは予め将来に得られる金利が公開されているため、リスクは存在しない。シャープレシオは Tobin の分離定理 [21] をベースとして提案されたもので、無リスク資産を導入すると投資家のリスク選好度によらず、リスク資産の最適ポートフォリオを決定できる。

投資比率の最適化は、以下のように定式化することができる。

$$\begin{cases} \max. & N_{SR}(\mathbf{x}(t)) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^N x_i(t) = 1 \\ & x_i(t) \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

ここで第 2 式は予算制約であり、現時刻 t における資産 $M(t)$ を全て株式投資に活用することを表している。また第 3 式は買取引（ロングポジション）のみに限定する制約である。この制約条件の下で最適化されたシャープレシオを $N_{SR}(\mathbf{x}^{(+)}(t))$ とする。一方、将来の株価が低下すると予測された場合、空売りによって利益獲得に積極的に行動することができる。空売りは信用取引の一種であり、

自身が株式を所有していないときに証券会社から株式を借りて第三者に売却し、 s 日後に証券会社からその株式を買い戻すことでその差額を得る取引手法である。本取引を仮定して投資比率を最適化する場合、以下のように定式化される。

$$\begin{array}{ll} \max. & N_{SR} \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^N x_i(t) = -1 \\ & x_i(t) \leq 0 \end{array} \quad (14)$$

第3式は現資産 $M(t)$ と同額分を空売りすることを表す。このときに最適化されたシャープレシオを $N_{Sr}(\mathbf{x}^{(-)}(t))$ とする。そして $N_{SR}(\mathbf{x}^{(+)}(t)) \geq N_{Sr}(\mathbf{x}^{(-)}(t))$ であれば、ロングポジションのほうがより効率が高いということになるため、 $\mathbf{x}^{(+)}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*(t)$ とする。逆に $N_{SR}(\mathbf{x}^{(+)}(t)) < N_{Sr}(\mathbf{x}^{(-)}(t))$ の場合は $\mathbf{x}^{(-)}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*(t)$ とする。

3.1.2 勾配法

式 (11), (12) のように、目的関数が二次形式であり非負制約等がある最適化問題は「凸二次計画問題」と呼ばれる。本研究では反復法の一つである勾配法を用いる。そのアルゴリズムを以下に示す。

Step 1 初期点の設置

$k = 0$ とし、実行可能領域内で初期の投資比率を $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ とし、目的関数値 $N_{SR}(\mathbf{x}^{(k)}(t))$ を計算する。また $\nu = 0.1$ (10 [%]) とする。

Step 2 探索方向の決定

$\mathbf{x}^{(k)}(t)$ から微小変化させ、その上昇量が最も大きくなる方向 $\nabla N_{SR}(\mathbf{x}^{(k)})$ を算出する。なお式 (13) や式 (14) の等式制約式より、 $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ から投資比率を上昇させる銘柄 i と減少させる銘柄 j が存在する。そのため、 $\nabla N_{SR}(x_i^{(k)}) = 1, \nabla N_{SR}(x_j^{(k)}) = -1$ とし、それ以外のものは 0 とする。

Step 3 投資比率の更新

$\mathbf{x}^{(k+1)}$ を以下の式に従って算出する。

$$\mathbf{x}^{(k+1)}(t) = \mathbf{x}^{(k)}(t) + \nu \nabla N_{SR}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (15)$$

もし、 $N_{SR}(\mathbf{x}^{(k+1)}(t)) > N_{SR}(\mathbf{x}^{(k)}(t))$ ならば、 $k \leftarrow k + 1$ として **Step 2** へ戻る。違うならば **Step 4** へ進む。

Step 4 大域探索から局所探索へ

更新パラメータが $\nu \geq 0.01$ (1 [%]) であれば、 $\nu \leftarrow 0.1\nu$ として、**Step 2** へ戻る。 $\nu \leq 0.001$ (0.1 [%]) であれば、 $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ を最適な投資比率 $\mathbf{x}^*(t)$ として終了する。

3.2 リスク源泉分散ポートフォリオモデル

平均分散モデルには幾つかの問題が指摘されている。最も指摘される点は、将来の期待収益率およびリスクの推定が困難である点である。特に期待収益率については、予測値のわずかな変化で最適化された投資比率が大きく変わってしまうことが指摘されている。それに関連して、実際に投資する銘柄が非常に少なくなることも指摘されている。そこで近年では、リスクのみに焦点を当てて投資比率を最適化するリスクパリティポートフォリオ [51] が提案されている。このポートフォリオモデルは、ポートフォリオ全体のリスクに対する各銘柄のリスク寄与度を均一にするように構築する。ただし

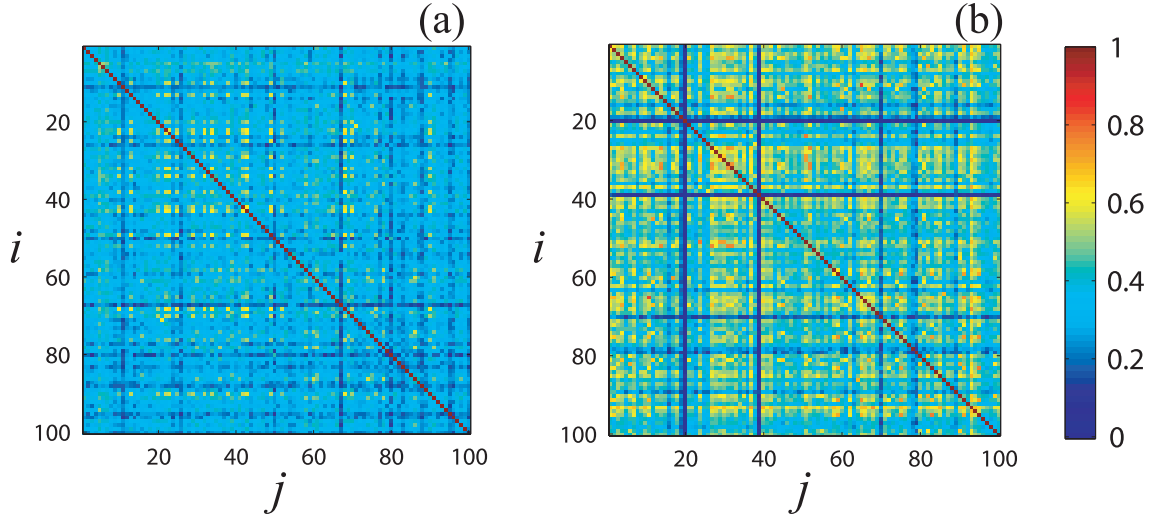


図 1: 2009 年から 2012 年までの 4 年間に於ける, 100 銘柄の日次収益率 $r_{i,1}(t)$ 間の相関行列:(a) 東京証券取引所, (b) ニューヨーク証券取引所.

各銘柄間に相関があると, 同じリスクの源泉を有しているため, 高いリスク分散効果を得られない可能性が指摘されている. 実際の市場では, 図 1 に示すように高い相関があることが知られている. そこで Meucci は, 主成分分析によって互いに無相関な主成分ポートフォリオを構築し, そこからリスクパリティポートフォリオを構築する方法を提案した [53].

まず主成分分析を用いると, 以下の式が導き出される.

$$\mathbf{G}(t)^t \bar{\mathbf{H}}_s(t) \mathbf{G}(t) = \text{diag}[\varsigma_1(t), \varsigma_2(t), \dots, \varsigma_n(t)] \quad (16)$$

$$\mathbf{G}(t) = [\mathbf{g}_1(t), \mathbf{g}_2(t), \dots, \mathbf{g}_n(t)] \quad (17)$$

ここで $\{\varsigma_i(t)\}$ は降順に並べた標本共分散行列 $\bar{\mathbf{H}}_s(t)$ の固有値, $\mathbf{g}_i(t)$ は固有値 $\varsigma_i(t)$ に対応する固有ベクトルを表す. この固有ベクトル $\mathbf{G}(t)$ により, n 個の互いに無相関な時系列データ $\dot{r}_{i,s}(t - (a-1)s)$ ($a = 1, 2, \dots, T$) が生成される.

$$\dot{r}_{i,s}(t - (a-1)s) = \mathbf{g}_i^t(t) \mathbf{r}_s(t - (a-1)s) \quad (18)$$

これらの時系列データは, 固有ベクトル $\mathbf{g}_i(t)$ を投資比率としてポートフォリオを構築していると見做せる. そのため $\dot{r}_{i,s}(t)$ は第 i 主成分ポートフォリオと呼ばれる. また式 (16) より, 第 i 主成分ポートフォリオの分散は $\varsigma_i(t)$ となる.

次に各主成分ポートフォリオからさらにポートフォリオを構築するとき, 主成分ポートフォリオに対する投資比率 $\dot{x}_i(t)$ は以下のように表される.

$$\dot{x}_i(t) = \mathbf{x}(t) \mathbf{g}_i(t) \quad (19)$$

さらに各主成分ポートフォリオは互いに無相関であるため, 以下の式が成り立つ.

$$\hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2(t) \lambda_i(t) \quad (20)$$

このとき, ポートフォリオの分散 $\hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s)$ に対する, 第 i 主成分ポートフォリオのリスク寄与度 $\partial_i(t)$ は以下のように定義される.

$$\partial_i(t) = \frac{\dot{x}_i^2(t) \varsigma_i}{\hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s)} \quad (21)$$

Meucci [53] はこの $\partial_i(t)$ から求められる分散インデックスを, エントロピーの指数関数により以下のように定義した.

$$N_{Ent}(t) = \exp \left(- \sum_{i=1}^n \partial_i(t) \ln \partial_i(t) \right) \quad (22)$$

もし, $N_{Ent}(t) = 1$ であれば株式ポートフォリオのリスクは 1 つの主成分ポートフォリオに集中していることを意味する. 一方, $N_{Ent}(t) = n$ (最大値) であれば, 株式ポートフォリオのリスクが n 個の主成分ポートフォリオに均一に分散されていることを意味する. つまりこのポートフォリオモデルに対する投資比率の最適化は, 一般的に以下の様になる.

$$\left| \begin{array}{ll} \max. & N_{Ent}(t) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^N x_i(t) = 1 \\ & x_i(t) \geq 0 \end{array} \right. \quad (23)$$

そのため期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ の情報を用いずに投資比率の最適化を行っている. なお, 3.1.2 章の勾配法を用いて投資比率を最適化できる. このようなポートフォリオモデルを, 本研究では「リスク源泉分散ポートフォリオモデル」と呼ぶ.

4 期待収益率の推定に対する時系列予測モデルの適用

前章までに示したように、従来のポートフォリオモデルは理論構築や期待収益率の推定の困難さから、高次予測モデルの導入を諦めている。しかし本研究では、より高次な時系列予測モデルを適用し、推定精度の向上を狙う。

前章の平均分散ポートフォリオモデルは式 (15) の期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ の推定において、時間の進行とともに標本データも変化することから、単純移動平均 (SMA) 予測とみなすことができる。確かに、価格変動のトレンドが安定している場合には本予測法も有効であろう。また、同一のポートフォリオを長期間保持することで短期的なアノマリーは相殺され、収益率は単純移動平均値に近づく。しかし、実際の市場の振舞いは複雑であり、同一のトレンドが長期間維持し続けることは稀である。したがって、トレンドの転換に柔軟に対応するには、短期的に期待収益率 $\hat{r}_{p,s}(t+s)$ やリスク $\hat{\sigma}_{p,s}(t+s)$ を再計算し、ポートフォリオを修正する必要がある。そこで本研究では、SMA 予測よりも緻密な時系列予測モデルを利用する。

4.1 予測モデルの評価

本研究では、各銘柄に対する予測精度として、相関係数 ξ_i を用いる。

$$\xi_i = \frac{\sum_t (r(t) - \langle r \rangle) (\hat{r}(t) - \langle \hat{r} \rangle)}{\sqrt{\sum_t (r(t) - \langle r \rangle)^2} \sqrt{\sum_t (\hat{r}(t) - \langle \hat{r} \rangle)^2}} \quad (24)$$

ここで $r(t)$ は真値、 $\hat{r}(t)$ は予測値、 $\langle \cdot \rangle$ は平均値を表す。この評価関数は式 (8) と同様で、同じ波形になるほど予測ができていると判断できるため、1 に近いほど予測ができることを表す。

さらに予測モデルの有用性を比較するため、Wilcoxon の符号付順位和検定 [78] を用いる。まず「予測モデル X の予測精度は、予測モデル Y の予測精度と差がない」という帰無仮説を立てる。次に各予測法の銘柄 i に対する予測精度 $\xi_{i,X}, \xi_{i,Y}$ の差 $\Delta_i = \xi_{i,X} - \xi_{i,Y}$ を算出する。また、その絶対値 $|\Delta_i|$ の小さいほうから順位を付ける。次に、 $\Delta_i > 0$ の組の順位和と $\Delta_i < 0$ の順位和のうち、小さいほうを R として、標準正規分布に従う検定統計量 $Z_{X,Y}$ を次式によって算出する。

$$Z_{X,Y} = \frac{\left| R - \frac{n(n+1)}{4} \right|}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \quad (25)$$

もし $Z_{X,Y} \geq 1.645$ であれば有意水準 95% で「予測モデル X の予測精度は、予測モデル Y の予測精度より高い」ということになる。

4.2 交差確認法

予測モデルのパラメータ、例えば前章の平均分散ポートフォリオモデル (式 (9)) の次数 T の決定には、過学習による汎化能力の低下を防ぐために交差確認法 [79, 80] を適用する。

まず学習データ全体をパート A とパート B に分割し、一方のパートを学習データとして他方のパートを予測する。そして式 (70) によってモデルの尤度 $\xi_{i,A}$ と $\xi_{i,B}$ を得る。ここで予測されたパートは係数推定に用いられていないので、汎用性のある尤度を求めることができる。最終的には、予測モデルの尤度を $\eta_i = (\xi_{i,A} + \xi_{i,B})/2$ とし、これを最大化するモデルパラメータを用いる。

4.3 線形予測モデル

例えば、過去と将来の収益率の関係を超平面によって近似すれば、自己回帰 (AR) 予測モデルになる。この予測モデルを適用すれば、

$$\hat{r}_{i,s}(t+s) = \alpha_0 + \sum_{a=1}^{T_i} \alpha_a r_{i,s}(t - (a-1)s) \quad (26)$$

によって式 (15) の期待収益率を計算できる。

モデル係数 $\alpha_a (a = 0, 1, \dots, T_i)$ の推定には、過去 L_s 期の収益率変動を学習データとして、最小二乗法を適用する。ここで

$$\mathbf{r}_{i,s}(t-as) = [r_{i,s}(t-as), r_{i,s}(t-(a+1)s), \dots, r_{i,s}(t-(a+(T_i-1))s)] \quad (27)$$

とし、

$$\mathbf{Y} = [r_{i,s}(t), r_{i,s}(t-s), \dots, r_{i,s}(t-L_s+s)]^t \quad (28)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{r}_{i,s}(t-s) \\ 1 & \mathbf{r}_{i,s}(t-2s) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{r}_{i,s}(t-L_s) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{F} = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{T_i}]^t \quad (30)$$

と書くと、 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{F}$ の近似誤差を最小にする係数 \mathbf{F} は

$$\hat{\mathbf{F}} = [\mathbf{X}^t \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y} \quad (31)$$

によって推定できる。ここで利用する株価データ数を L とすると、 $L_s = (\lfloor (L-1)/s \rfloor - T_i) \cdot s$ となる。なお $\lfloor \cdot \rfloor$ は小数点以下切り捨てを表す。このパラメータ推定法は、過去の真値 $r_{i,s}(t-as)$ とその推定値 $\hat{r}_{i,s}(t-as)$ の誤差

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,s}(t-as) &= r_{i,s}(t-as) - \hat{r}_{i,s}(t-as) \\ &= r_{i,s}(t-as) - \left(\alpha_0 + \sum_{a=1}^{T_i} \alpha_a r_{i,s}(t-(a-1)s) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

について、その標本平均を 0 かつ標本分散を最小化するようにパラメータを推定する。そしてこの $\hat{\mathbf{F}}$ を式 (26) で利用する。

このように AR 予測モデルは 1 つの回帰超平面を有するので、線形予測モデルとして分類される。一方、SMA 予測は、式 (26) の切片 α_0 を 0、傾き α_a を全て $1/T$ に制約した AR 予測モデルと見なせる。

4.4 非線形予測モデル

次に、より一般化した予測モデルを導入すべく、回帰超平面を曲面に変えられる非線形予測モデルを考える。

4.4.1 埋込み定理

その前処理として、学習データ $r_{i,s}(t)$ に対して埋め込み定理 [81,82] を適用し、多次元状態ベクトル $\mathbf{v}_i(t)$ を構成する.

$$\mathbf{v}_{i,s}(t) = [r_{i,s}(t), r_{i,s}(t - s\tau_i), \dots, r_{i,s}(t - (d_i - 1)s\tau_i)] \quad (33)$$

ここで、 τ_i は遅れ時間、 d_i は埋め込み次元を表す. また $d_i = T_i$ および $\tau_i = 1$ と書き換えれば、 $\mathbf{v}_{i,s}(t) = \mathbf{r}_{i,s}(t)$ となり、式 (27) は

$$\hat{\mathbf{r}}_{i,s}(t+s) = [1 \ \mathbf{v}_{i,s}(t)] \cdot \mathbf{F} \quad (34)$$

と書ける.

4.4.2 局所線形近似法をベースとした加重 AR モデル

本研究では、局所線形近似法 [56,57] をベースとした加重 AR モデルを提案する. まず、予測対象点 $\mathbf{v}_{i,s}(t)$ と各学習データ $\mathbf{v}_{i,s}(t - as)$ 間のユークリッド距離 $l_i(t, as)$ を算出する.

$$l_{i,s}(t, as) = |\mathbf{v}_{i,s}(t) - \mathbf{v}_{i,s}(t - as)| \quad (35)$$

これに基づいて、重み係数を

$$w_{i,s}(t, as) = \exp(-bl_{i,s}(t, as)) \quad (36)$$

とし、これらを対角成分に収めた対称行列を

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{i,s}(t, s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{i,s}(t, 2s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & w_{i,s}(t, L_{s\tau}) \end{bmatrix} \quad (37)$$

と書くと、 $\mathbf{WY} = \mathbf{WXF}$ の近似誤差を最小にするモデル係数 \mathbf{F} は

$$\hat{\mathbf{F}} = [\mathbf{X}^t \mathbf{W}^t \mathbf{W} \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W}^t \mathbf{W} \mathbf{Y} \quad (38)$$

によって推定される. ここで、

$$\mathbf{Y} = [r_{i,s}(t), r_{i,s}(t - s\tau_i), \dots, r_{i,s}(t - L_{s\tau_i} + s)]^t \quad (39)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{r}_{i,s}(t - s) \\ 1 & \mathbf{r}_{i,s}(t - 2s) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{r}_{i,s}(t - L_{s\tau}) \end{bmatrix} \quad (40)$$

である. なお、 $L_{s\tau} = (\lfloor (L-1)/s \rfloor - d_i\tau_i) \cdot s$ である. このような局所線形近似法 [56-60] をベースとして、自己回帰予測モデルを非線形モデルに拡張したものを、本研究では非線形自己回帰 (NAR) 予測モデルと呼ぶ. なお重み付けの方法については文献 [59,60] にならい、 $b = 1$ とした. なお $d_i = T_i$, $\tau_i = 1$, $b = 0$ として重み係数 $w_i(t, a)$ を全て 1 にすれば、NAR 予測モデル (式 (38)) は AR 予測モデル (式 (31)) と等価になる. さらに係数 $\alpha_0 = 0$, $\alpha_a = 1/T$ にすれば SMA 予測に帰着する. つまり NAR 予測モデルは、AR 予測モデルと SMA 予測を内包するように一般化した予測モデルである.

5 平均分散モデルの書換え

前章の時系列予測モデルをポートフォリオ理論に用いるには、従来の平均分散ポートフォリオモデルの式 (9)～(11) を書換える必要がある。そこで、これらの原形である式 (2), (3), (6) に戻って再考する。

式 (2) によれば、期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ は将来の確率分布において最も出現確率の高い値となるため、各予測モデルから得られた予測値を割り当てれば良い。従来の式 (9) を SMA 予測と捉えれば、この考え方は従来と変わっていない。この予測値を式 (4) に代入すれば、ポートフォリオの期待収益率 $\hat{r}_{p,s}(t+s)$ を推定できる。

さらに式 (3) のポートフォリオ理論におけるリスクの原義では、分散をリスクと定義している。これはつまり、リスク $\hat{\sigma}_{i,s}(t+s)$ とは予測誤差の期待値を意味している。そこで、従来の平均分散ポートフォリオモデルと同様に、将来の予測誤差は未知なので、過去の経験的な標本分布に基づいて推定することにする。つまり、過去の予測誤差 $e_i(t') = r_i(t') - \hat{r}_i(t')(t' \leq t)$ を記録しておく、

$$\hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s) = \frac{1}{T} \sum_{a=1}^T e_i^2(t - (a-1)s) \quad (41)$$

に代入することでリスク $\hat{\sigma}_i^2(t+1)$ を推定する。なお従来の平均分散ポートフォリオモデルでは、式 (3) から式 (10) の変形において標本分散で代用している。つまり予測値 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ を $\bar{r}_{i,s}(t)$ としているため、厳密にはポートフォリオ理論の原義である予測誤差から推定していないことが分かる。次に、式 (6) の共分散についても同様に、

$$\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s) = \frac{1}{T} \sum_{a=1}^T e_{i,s}(t - (a-1)s) e_{j,s}(t - (a-1)s) \quad (42)$$

とする。また、式 (7) の共分散行列 $\hat{H}_s(t+s)$ も以下のように推定できる。

$$\hat{H}_s(t+s) = \frac{1}{T} \sum_{a=1}^T \mathbf{e}_s^t(t - (a-1)s) \mathbf{e}_s(t - (a-1)s) \quad (43)$$

ここで $\mathbf{e}(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]$ である。これを式 (5) に代入すれば、ポートフォリオのリスク $\hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s)$ を推定できる。

しかし実際の使用では、式 (41)～式 (43) の標本数 T について工夫が必要である。前章で述べた時系列予測モデルの観点では、この T はモデルの複雑さに相当し、 T が大きいほど過学習を引き起こす。しかし 4.2 章で説明した交差確認法や、赤池情報量基準 [83] に従うと、 T は小さい値になる場合がある。そして平均分散ポートフォリオの式 (9)～(11) のように次数を統一する場合、予測誤差のデータ長 T が短くなるため、ある 2 銘柄が偶然に逆相関になる可能性が高まる。式 (5) は、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i(t) x_j(t) \hat{\sigma}_{ij,s}(t+s) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \hat{\sigma}_{i,s}(t+s) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i(t) x_j(t) \hat{\sigma}_{ij,s}(t+s) \end{aligned}$$

であり、式 (8) は、

$$\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s) = \hat{\rho}_{ij,s}(t+s) \hat{\sigma}_{i,s}(t+s) \hat{\sigma}_{j,s}(t+s) \quad (44)$$

であるため、

$$\hat{\sigma}_{p,s}^2(t+s) = \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \hat{\sigma}_{i,s}(t+s) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i(t) x_j(t) \hat{\rho}_{ij,s}(t+s) \hat{\sigma}_{i,s}(t+s) \hat{\sigma}_{j,s}(t+s) \quad (45)$$

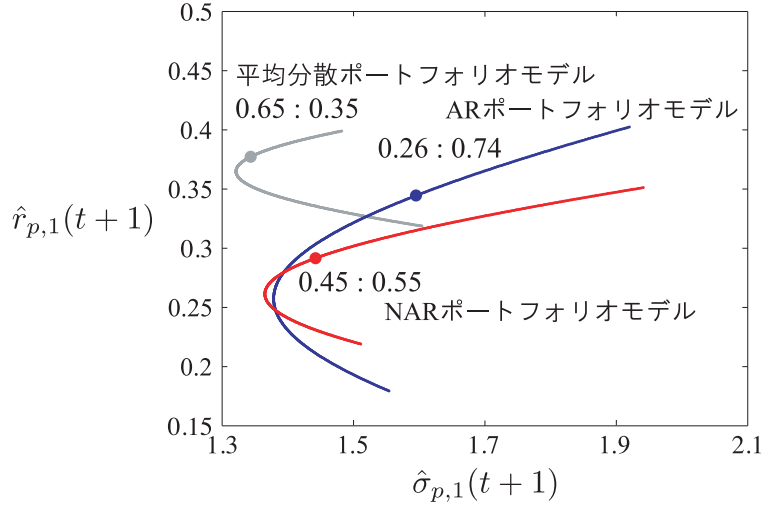


図 2: 式 (13) の制約下で投資比率を変化させた, 各ポートフォリオモデルの期待収益率およびリスク: 日本水産 (株) と帝国石油 (株) の場合, 各曲線状の丸印で式 (12) のシャープレシオ $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ が最大となり, そのときの投資比率 $x_1^*(t) : x_2^*(t)$ を図中に示す.

となる. ここで各標準偏差 $\hat{\sigma}_{i,s}(t+s)$ および $\hat{\sigma}_{j,s}(t+s)$ は非負であるため, 相関係数 $\hat{\rho}_{ij,s}(t+s)$ によって共分散の符号が決定される. さらにある 2 銘柄 ($i = 1, 2$) の相関係数 $\hat{\rho}_{12,s}(t+s)$ (式 (8)) が完全逆相関であると想定すると, $\hat{\sigma}_{12,s}(t+s) = -\hat{\sigma}_{1,s}(t+s)\hat{\sigma}_{2,s}(t+s)$ となる. このとき, $x_1(t)$ と $x_2(t)$ 以外の組合せ比率を 0 にすれば,

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_p &= \sqrt{x_1^2 \hat{\sigma}_{1,s}^2(t+s) + x_2^2 \hat{\sigma}_{2,s}^2(t+s) + 2x_1(t)x_2(t)\hat{\sigma}_{12,s}(t+s)} \\
 &= \sqrt{x_1^2(t)\hat{\sigma}_{1,s}^2(t+s) + x_2^2\hat{\sigma}_{2,s}^2(t+s) - 2x_1(t)x_2(t)\hat{\sigma}_{1,s}(t+s)\hat{\sigma}_{2,s}(t+s)} \\
 &= \sqrt{(x_1(t)\hat{\sigma}_{1,s}(t) - x_2(t)\hat{\sigma}_{2,s}(t+s))^2} \\
 &= |x_1(t)\hat{\sigma}_{1,s}(t+s) - x_2(t)\hat{\sigma}_{2,s}(t+s)|
 \end{aligned} \tag{46}$$

となる. そのため, $x_1(t) : x_2(t) = \hat{\sigma}_{2,s}(t+s) : \hat{\sigma}_{1,s}(t+s)$ かつ $x_{i \notin \{1,2\}}(t) = 0$ のポートフォリオを構築すれば, $\hat{\sigma}_p = 0$ となるため, 式 (12) のシャープレシオ $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ は発散する. つまり, 2 銘柄の予測誤差が偶然に逆相関になれば, $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ を最大化する投資比率はそれぞれの標準偏差 $\hat{\sigma}_{1,s}(t+s)$ と $\hat{\sigma}_{2,s}(t+s)$ のみによって決まる. しかしこの場合, 期待収益率 $\hat{r}_s(t+s)$ は一切考慮されていないポートフォリオになってしまう. このようなポートフォリオが構築される危険性は, 式 (41)~(43) 中の T が小さいほど大きくなる. そこで以後の計算機実験では, $\max\{N_{SR}(\mathbf{x}(t))\}$ が有限値に収束するように $T = 240/s$ (過去 1 年分) に調整した.

このようにリスクを推定するには経験的な予測誤差が得られれば良いので, 前章で述べた予測モデルに限らず, いかなる予測モデルに対しても適用可能である. なお本研究では, 期待収益率の推定に AR 予測を用いたポートフォリオを「AR ポートフォリオモデル」, NAR 予測を用いたポートフォリオを「NAR ポートフォリオモデル」と呼ぶ.

図 2 に, 実データ 2 銘柄を用いて算出したポートフォリオの例を示す. リスクの推定については, AR ポートフォリオモデルおよび NAR ポートフォリオモデルは式 (43), 移動平均予測では式 (11) を用いている. 予測モデルを変えれば期待収益率とリスクは変化するので, 式 (12) のシャープレシオ $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ を最大化する投資比率 $\mathbf{x}^*(t)$ も変化する. そのため, 予測モデルは投資戦略に関わる重要な要素である.

表 1: 期間 I および期間 II の全 200 銘柄に対する, 各予測法の予測精度 $\{\xi_i\}$. $\bar{\xi}$ は平均値, 太字の数値は, 各項目の最良値を示す.

	期間 I			期間 II		
	SMA 予測	AR 予測	NAR 予測	SMA 予測	AR 予測	NAR 予測
$\bar{\xi}$	-0.033	0.051	0.053	-0.052	0.016	0.038
$\max\{\xi_i\}$	0.030	0.224	0.225	0.040	0.255	0.280
$\min\{\xi_i\}$	-0.089	-0.090	-0.093	-0.208	-0.144	-0.103

6 完全市場下における日次投資シミュレーション

4 章で述べた時系列予測モデルの活用, および 5 章で書換えたりスクの推定法の効果を検証すべく, 東京証券取引所一部上場企業 200 銘柄の 2 期間のデータを用いてシミュレーションを行う. 具体的には,

- I) 1995 年 4 月 1 日から 2000 年 3 月 31 日までの 5 年間を初期の学習データとし, 2000 年 4 月 1 日から 2005 年 3 月 31 日までの 5 年間を評価データ [84]
- II) 2005 年 1 月 3 日から 2009 年 12 月 30 日までの 5 年間を初期の学習データとし, 2010 年 1 月 3 日から 2012 年 12 月 30 日までの 3 年間を評価データ [85]

とした.

なお本章のシミュレーションでは, 完全市場下における投資シミュレーションを行う. 完全市場とは

- 供給者と需要者の数が極めて多い
- 個々の市場参加者が市場に対して与える力は小さいため, 価格支配力はなく, 市場価格を所与のものとする
- 税金や手数料は無い
- 1 株未満も取引できる
- 市場参入および退出は自由である

などの条件を備えた市場をいう [27].

また想定した取引は, すべて約定できると仮定した.

6.1 予測モデルの有用性

まず, 4 章で述べた時系列予測モデルを活用することで, どの程度収益率を予測できるかについて, 検証を行う. なお学習データは, どちらの期間においても 5 年間であるため, $L = 1225$ とした.

まず表 1 に各期間の銘柄を予測した結果をまとめる. 予測精度の平均値 $\bar{\xi}$ を比較すると, SMA 予測が最も悪く, AR 予測と NAR 予測には大差がない. たとえ高次の NAR 予測を用いたとしても予測精度 $\bar{\xi}$ はわずかに正である. しかし一方では, 経済データは予測不可能なランダム現象だとすら考える先行研究 [16–18] もあるため, わずかでも正の予測精度を実現したことは有意義なのかもしれない. そこで実際の投資に対する有用性については, 後節で検証する.

次に予測精度について詳細に検証すべく、Wilcoxon の符号順位和検定を行った。まず SMA 予測に対する AR, NAR 予測の検定統計量 Z 値は、それぞれ $Z_{AR,SMA} = 9.504$, $Z_{NAR,SMA} = 9.170$ となった。次に NAR 予測が AR 予測より優位であるかを検定したところ、 $Z_{NAR,AR} = 0.215$ であった。これらの結果より、信頼区間 95% における棄却域は $Z < 1.645$ であるため、この期間において、NAR 予測は AR 予測と比較して優位性を確認できなかった。しかし SMA 予測と比較すれば、AR 予測や NAR 予測の優位性は明らかである。

期間 II では期間 I の場合と比較して、どの予測法においても予測精度の平均値 $\bar{\xi}$ は若干低下している。しかし Wilcoxon の符号順位和検定の結果は、 $Z_{AR,SMA} = 6.606$, $Z_{NAR,SMA} = 8.879$ であり、SMA 予測との優位性は明白である。さらに、AR 予測に対する NAR 予測の検定結果は $Z_{NAR,AR} = 5.388$ であり、この期間における NAR 予測の優位性を確認することができた。

6.2 投資銘柄の厳選

ポートフォリオを構築する際、予測精度 ξ_i が高い銘柄を選ぶのが得策と考えられるが、投資時において $\{\xi_i\}$ は未知である。しかし、もし予測モデルの尤度 $\{\eta_i\}$ と予測精度 $\{\xi_i\}$ に相関関係が存在すれば、既知情報である η_i によってある程度 ξ_i を推測することができる。

この可能性を検証すべく、図 3 に期間 I、図 4 に期間 II の各予測モデルの尤度 $\{\eta_i\}$ と予測精度 $\{\xi_i\}$ の相関図を示す。全ての予測モデルでそれぞれに正の相関が確認できるが、特に AR, NAR 予測モデルには高い相関関係を有することを確認できる。そのため多銘柄ポートフォリオを構築するには、尤度が高い銘柄を優先して組込むことにする。

6.3 投資シミュレーション

6.3.1 投資行動

以下に、1 日の投資行動の手順を述べる。

手順 1 学習データの読み込み

ポートフォリオに用いる n 種の銘柄について、本日から過去 L 日までの株価データを計算機に読み込み、各銘柄の s 日次収益率を算出する。なお、式 (1) の取引価格 $y_i(t)$ には始値を用いる。

手順 2 時系列予測モデルの活用

銘柄毎に、 s 日後の期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ を予測する。さらに、式 (11) または式 (42) に基づいて、共分散行列 $\hat{H}_s(t+s)$ を算出する。

手順 3 投資比率 $\mathbf{x}(t)$ の最適化

最適な投資比率 $\mathbf{x}^*(t)$ を決定すべく、式 (12) のシャープレシオ $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ を最大化する。なお源泉分散ポートフォリオモデルでは、式 (22) の分散インデックス $N_{Ent}(\mathbf{x}(t))$ を最大化する。ただし、ロングポジションのみ ($x \geq 0$) の制約下で本関数を最大化する投資比率 $\mathbf{x}^*(t)$ と、ショートポジションのみに変化した投資比率 $-\mathbf{x}^*(t)$ はどちらも分散インデックス $N_{Ent}(\mathbf{x}(t))$ は同じ関数値をとる。そのため本研究では、期待収益率 $\hat{r}_{p,s}(t+s)$ がより大きくなるポジションをとることにする。

手順 4 売買の注文 (仕掛け)

手順 4 で最適化した投資比率で売買の注文を行う。当日の始値で指値注文を出し、現資産 $M(t)$ を投資資金とする。指値注文は、始値が決定した直後に行うため、シミュレーションでは毎回約定できると仮定した。

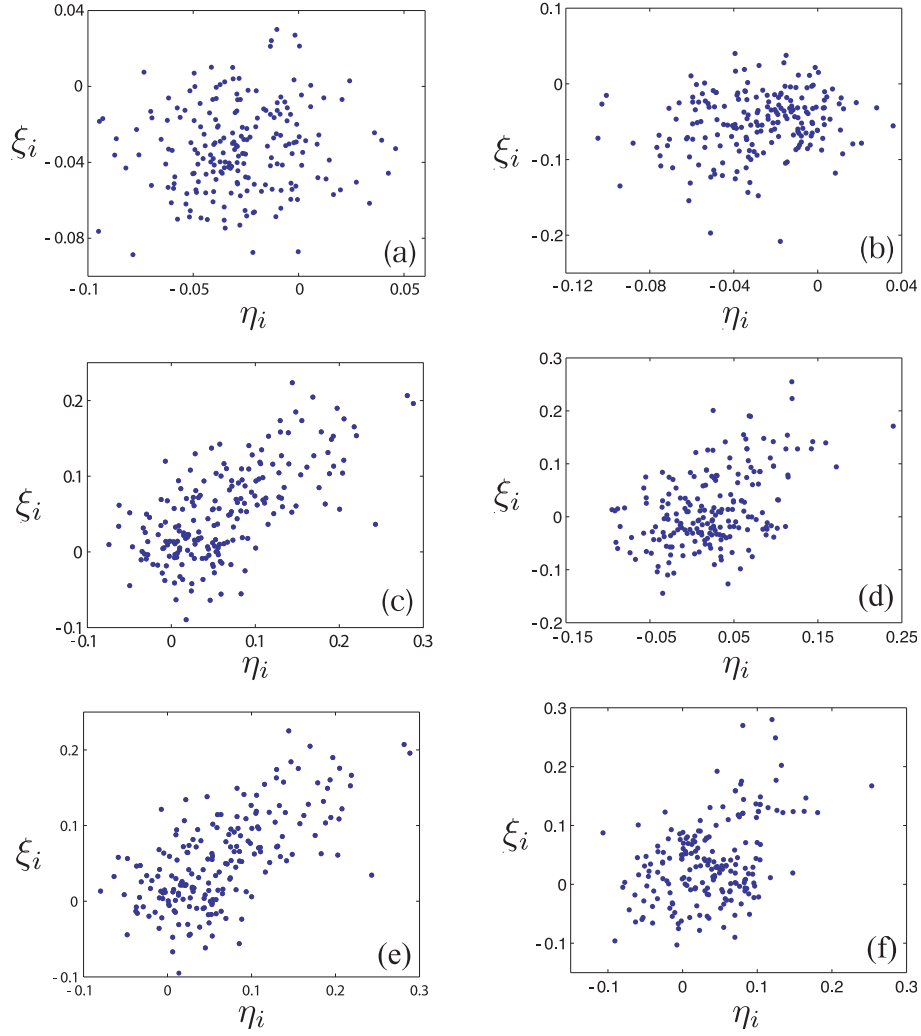


図 3: 予測モデルの尤度 $\{\eta_i\}$ と予測精度 $\{\xi_i\}$ の相関図:(a),(b)SMA 予測, (c),(d)AR 予測, (e),(f)NAR 予測の場合. なお (a),(c),(d) は期間 I, (b),(d),(f) は期間 II の結果. それぞれの相関係数は (a)0.120,(b)0.188,(c)0.661,(d)0.474,(e)0.660,(f)0.419 である.

手順 5 利益の確定 (手仕舞い)

翌営業日の取引市場が開始する際に, 成行注文で手順 5 の反対売買を行い, s 営業日後の始値で全ポジションを手仕舞う. もし期待収益率の正しく推定できていれば, $\hat{r}_{p,s}(t+s)$ に応じた収益を得ることができる. さらに投資を続ける場合は, 手順 1 に戻る.

6.3.2 投資成績の評価

本研究では投資成績の定量的評価として5つの指標を用いる。まず資産増幅率 λ_A は以下のように算出される。

$$\begin{aligned}\lambda_A &= \frac{M(\text{end})}{M(0)} \\ &= \prod_{t'=1}^t \{1 + r_{p,s}(t's)\} \\ &= \prod_{t'=1}^t \{1 + \mathbf{x}(t's) \mathbf{r}_s(t's)\}\end{aligned}\quad (47)$$

ここで $M(\text{end})$ は最終資産、 $M(0)$ は初期資産を表す。 $\lambda_A > 1$ であるほど、投資戦略として有用である。一方、 $\lambda_A < 1$ であれば損失となるが、このような場合は元本割れと呼ばれる。

2つ目は導入するのは、勝率 λ_W [%] である。

$$\lambda_W = \frac{\sum_{t'=1}^t f_H(r_{p,s}(t's))}{t} \times 100 \quad (48)$$

$$f_H(\alpha) = \begin{cases} 1 & (\alpha > 0) \\ 0.5 & (\alpha = 0) \\ 0 & (\alpha < 0) \end{cases} \quad (49)$$

本指標が高いことは、利益を得る機会が高いことを表す。

3つ目はリスクリワードレシオ λ_R を導入する。

$$\lambda_R = \frac{|\{r_{p,s}(t+s)|r_{p,s}(t+s) > 0\}|}{|\{r_{p,s}(t+s)|r_{p,s}(t+s) < 0\}|} \quad (50)$$

これは1回の取引で生じる平均的な損失と比較して、得られる利益がどの程度高いかを表す指標である。つまり $\lambda_R > 1$ であるほど良いことを表す。

そして第4の指標として導入するプロフィットファクター λ_P は以下のように定義される。

$$\lambda_P = \frac{\sum_{t'=1}^t |\{\Delta M(t')|\Delta M(t') > 0\}|}{\sum_{t'=1}^t |\{\Delta M(t')|\Delta M(t') < 0\}|} \quad (51)$$

ここで $\Delta M(t) = M(t) - M(t-1)$ である。つまり $\lambda_P > 1$ であるほど利益が得られることを表している。またこの指標は以下のような関係がある。

$$\lambda_P = \frac{\lambda_W}{100 - \lambda_W} \lambda_R \quad (52)$$

したがって、勝率 λ_W とリスクリワードレシオ λ_R を統合した指標である。

最後に最大ドローダウン率 λ_D [%] を導入する。

$$\lambda_D = \max_{1 \leq t' \leq t} \{r_d(t')\} \quad (53)$$

$$r_d(t) = 100 \left(1 - \frac{M(t)}{\max_{1 \leq t' \leq t} \{M(t')\}} \right) \quad (54)$$

ドローダウン率 $r_d(t)$ はある時期に所有していた資産がどの程度失われたかを表しており、 λ_D はその中の最大値を表す。つまり投資戦略の危険性を表す指標であり、この値が小さいほど安全に運用できることを表している。

さらにポートフォリオ効果を検証すべく、尤度が高いほうから n 番目の銘柄に単銘柄投資を行った結果の平均値および中央値も同時に示す。この投資戦略では、期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ が正なら現資産 $M(t)$ 分の株式を購入し、負なら所持金と同額分を空売りした。そして時刻が $t+s$ になったときに、反対売買で決済する。また Malkiel [18] はポートフォリオの組み替えをしても、購入後は投資期間が終わるまで所持し続けるバイアンドホールド戦略と同等以下の結果しか得られないとしている。そこでバイアンドホールド戦略の結果の平均値および中央値も対立戦略として示す。なおこれらの投資戦略において中央値も同時に示す理由は、資産増幅率 λ_A が投資比率 $x_i^*(t) = \pm 1/n$ としてポートフォリオを構築した戦略と見なすことができってしまうためである。

最後に投資行動をする以上、無リスク資産に投資する以上の利益を獲得することを目標としなくてはならない。そのため、無リスク資産 [86] に投資した場合の結果も示す。まず期間 I では $\lambda_A = 1.0007$ (年利約 0.01 [%])、期間 II においては $\lambda_A = 1.0025$ (年利約 0.08 [%]) であった。期間 I の利益が低いのは、2001 年～2006 年までのゼロ金利政策が影響している。なお無リスク資産への投資は $\lambda_D = 0$ [%] であり、また $\lambda_W = 100$ [%], $\lambda_R = \infty$, $\lambda_P = \infty$ となるため、資産増幅率 λ_A 以外の結果は省略する。

6.3.3 シミュレーション結果

期間 I の投資シミュレーションの結果を図 4～7 に示す。まず図 4 の平均分散ポートフォリオモデルおよび源泉分散ポートフォリオモデルの結果を検証する。SMA 予測の尤度 η_i によって厳選した銘柄にバイアンドホールド戦略を適用すると、投資期間の株価が下降トレンドを有する銘柄を優先的に選択していることが分かる。これは勝率 λ_W が低いことや、最大ドロウダウン率 λ_D が大きいことから判断できる。そして単銘柄投資の結果を見ると、 $\lambda_W < 50$ [%], $\lambda_R < 1$ であり、 λ_D も高いことから、市場の動向に対し予測モデルが不適合であると分かる。一方、ポートフォリオを構築した場合、バイアンドホールド戦略や単銘柄投資と比較して最大ドロウダウン率 λ_D を低下させることに成功している。そのためポートフォリオを構築するメリットを確認することはできる。しかし資産増幅率 λ_A の結果を見ると、源泉分散ポートフォリオモデルでは 2 倍近くに増幅できる場合もあるが、その多くは 1 倍以下 (元本割れ) となっている。そして無リスク資産への投資やバイアンドホールド戦略のほうが $\lambda_A > 1$ であることから、これらのポートフォリオモデルの有用性は低い。

次に図 5 の AR 予測モデル、図 6 の NAR 予測モデルを用いた結果を検証する。双方とも単銘柄投資の勝率 $\lambda_W > 50$ [%] かつ $\lambda_R > 1$ を実現している。またバイアンドホールド戦略よりも資産増幅率 λ_A やプロフィットファクター λ_P が高く、最大ドロウダウン率 λ_D も低下している。そのため、表 1 の予測精度 $\bar{\xi}$ がたとえ 0 付近であっても、収益率を予測する意義が確認できる。

さらにポートフォリオを構築すると、全ての指標が大きく向上している。図 7 に各ポートフォリオの結果をまとめるが、特に NAR ポートフォリオモデルは最良な結果が得られている。最大ドロウダウン率 λ_D [%] は同程度でありつつ、プロフィットファクター λ_P は高い値を維持している。特に資産増幅率 λ_A は、最大で 208 倍 (年利約 191 [%]) を実現した。

では次に期間 II の投資シミュレーションの結果を図 8～11 を示す。こちらでも図 8 を見ると同様に、従来のポートフォリオモデルの優位性は確認することはできない。そして図 9,10 の AR ポートフォリオモデルおよび NAR ポートフォリオモデルの結果を見ると、期間 I の場合と比較して全ての指標が若干低下している。特に NAR ポートフォリオモデルでは、3 年間の投資期間で初期資産を最大約 5.5 倍 (年利約 77 [%]) まで増やすことができているが、期間 I の年利 191 [%] と比較して低下してしまっている。これは表 1 に示すように予測精度の低下が直接的な原因と考えられる。しかし図 11 で示すように、これらのポートフォリオモデルの有用性は明白である。特に NAR ポートフォリオモデルは、銘柄数 n が少ないとき ($n \leq 70$) は全ての指標において最良である。銘柄数が上昇すると、資産増幅率 λ_A やプロフィットファクター λ_P は AR ポートフォリオモデルと比較して悪化している。

しかし最大ドローダウン率 λ_D [%] では 2/3 程度と、最良の結果が得られている。つまりこの期間においては、利益以上に損失を抑えることに重視して資産運用をしたといえる。

またこれらの期間における各ポートフォリオモデルの結果を見ると、上に凸のピークが存在している。しかし銘柄数 n を増加させすぎると、全体の予測精度は低下する。したがって銘柄数 n には、リスク分散効果の向上と予測精度の低下におけるトレードオフが存在することになる。これは尤度が高い多銘柄を同時にポートフォリオに導入することで高い予測精度を保ちつつ、かつリスク分散効果を十分に発揮できたことを示している。

最後に各期間の無リスク資産への投資およびバイアンドホールド戦略と比較して、従来のポートフォリオモデルの有用性は確認できなかった。だが提案するポートフォリオモデルでは、これらの戦略を超える資産増幅率を実現したため、アクティブ運用の有用性を確認することができた。

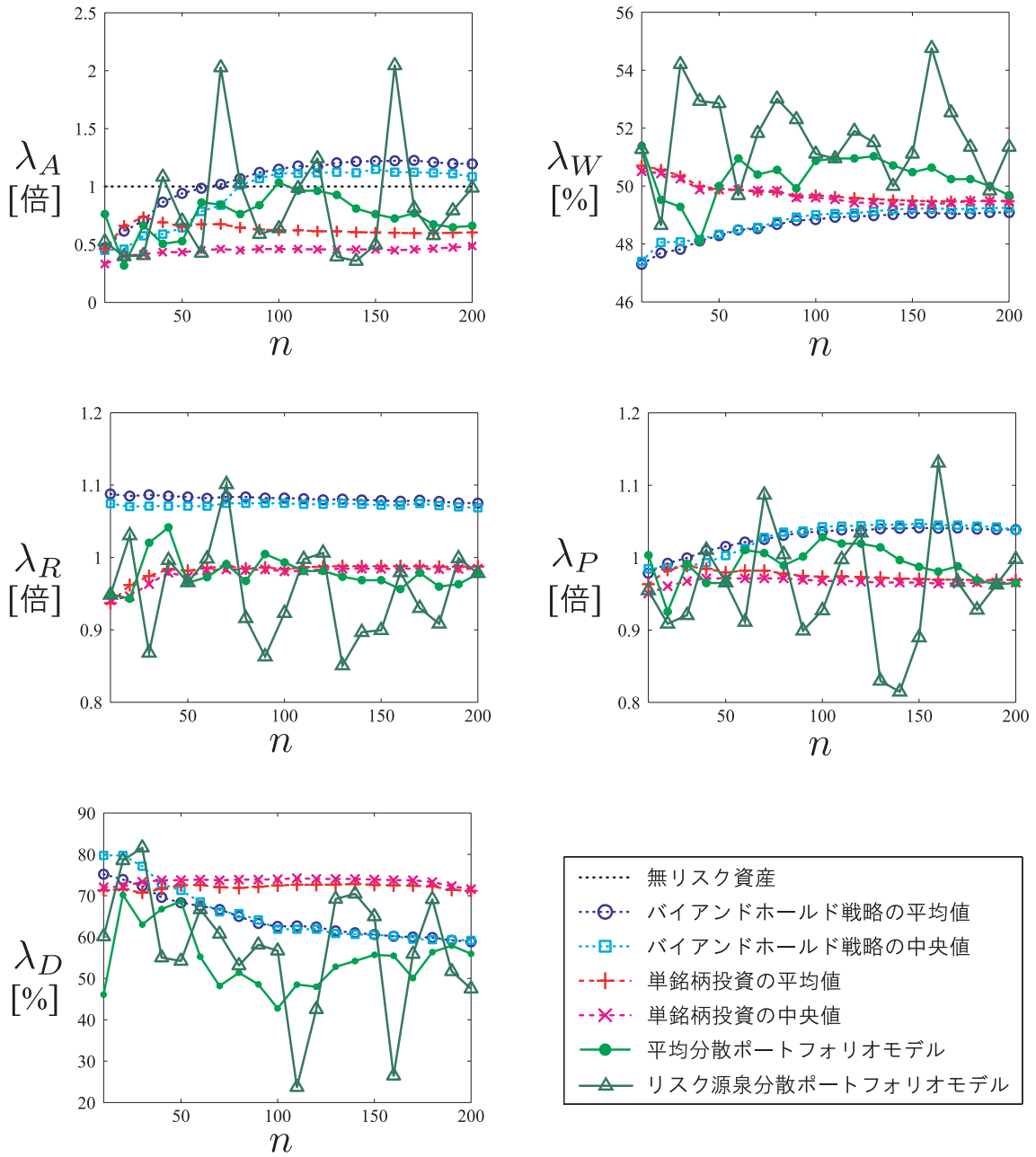


図 4: 従来の平均分散ポートフォリオモデルと、リスク源泉分散ポートフォリオモデルによる投資結果。ただし期間 I の場合。

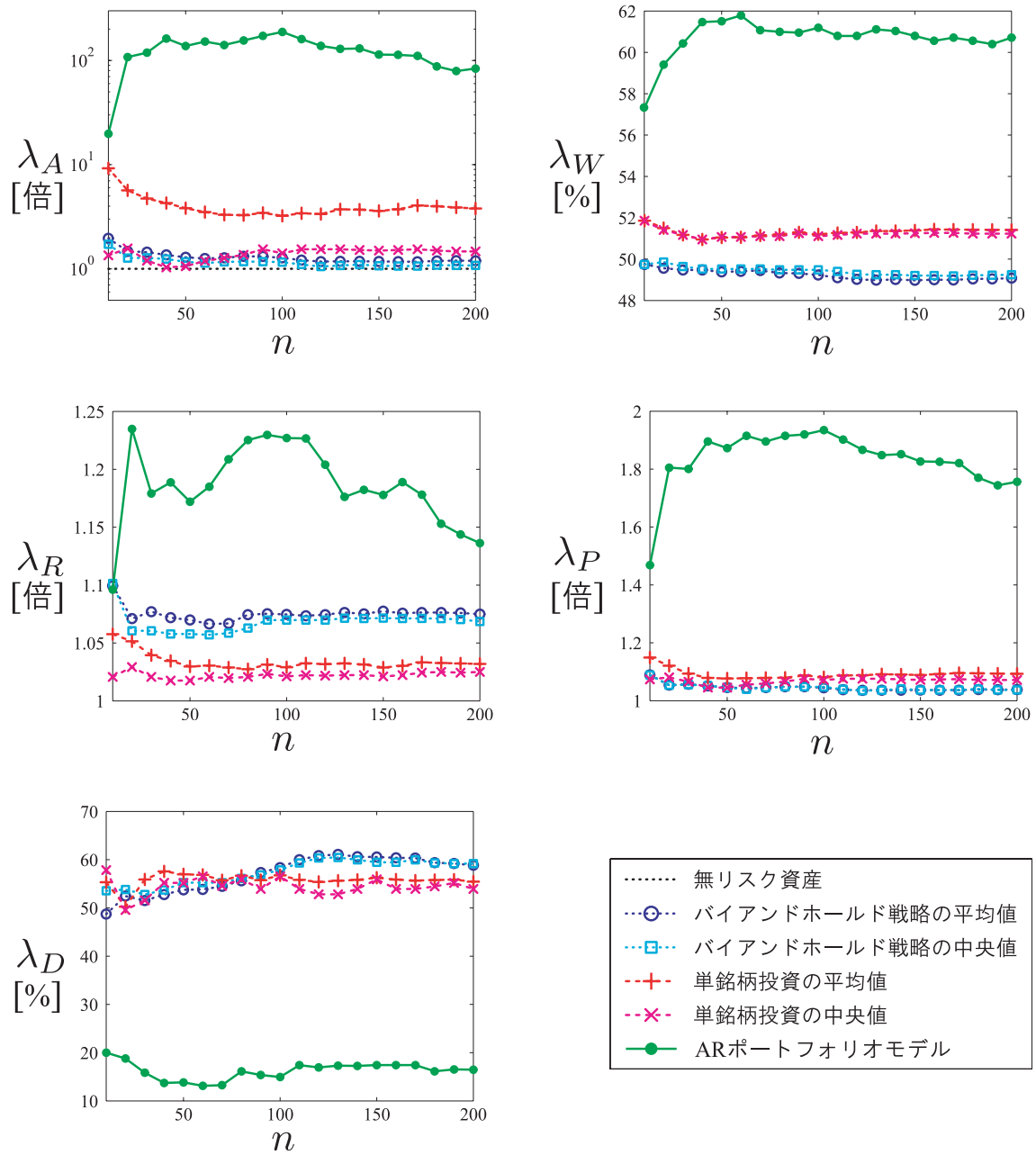


図 5: AR ポートフォリオモデルによる投資結果. ただし期間 I の場合.

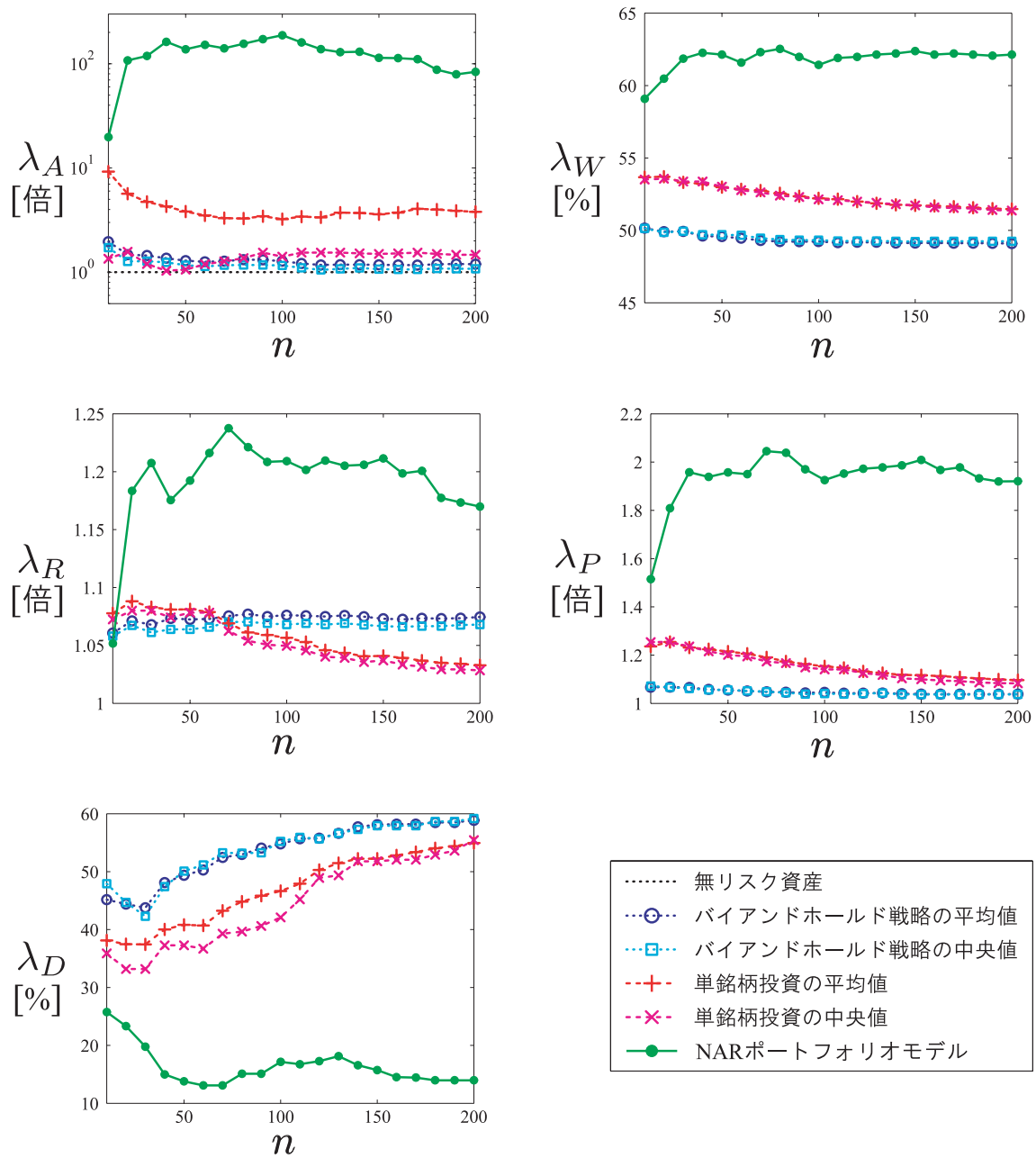


図 6: NAR ポートフォリオモデルによる投資結果。ただし期間 I の場合。

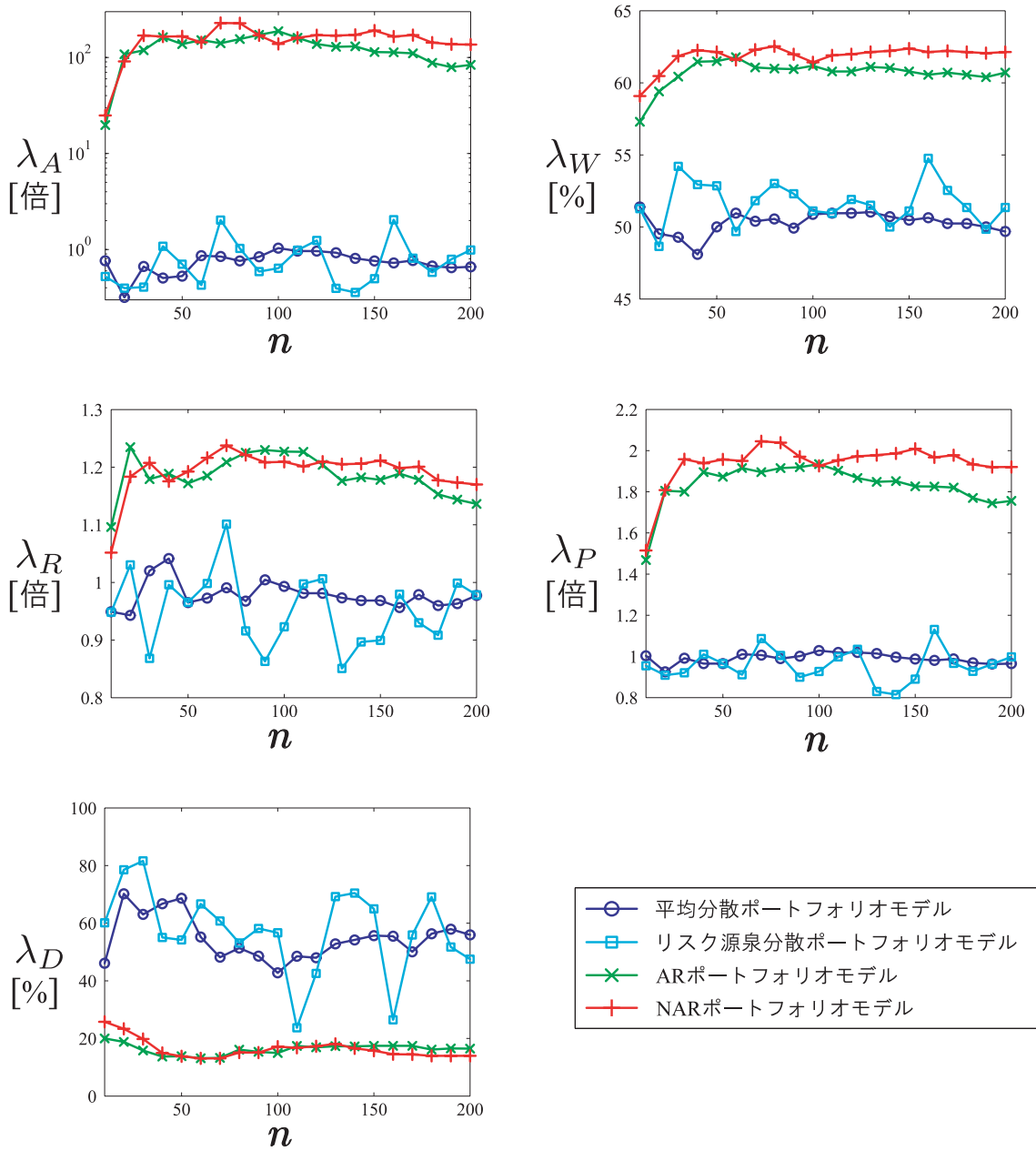


図 7: 従来モデルと提案モデルの比較。ただし、期間 I の結果。

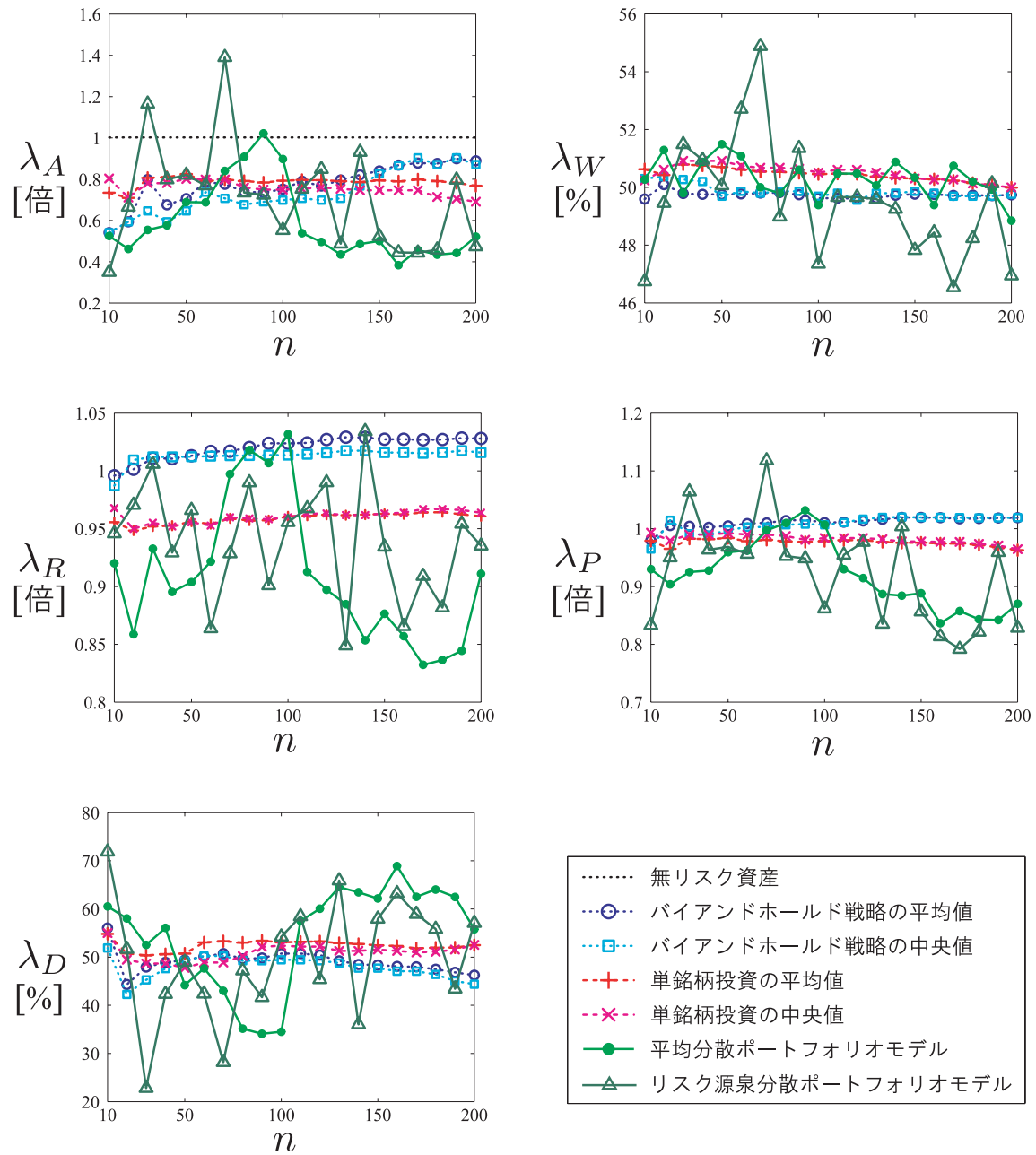


図 8: 図 4 と同様. ただし, 期間 II における結果.

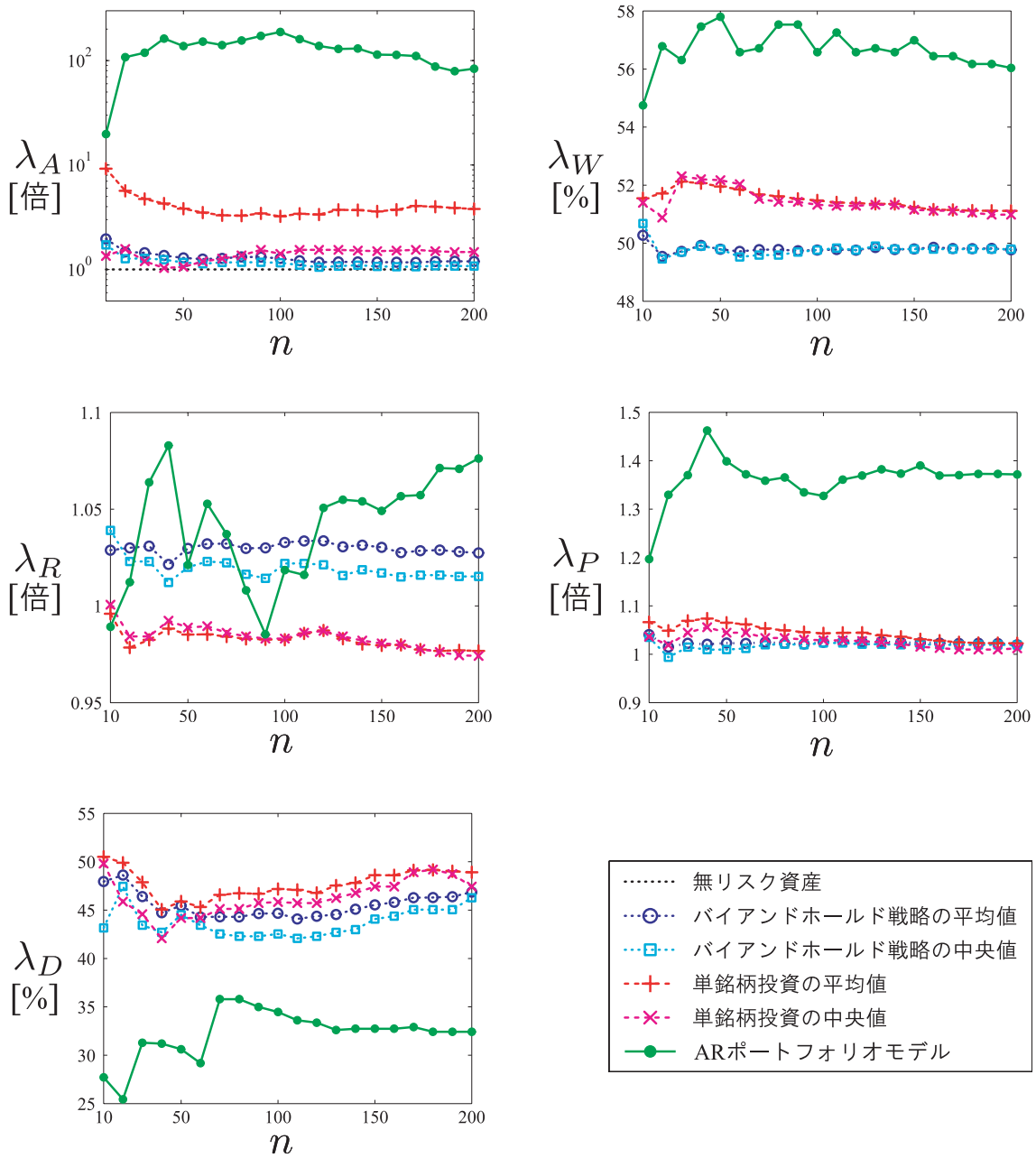


図 9: 図 5 と同様. ただし, 期間 II における結果.

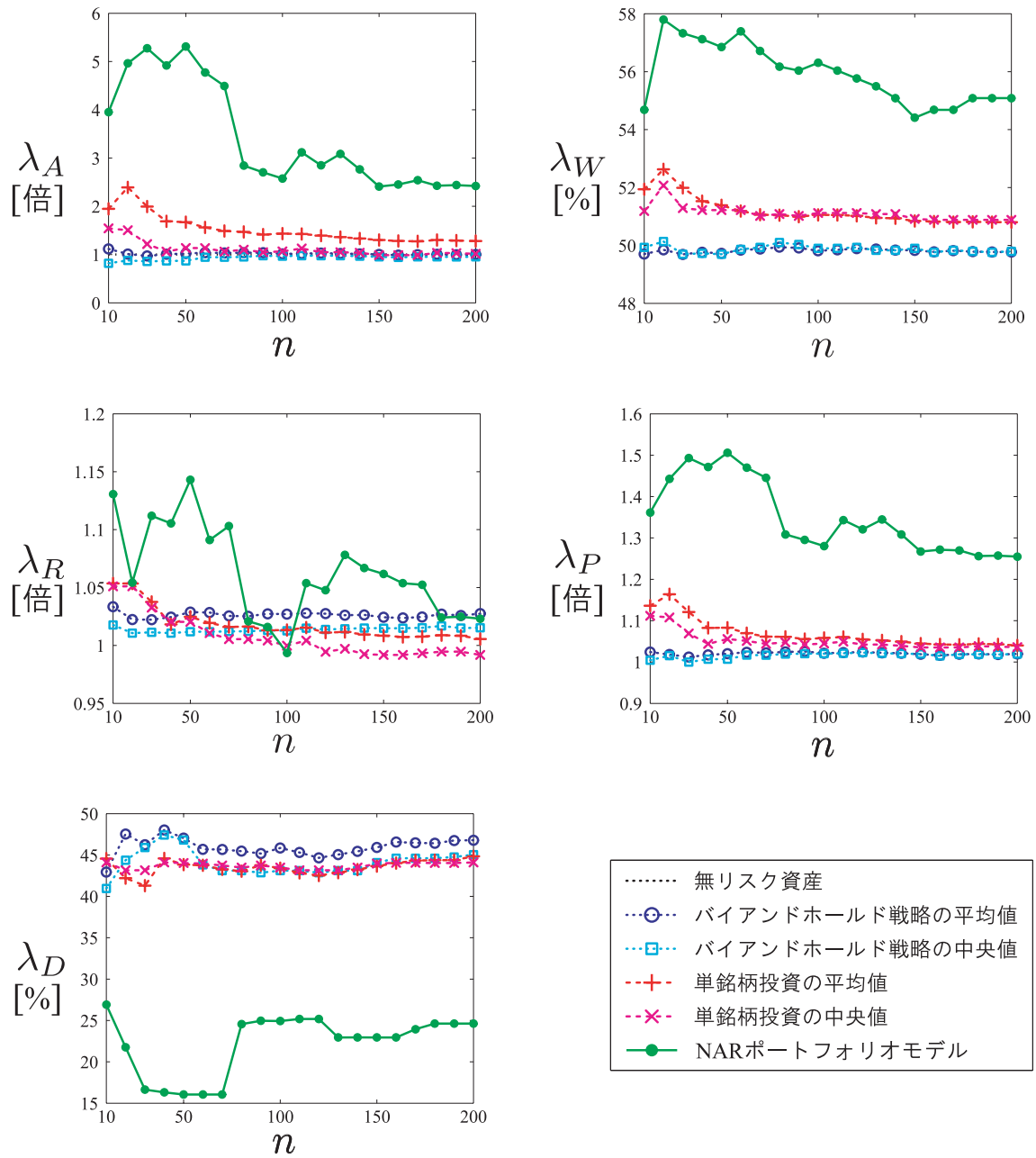


図 10: 図 6 と同様。ただし、期間 II における結果。

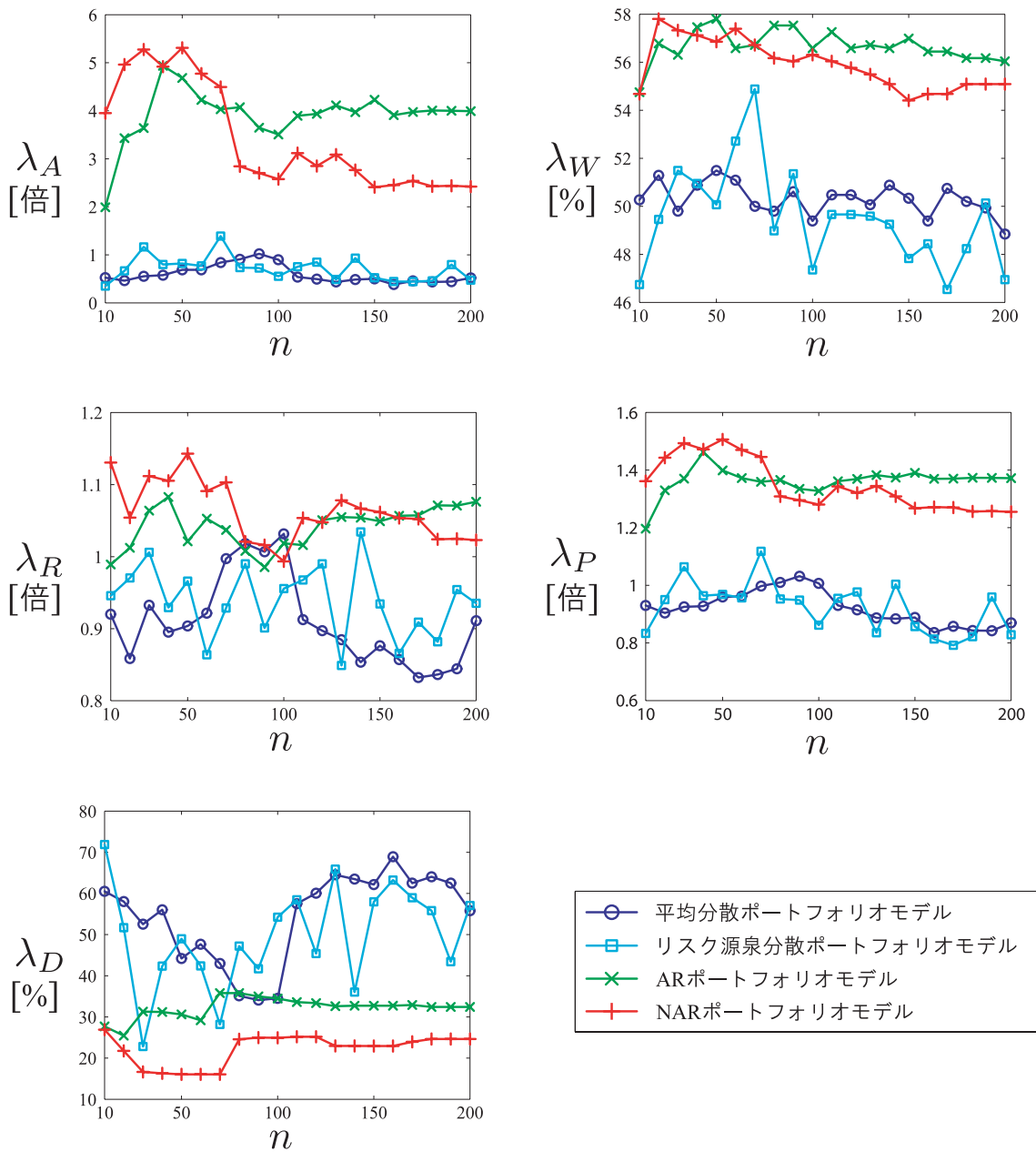


図 11: 図 7 と同様, ただし, 期間 II における結果.

7 現実市場を想定したシミュレーション

前章では、取引手数料や端株処理といったものが存在しないことを仮定した完全市場下でのシミュレーションを行っていた。しかし、現実取引ではこれらの処理は必要である。Alexander が提案し、トレンドがあると実証したフィルタールール戦略 [26] も、Fama がこれらを考慮することで利益が得られないとした検証例もある [87]。つまりこれらの影響を考慮したシミュレーションを行う必要がある。この背景より 7.1 章では、取引手数料とリバランス頻度を減少させる長期予測を述べる。さらに 7.2 章に取引手数料に基づいたシャープレシオの一般化、7.3 章では端株処理を行う際の投資比率の最適化について説明する。7.4 章では、これらの制約下での投資シミュレーションを行い、最適な投資戦略について議論する。

7.1 長期予測

市場のトレンドの変化に対応するために、投資比率の調整を行う作業をリバランスという。式 (9) および (26) の s が大きくなる（リバランス頻度が少ない）と、 s 期先の収益率 $r_{i,s}(t+s)$ を推定するため、長期予測をすることになる。このリバランス頻度を減らすことは、取引の回数を抑えるため、取引手数料を抑えることが出来るというメリットがある。

しかし長期予測をする場合、学習データ数が非常に少数になってしまうため、モデルパラメータ $F = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d_i}\}$ の推定が不安定となってしまう。そこで、長期予測のためのより適切な方法を提案する。ここで式 (9), (28), (29) は以下のように書くことができる。

$$\hat{r}_{i,s}(t+s) = \alpha_0 + \sum_{a=1}^{d_i} \alpha_a r_{i,1}(t - (a-1)) \quad (55)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & r_{i,1}(t-s) \\ 1 & r_{i,1}(t-(s+1)) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{i,1}(t-(L-d_i\tau_i)) \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$Y = [r_{i,s}(t), r_{i,s}(t-1), \dots, r_{i,s}(t-(L-d_i\tau_i)+s)] \quad (57)$$

そして式 (38) に X と Y 、および式 (35)~(37) によって得られた重み係数行列 W を代入することで、モデルパラメータ \hat{F} が推定される。式 (40) と式 (56) を比較すると、最小二乗法に用いる説明変数のデータ数はそれぞれ $\lfloor (L-1)/s \rfloor - d_i\tau_i$ と $L - d_i\tau_i - s + 1$ となる。つまり s が拡大すると、式 (40) のデータ数がより減少する。本研究では、式 (56) に従って学習データの減少を抑えた NAR 予測法を、「adNAR 予測モデル」と呼ぶ。

次に前章で用いた期間 I のデータに対して長期予測を行い、adNAR 予測モデルの有用性を確認する。図 12(a) を見ると、adNAR 予測モデルは NAR 予測よりも予測精度の向上を確認できる。しかし期間 s を拡大すると、予測精度が減少することから、長期予測は困難であることを意味している。これは時間スケールの拡大に伴い、収益率変動が有する諸特性が減弱し、ランダムウォークに近づいたためだと考えられる。特に、金融データのように不等時間間隔で変動するジャンプ過程の場合、観測する時間スケールの拡大によって時系列予測が困難になることが示されている [88,89]。これは、たとえシステムにダイナミクス F が存在するとしても、サンプリング間隔の拡大によって元の力学的構造が破壊されるためである。またこの結果は高頻度データの必要性を主張するものであり、高頻度データを積極的に扱う経済物理額 [90,91] のアプローチを支持する結果である。

図 12(b) に、尤度 $\{\eta_i\}$ と予測精度 $\{\xi_i\}$ の相関係数 C を示す。前章で述べたように、これらの相関係数 C が高ければ、より予測し易い銘柄を選択することができる。結果を見ると、短期予測であ

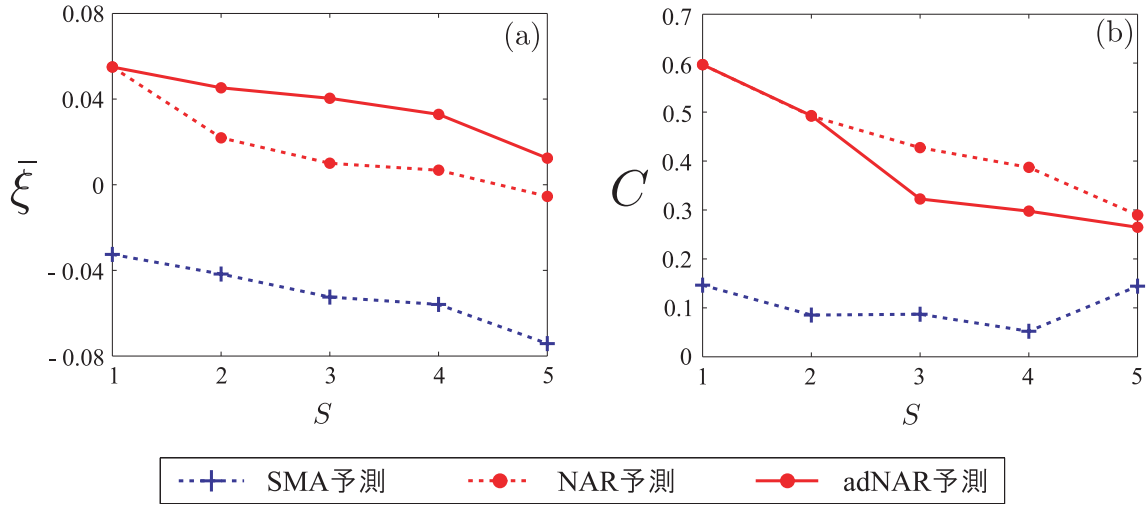


図 12: 長期 (s ステップ) 予測の結果:(a) 各銘柄の予測精度 $\{\xi_i\}$ の平均値 $\bar{\xi}$, (b) 尤度 $\{\eta_i\}$ と予測精度 $\{\xi_i\}$ 間の相関係数 C .

れば相関係数 C が高く良い結果が得られた。逆に期間 s の拡大によって長期予測は困難となるため、尤度と予測精度の相関は減少する。

図 12(b) において尤度 [%] と予測精度の間に正の相関が確認できるため、予測しやすい銘柄を用いてポートフォリオを構築することができる。その結果を図 13 に示す。各図を見ると、 s の拡大による平均予測精度 $\bar{\xi}$ の低下が確認できる。さらに図 13(c) のように期間 s が拡大すると、銘柄厳選したときの平均予測精度 $\bar{\xi}$ は adNAR 予測モデルが最良の結果を示している。したがって以後は、adNAR 予測モデルを用いて期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ を推定し、NAR ポートフォリオモデルを構築する。

7.2 シャープレシオの一般化

次にポートフォリオのリバランスに係る取引手数料を考慮する。前述したように、シャープレシオ [4] は一般的に、リバランス時の投資比率の最適化で用いる評価関数である。しかし、式 (12) のシャープレシオ $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ は取引手数料を考慮せずに投資比率を最適化している。そこで本研究ではこの項を導入したシャープレシオを提案する。

$$N_{mSR}(\mathbf{x}(t)) = \frac{M(t)\hat{r}_{p,s}(t+s) - M(t)r_f(t+s) - c(t)}{M(t)\hat{\sigma}_{p,s}(t+s)} \quad (58)$$

ここで $M(t)$ は時刻 t における総資産であり、 $c(t)$ はリバランスに係る取引手数料である。もし取引手数料が発生しない ($c(t) = 0$) 場合、式 (12) のシャープレシオ $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ と同じになる。そのため、式 (58) の関数 $N_{mSR}(\mathbf{x}(t))$ はシャープレシオを一般化した式だと考えることができる。本研究ではこれを「一般化シャープレシオ」と呼ぶ。

取引手数料の計算では、過去に最適化した投資比率とリバランス直前の投資比率は変化することに注意しなければならない。つまり $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{x}^*(t-s)$ であるが、これは株価 $y_i(t)$ が毎日変化するためである。なお、リバランスによって新規に取引する総金額 $M_x(t)$ とその取引手数料 $c(t)$ は、以下

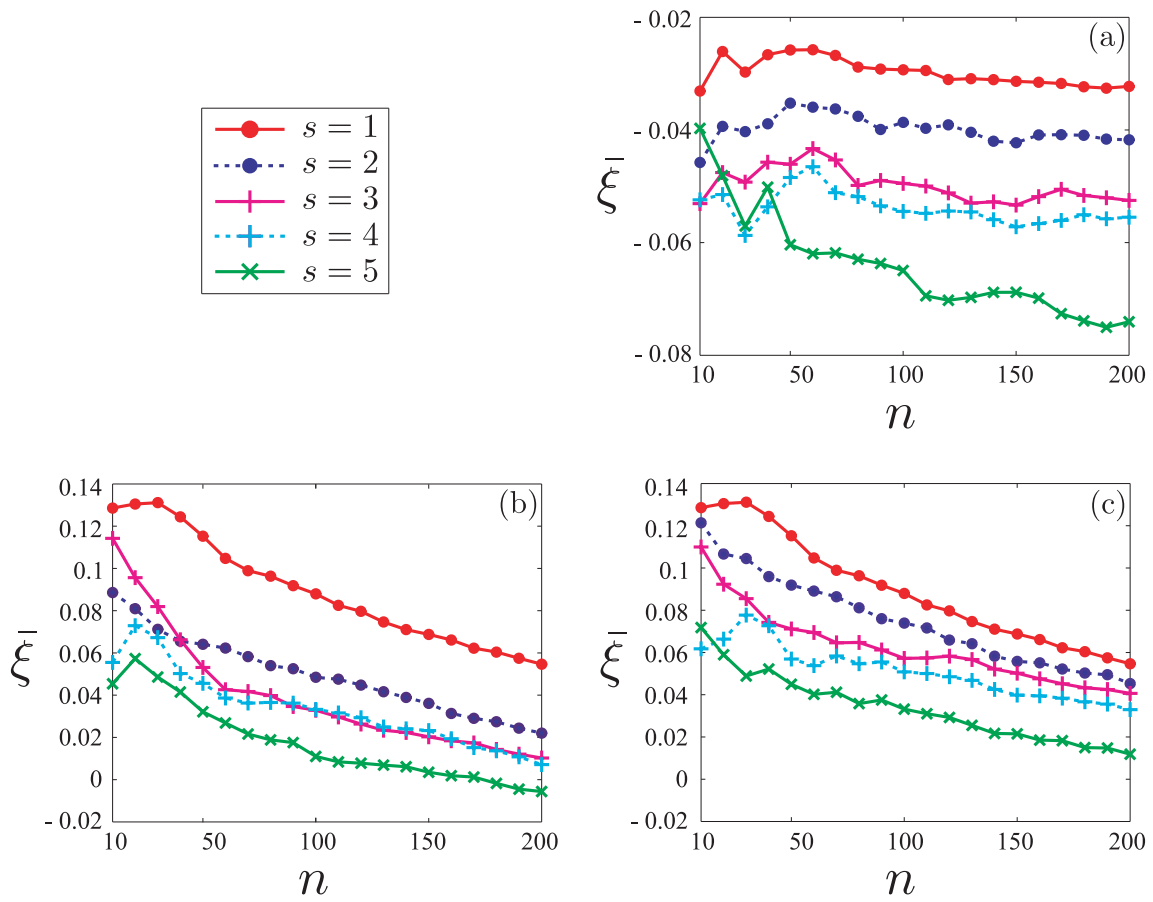


図 13: 予測モデルの尤度 $\{\eta_i\}$ に基づいて n 銘柄に厳選したときの平均予測精度 $\bar{\xi}$: (a) SMA 予測, (b) NAR 予測, (c) adNAR 予測の結果.

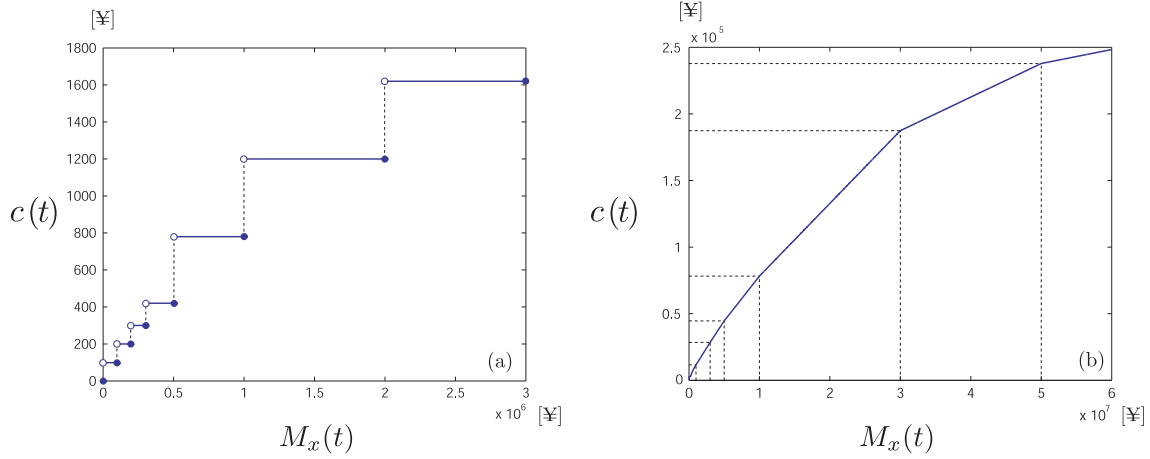


図 14: ポートフォリオのリバランス額 $M_x(t)$ [¥] に対する取引手数料関数 f_c の例: (a) 岡三オンライン証券の定額プランと (b) 野村証券の窓口取引サービス. なお (a) において $M_c(t) > 3 \times 10^6$ となった場合, 取引手数料 $c(t)$ は 1×10^6 [¥] 毎に 420 [¥] ずつ上乘せされる.

のように算出される.

$$M_x(t) = M(t) |\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)| \quad (59)$$

$$= M(t) \sum_{i=1}^n |x_i^*(t) - x_i(t)| \quad (60)$$

$$c(t) = f_c(M_x(t)) \quad (61)$$

ここで $\mathbf{x}^*(t)$ はリバランスのために最適化された新しい投資比率, f_c は取引手数料関数である. なお本研究では, 取引手数料関数に図 14(a) に示す岡三オンライン証券の定額プランを用いた [92]. 取引手数料を考慮した投資比率の最適化問題は, 先行研究でも存在する [12]. しかしこれらの研究では, 図 14(b) に示すような窓口取引の取引手数料関数を用いている. そこで区分線形近似アルゴリズムを利用することで, 近似解を得ることができるとしている. しかし近年発展してきたオンライン証券の取引手数料は, これらと比較して非常に安価というメリットがあり, こちらを導入するのが妥当だろう.

しかし図 14(a) のオンライン証券の取引手数料は離散関数であり, これを導入した式 (58) の関数も同様に離散的な構造を有する非凸計画問題となるため, 局所解が存在してしまう. そのため通常の勾配法では, 最適解から大きく乖離した解が探索されてしまう可能性がある. そこで緩和策として, 多スタート局所探索法を導入し, 複数の解を探索後, その中から最良の準最適解および投資比率 $\mathbf{x}^*(t)$ を採用する.

7.3 端株処理

次に端株処理を行う. 株式取引をする場合, 1 株未満の株式を取引することはできない. なおかつ日本国内で株式取引をする場合, 独自の制度として単元株制度がある. これは会社が定める株式数 μ_i を 1 単位として, その整数倍でしか取引できない制度である. このような制度が設定されたのは 1982 年であり, 発行済み株式数が多い銘柄の場合, 小数の株式しか保有していない株主に対し資料送付等に膨大な費用がかかってしまう. さらに株主数が多くなるほど, その株式管理に対しても膨大な費用がかかってしまうため, これを緩和するために設けられた制度である. この制度を考慮するこ

とは、凸二次計画問題から離散計画問題への発展を意味する。そのため本研究では、この問題を考慮せずに最適化された投資比率 $x^*(t)$ に対し、最小取引単位の整数倍への丸めを 0-1 計画問題と捉え、遺伝的アルゴリズム [93] を導入する。

本アルゴリズムを導入する前処理として、投資比率 $x_i^*(t)$ から単元株の整数倍へ切り上げ、切り下げした投資比率 $x_i^\uparrow(t)$, $x_i^\downarrow(t)$ を以下のように算出する。

$$x_i^\uparrow(t) = \left(\left\lfloor \frac{M(t)}{\mu_i y_i(t)} x_i^*(t) \right\rfloor + 1 \right) \frac{\mu_i y_i(t)}{M(t)} \quad (62)$$

$$x_i^\downarrow(t) = \left(\left\lceil \frac{M(t)}{\mu_i y_i(t)} x_i^*(t) \right\rceil - 1 \right) \frac{\mu_i y_i(t)}{M(t)} \quad (63)$$

ここで $\lceil \cdot \rceil$ は小数点未満の切り上げを表し、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は小数点未満切り下げを表す。

さらに $\{x_i^\uparrow(t)\}$ を 1, $\{x_i^\downarrow(t)\}$ を 0 とすると、遺伝子コードと見做すことができるため、遺伝的アルゴリズム [93] を適用できる。これは生物の進化メカニズムを真似る進化的アルゴリズムの一種であり、本研究での手順を以下に示す。

Step 1 初期世代の集団生成

初期世代の集団 $\Phi(0) = \{\phi_0(i)\}$ をランダムに生成する。なお集団内の個体数を 50 とし、それぞれの個体 $\phi_0(i)$ は n 個の遺伝子コードを有する。さらに初期値として、 $k = 0$ とする。

Step 2 適合度計算

現在の集団 $\Phi(k)$ 内の各個体 i に対し、適合度 $N_{mSR}(\mathbf{x}^{(\phi_k(i))}(t))$ を計算する。

Step 3 選択

適合度 $N_{mSR}(\mathbf{x}^{(\phi_k(i))}(t))$ に比例する確率分布を用いて $\Phi(k)$ から個体 i を選び出す。なお本研究ではルーレット方式を採用し、 i 番目の個体が選択される確率 P_i は以下のように算出される。

$$P_i = \frac{N_{mSR}(\mathbf{x}^{(\phi_k(i))}(t))}{\sum_i N_{mSR}(\mathbf{x}^{(\phi_k(i))}(t))} \quad (64)$$

Step 4 生殖

選び出された個体に交叉や突然変異等を行い、次の世代の集団 $\Phi(k+1) = \{\phi_{k+1}(i)\}$ を生成する。まず 50 個体のうち 46 個体については交叉を行う。そのうち 24 個体は一点交叉、10 個体は二点交叉、12 個体を一様交叉させる。そして交叉後の 46 個体に対し、確率 5 [%] で突然変異を行う。最後に $\Phi(k)$ の中で適合度の高い上位 4 個体は、エリートとして次世代へ遺伝させる。

Step 5 終了条件

$k = 2000$ となければ終了する。そうでなければ $k \leftarrow k + 1$ として Step 2 へ戻る。

7.4 投資シミュレーション

現実的な状況を想定しても NAR ポートフォリオモデルと一般化シャープレシオが有用であるか、期間 I のデータを用いた投資シミュレーションによって検証を行う。

まず前章の図 4 および 11 の結果から、完全市場の下では従来のポートフォリオモデルと比較して NAR ポートフォリオモデルの有用性が確認できた。しかし現実の市場を想定したとき、毎回取引では取引手数料が増加するため、最適ナリバランス間隔について議論する。また初期資産 $M(0)$ が低い場合、端株処理によって無制約下の最適投資比率からの乖離が大きくなるため、より不効率な投資を行うことになる。そのため、十分な投資成績を得るために必要となる初期資産についても議論する。

図 15(a), (c), (d) の平均分散ポートフォリオによって得られた資産増幅率 λ_A を見ると、取引間隔 s を変化させても平均的な資産増幅率に大きな結果は見受けられない。ただし、リバランス間隔 $s = 5$ であれば、 $\lambda_A > 1$ となる可能性が存在する。次に図 18 によれば、初期資産 $M(0)$ が高ければ、プロフィットファクター λ_P も良好な結果が得られている。さらに $x_i(t) = 1/n$ とし、取引間隔 s をさらに拡大すると、図 4 のバイアンドホールド戦略の平均値に近づいていく。こちらは n が拡大していくと $\lambda_A > 1$ となるため、こちらの戦略のほうが有用であるといえる。これらの結果は、アクティブ運用が不適合であるという先行研究 [18] を支持する結果である。

一方、図 15(b), (d), (f) の NAR ポートフォリオモデルの資産増幅率 λ_A の結果によれば、現実的取引の制約を考慮しても、十分な利益を得られていることが確認できる。さらにリバランス間隔 s が短期であるほど良好という特徴も確認できる。これはつまり、取引手数料 $c(t)$ の支出が多くなったとしても、市場のトレンドに即座に対応したほうが利益に直結することを意味する。さらに図 13(c) の結果より、短期予測のほうが良好なポートフォリオを構築できることが確認できる。この結果は、前章の結果も併せて、市場変動が非ランダムウォークであることを支持する結果であり、アクティブ運用が有用であることを示す結果である。

次にこれらのポートフォリオモデルを導入するにあたり、必要となる初期資産 $M(0)$ について議論する。まず平均分散ポートフォリオモデルでは、特に $s = 5$ の結果に影響がある。初期資産が 10^6 [¥] では、図 19(a) の最大ドローダウン率は 90 [%] を超えている。しかし図 19(b)(c) のように初期資産が増加することで、 λ_D は平均 70 [%]、最良で 50 [%] 以下にまで低下している。一方 NAR ポートフォリオモデルにおいては、初期資産 10^6 [¥] の資産増幅率 λ_A (図 15(a)) は最大で約 50 倍であった。また日次取引 ($s = 1$) であっても、勝率 $\lambda_W < 60$ [%] (図 16(a))、勝率 $\lambda_W < 60$ [%] (図 16(a))、プロフィットファクター $\lambda_P < 1.7$ (図 18) であり、図 19(a) の最大ドローダウン率 λ_D では最大 40 [%] 近くまで損失が生じる。しかし初期資産が 10^7 [¥] 以上では、図 17 のリスクリワードレシオ λ_R に大きな変化は無いが、勝率 $\lambda_W > 60$ [%] (図 16(d)(f))、プロフィットファクター $\lambda_P > 1.7$ (図 18(d)(f))、最大ドローダウン率 λ_D (図 19(d)(f)) は平均で 20 [%] 以下に抑えることができている、特に図 15(d)(f) の資産増幅率 λ_A は最大で約 100 倍という結果が得られた。一方、図 15~19 の (d)(f) の結果を比較すると、大きな違いは無い。そのため、初期資産 $M(0)$ は 10^7 [%] (一千万円) 程度の資産があれば、理想に近い結果を得られることが分かった。

最後に、取引手数料 $c(t)$ を導入したシャープレシオ $N_{mSR}(\mathbf{x}(t))$ と式 (12) の従来のシャープレシオ $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ を利用したときの投資パフォーマンスを比較する。その結果を図 20~24 に示す。まずどちらの最適化関数を用いても、初期資産 $M(0)$ が 10^7 [¥] では、 10^8 [¥] の場合と比較しても大差が見られない。そのため先に提示した初期資産 $M(0)$ が 10^7 [%] で十分であるという結果に変わりはない。次に図 20 の資産増幅率 λ_A の結果を見ると、従来の最適化関数 $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ を用いたときと比較して提案関数は良好な結果が得られている。リバランス頻度 s が短期であるほど、提案関数 $N_{mSR}(\mathbf{x}(t))$ の有用性が高いことを確認できる。また図 21 の勝率 λ_W においても、良好な結果が得られている。一方で図 22 のリスクリワードレシオ λ_R は小さく、これが図 23 のプロフィットファクターの結果にも影響している。さらに最大ドローダウンにおいても、大きな損失が生じている。これらの結果から、提案関数を用いて最適化するとハイリスクハイリターンな戦略になりやすい。しかし、図 6 の単銘柄投資と比較すればリスクが大きく低減し、従来のシャープレシオよりも高いリターンが得られていることから、ミドルリスクハイリターンな戦略と考えることができる。

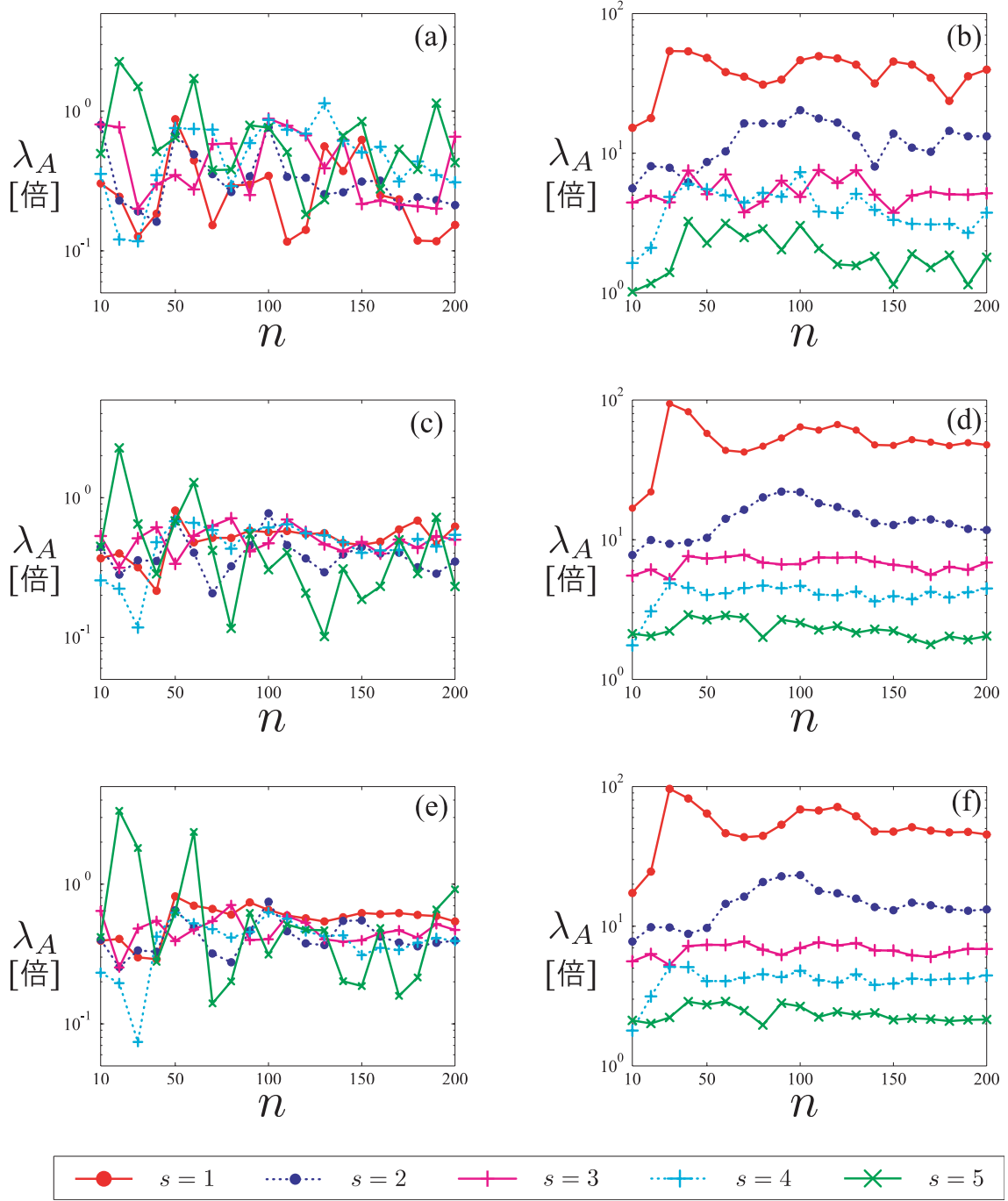
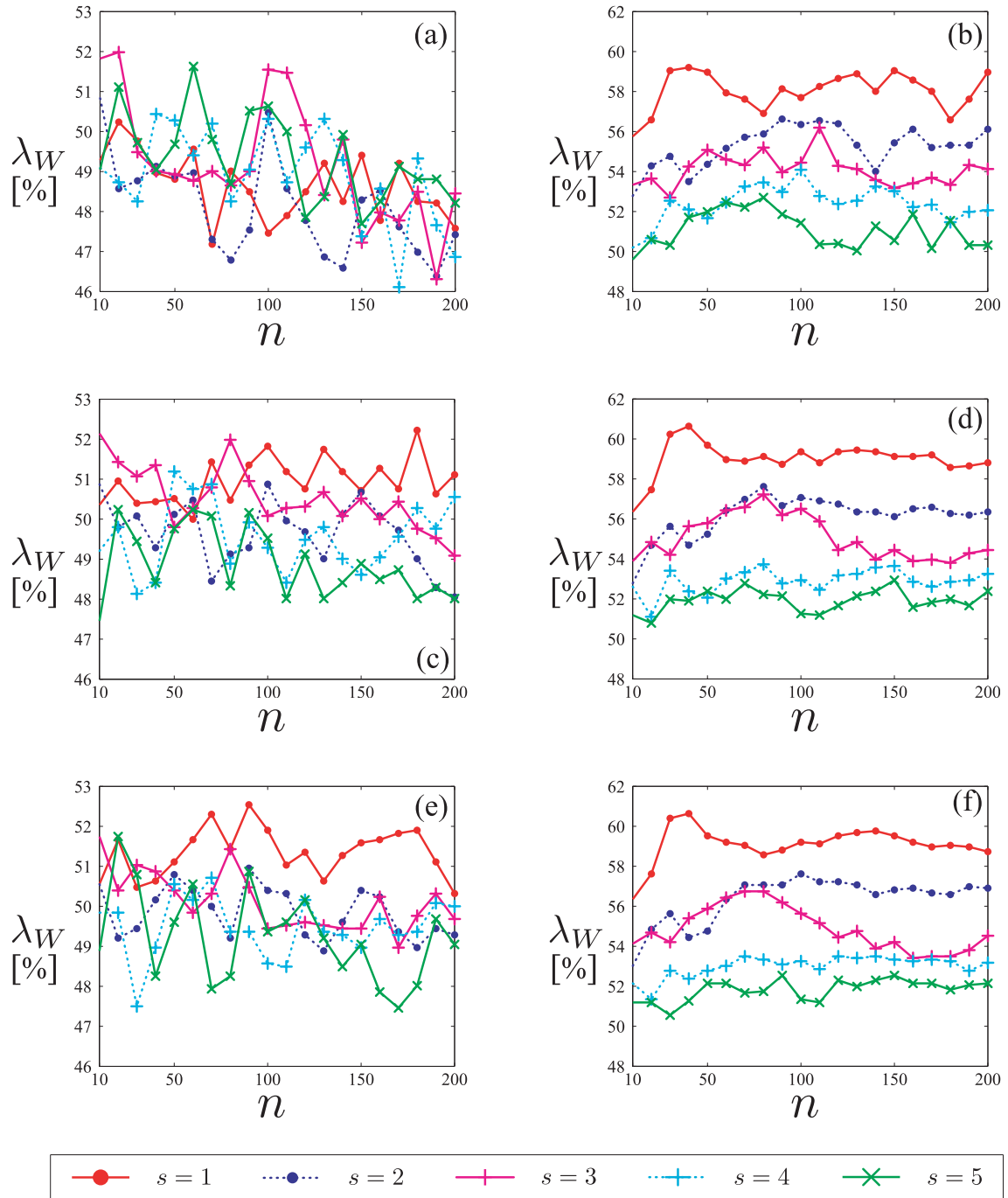


図 15: 取引手数料 $c(t)$ および端株処理を考慮したときの資産増幅率 λ_A : (a), (c), (d) は平均分散ポートフォリオ, (b), (d), (f) は NAR ポートフォリオモデルの結果. なお (a), (b) は $M(0) = 10^6$ [¥], (c), (d) は $M(0) = 10^7$ [¥], (e), (f) は $M(0) = 10^8$ [¥] とした. さらに投資比率の最適化関数として $N_{mSR}(\mathbf{x}(t))$ (式 (58)) を使用した.

図 16: 図 15 と同様, ただし勝率 λ_W の結果.

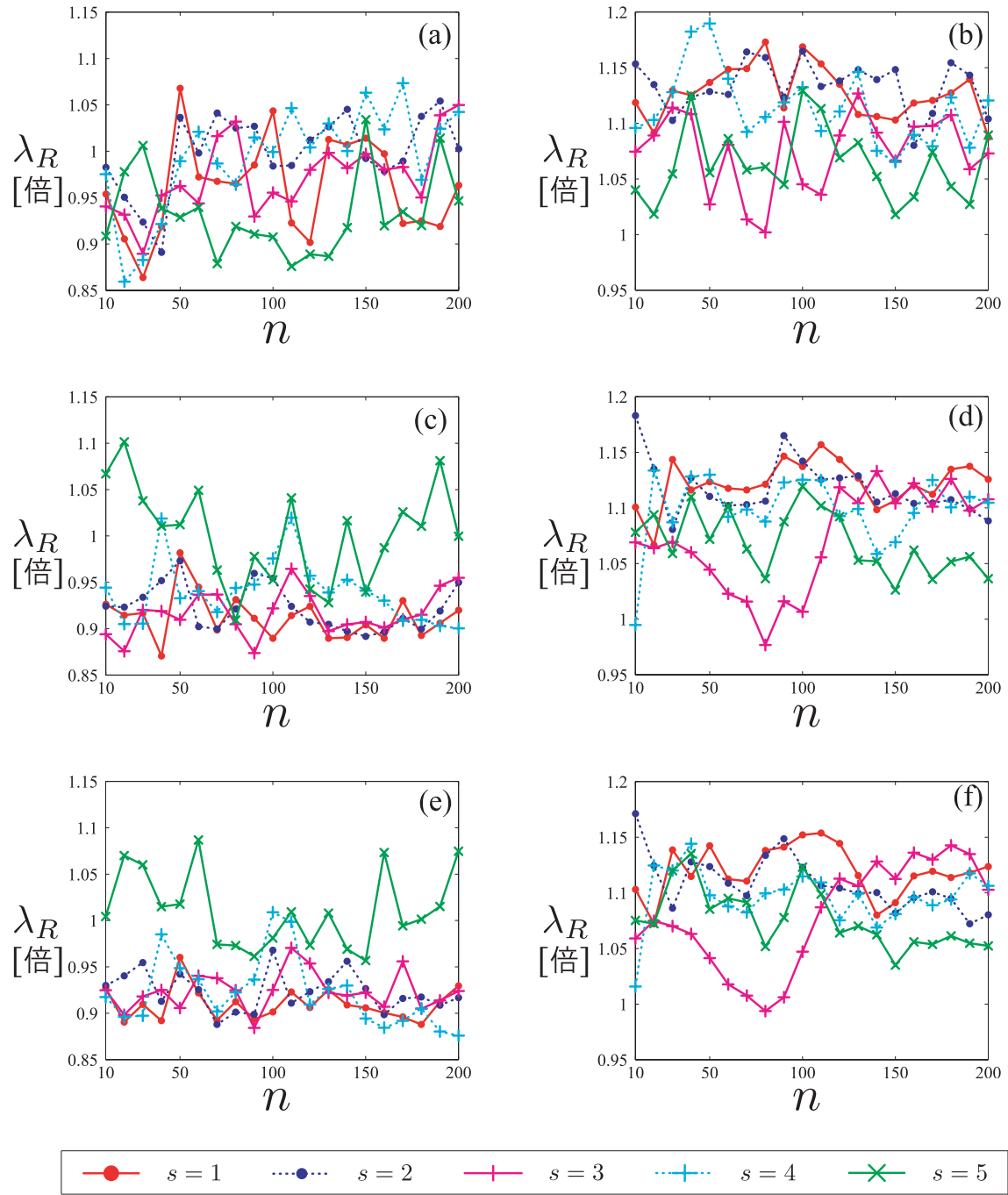


図 17: 図 15 と同様、ただしリスクワードレシオ λ_R の結果.

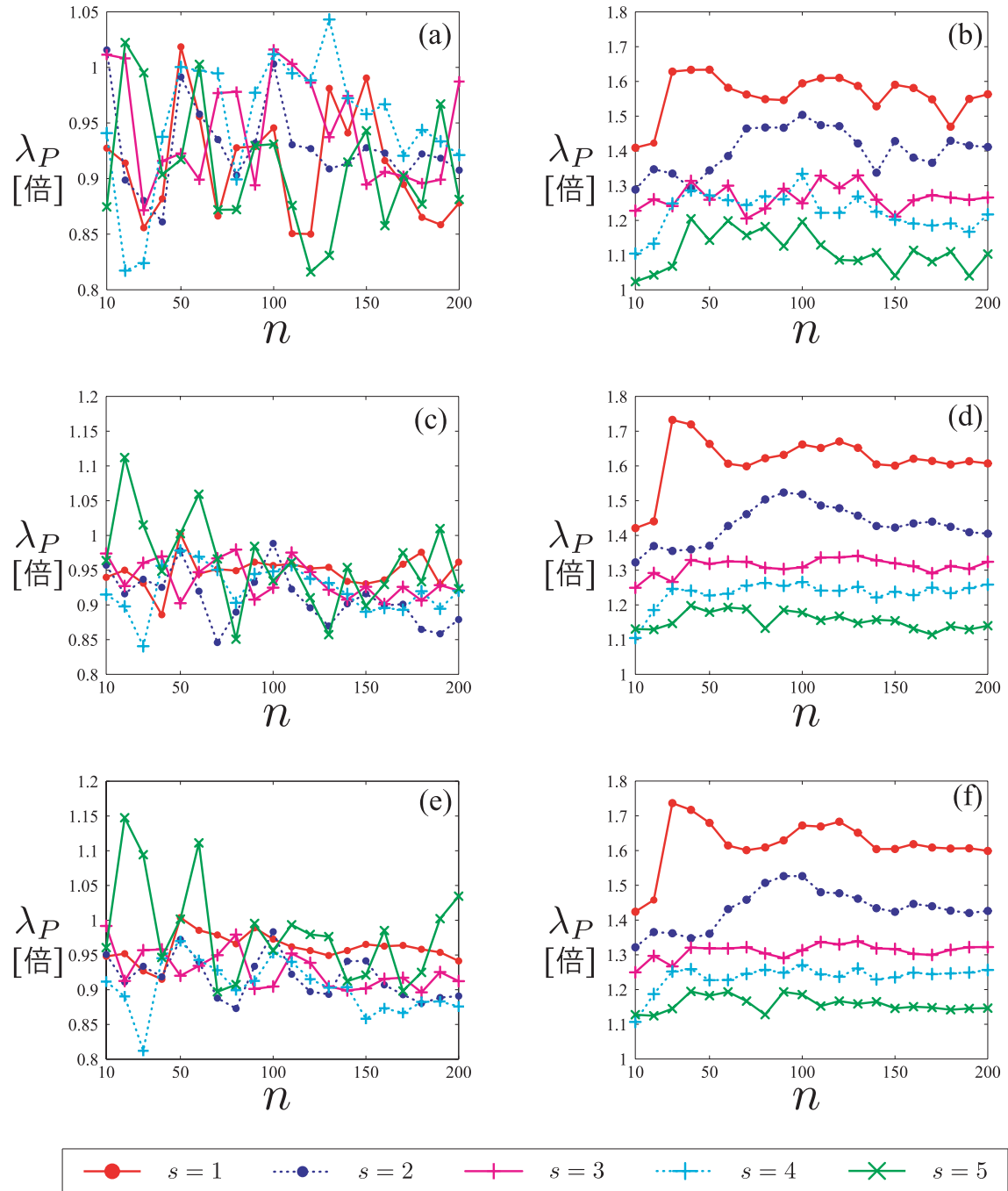


図 18: 図 15 と同様, ただしプロフィットファクター λ_P の結果.

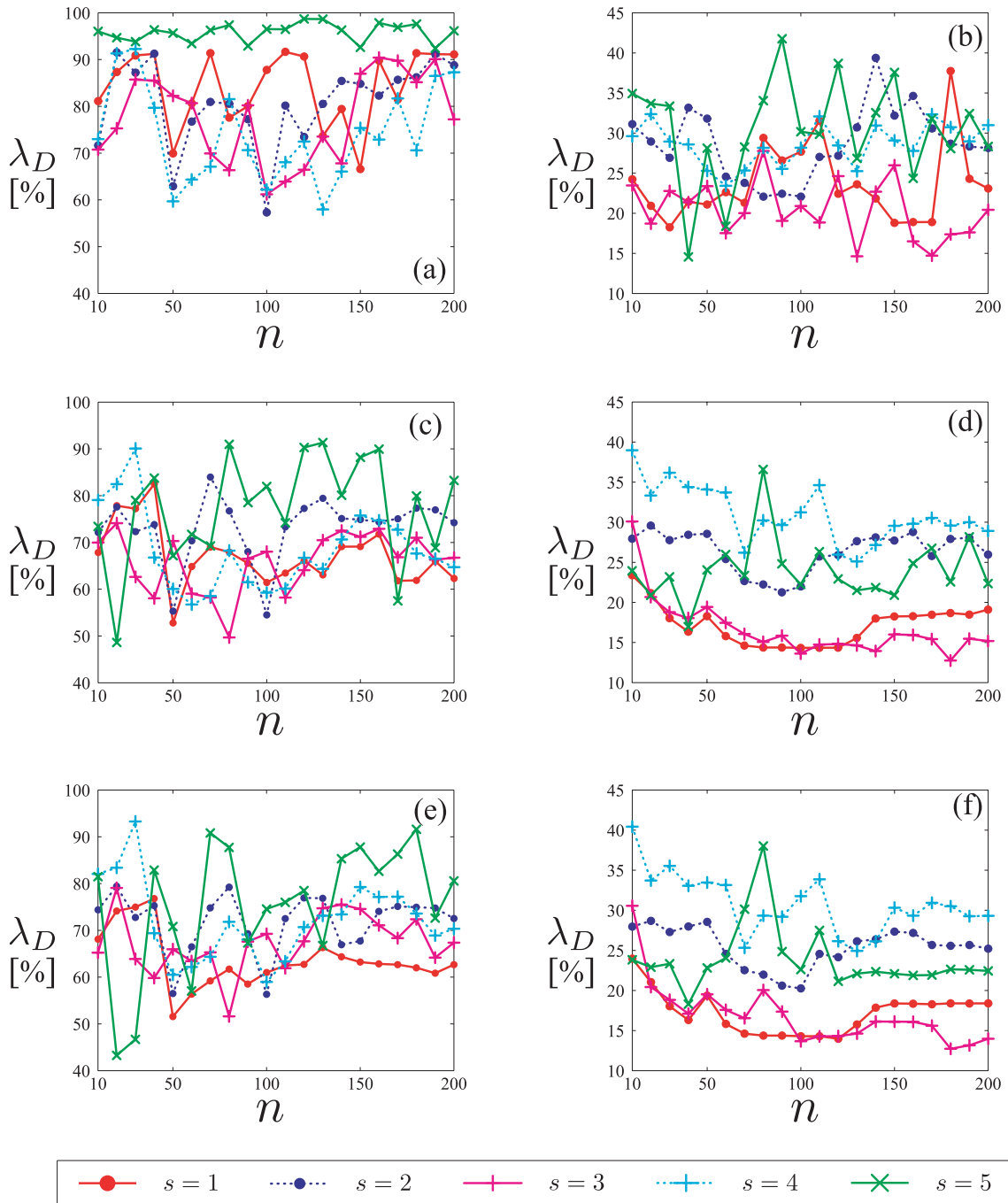


図 19: 図 15 と同様、ただし最大ドロウダウン率 λ_D の結果。

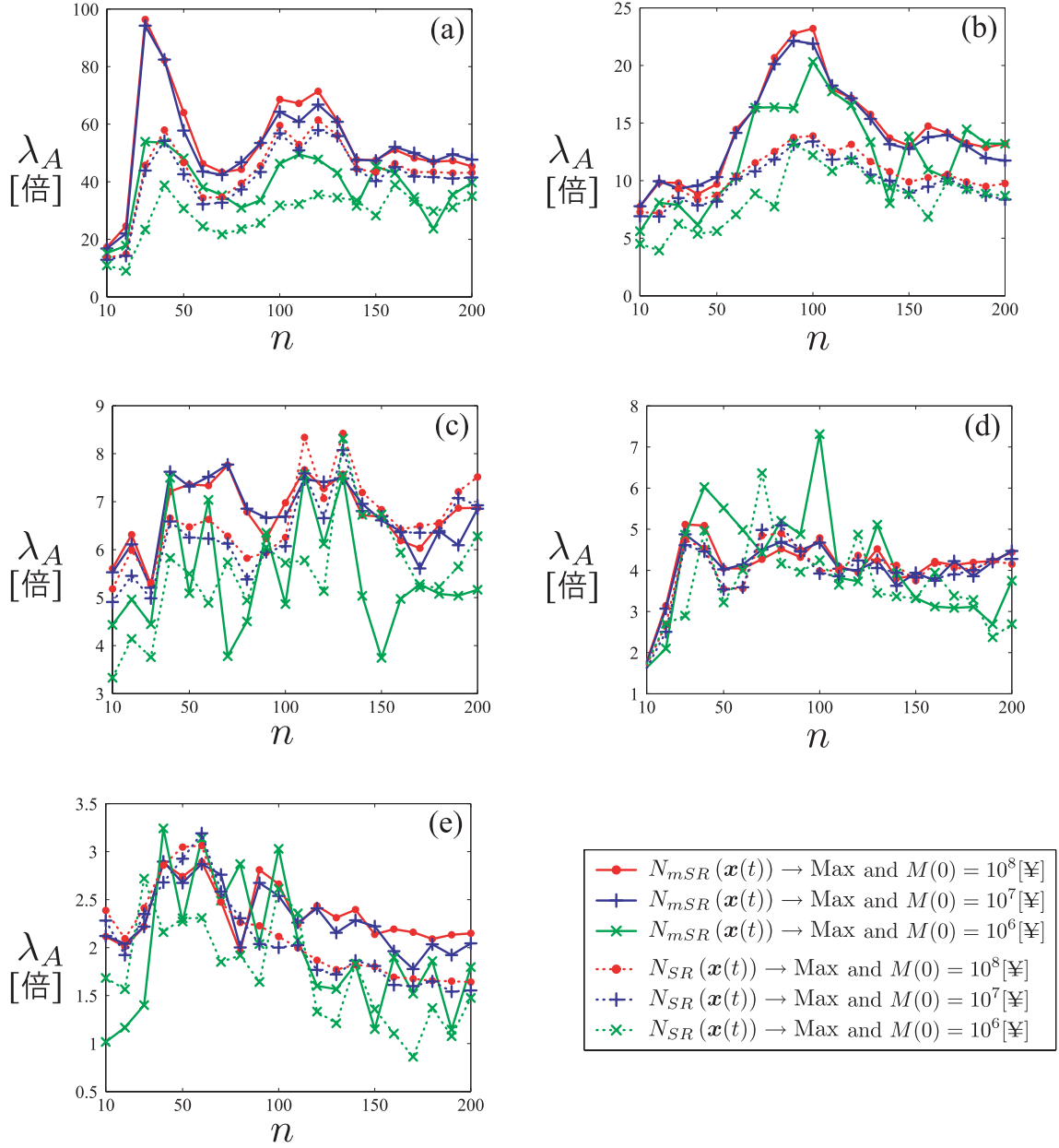
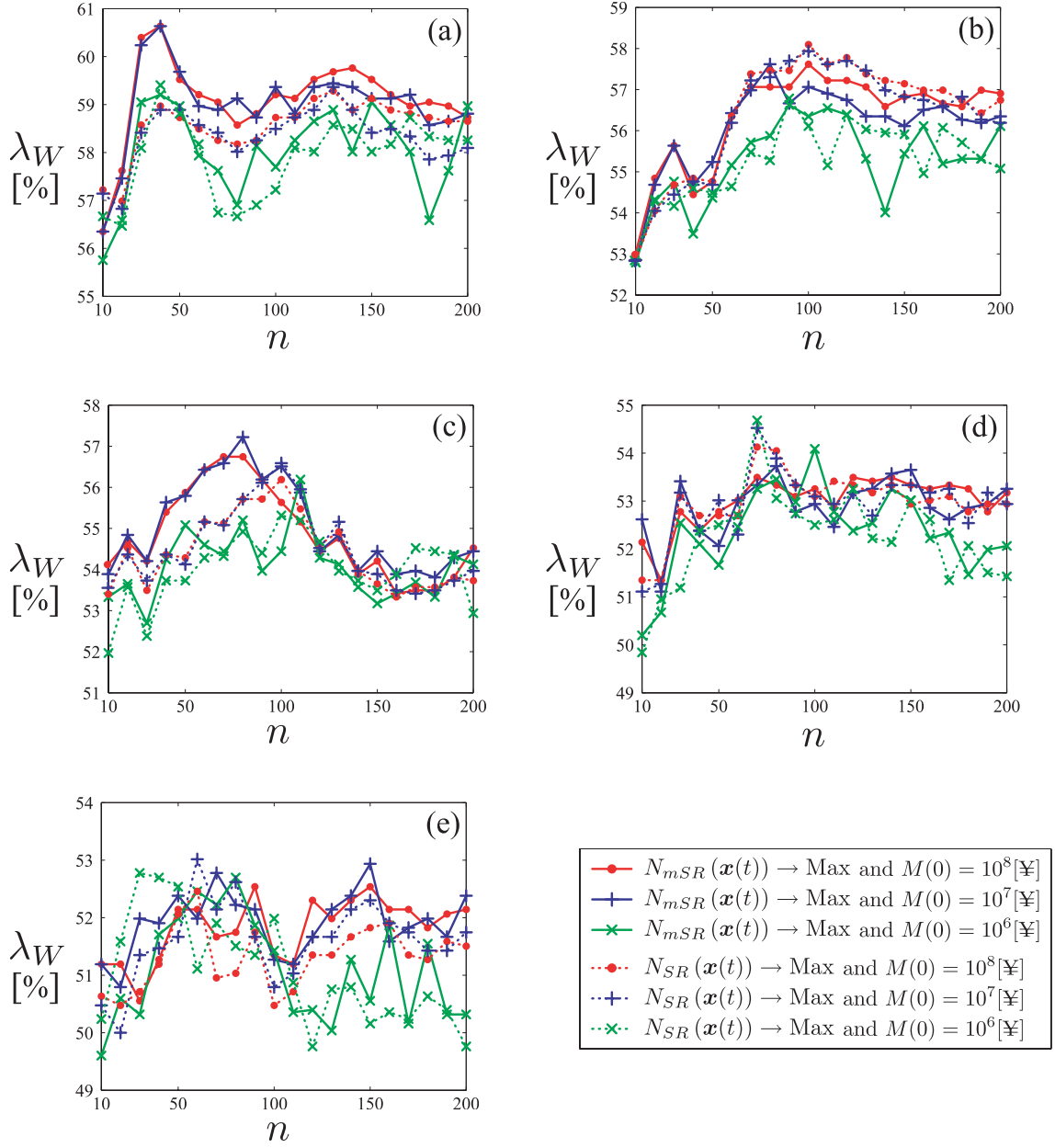


図 20: NAR ポートフォリオモデルにおける最適化関数の比較:実線は式 (58) の $N_{mSR}(\mathbf{x}(t))$, 点線は式 (12) の $N_{SR}(\mathbf{x}(t))$ を最適化した結果. また (a)1 日毎, (b)2 日毎, (c)3 日毎, (d)4 日毎, (e)5 日毎にポートフォリオをリバランスした結果. なお実線は図 15~19 の (b)(d)(f) の結果と同じである.

図 21: 図 20 と同様, ただし勝率 λ_W の結果.

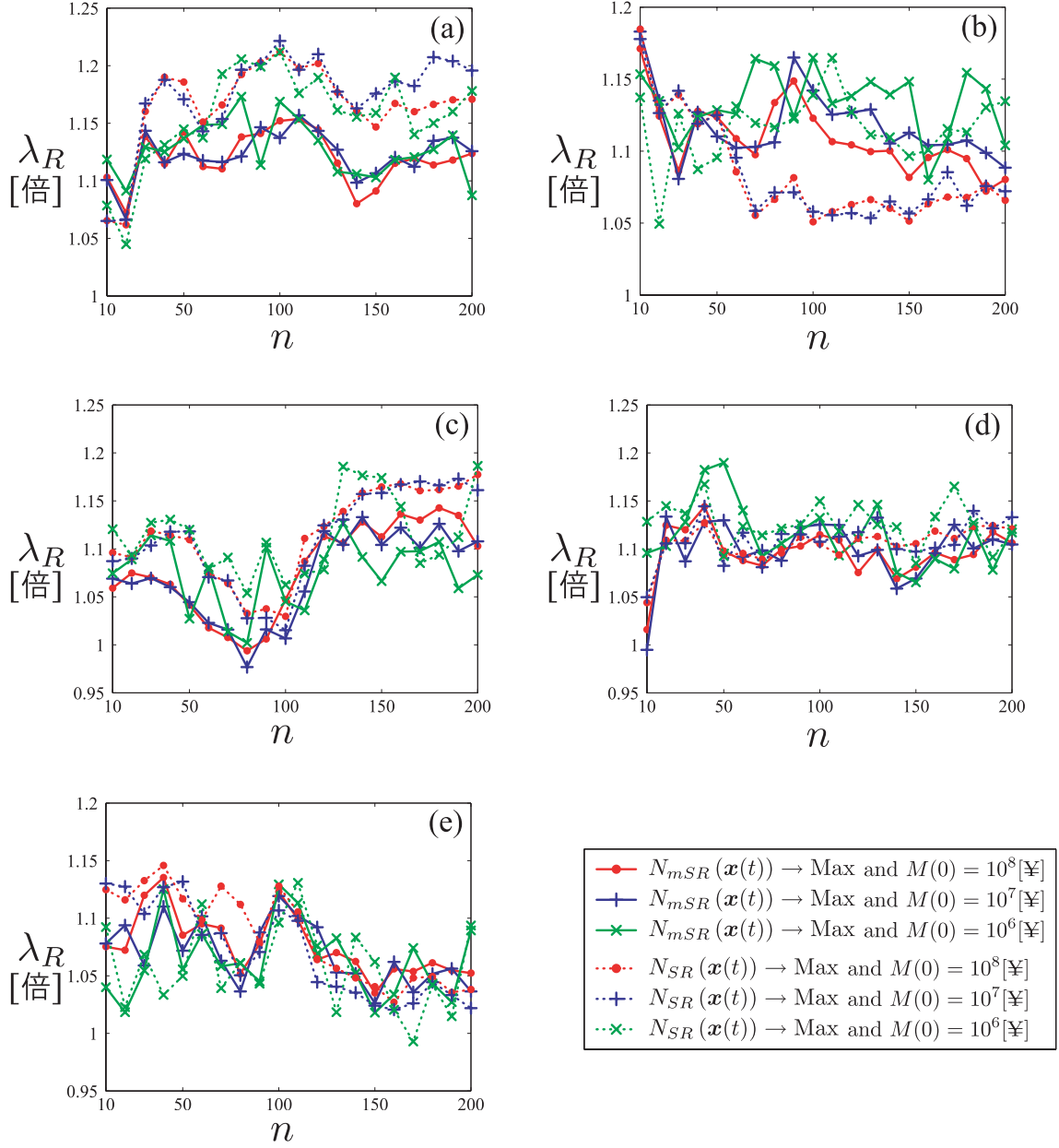


図 22: 図 20 と同様, ただしリスクワードレシオ λ_R の結果.

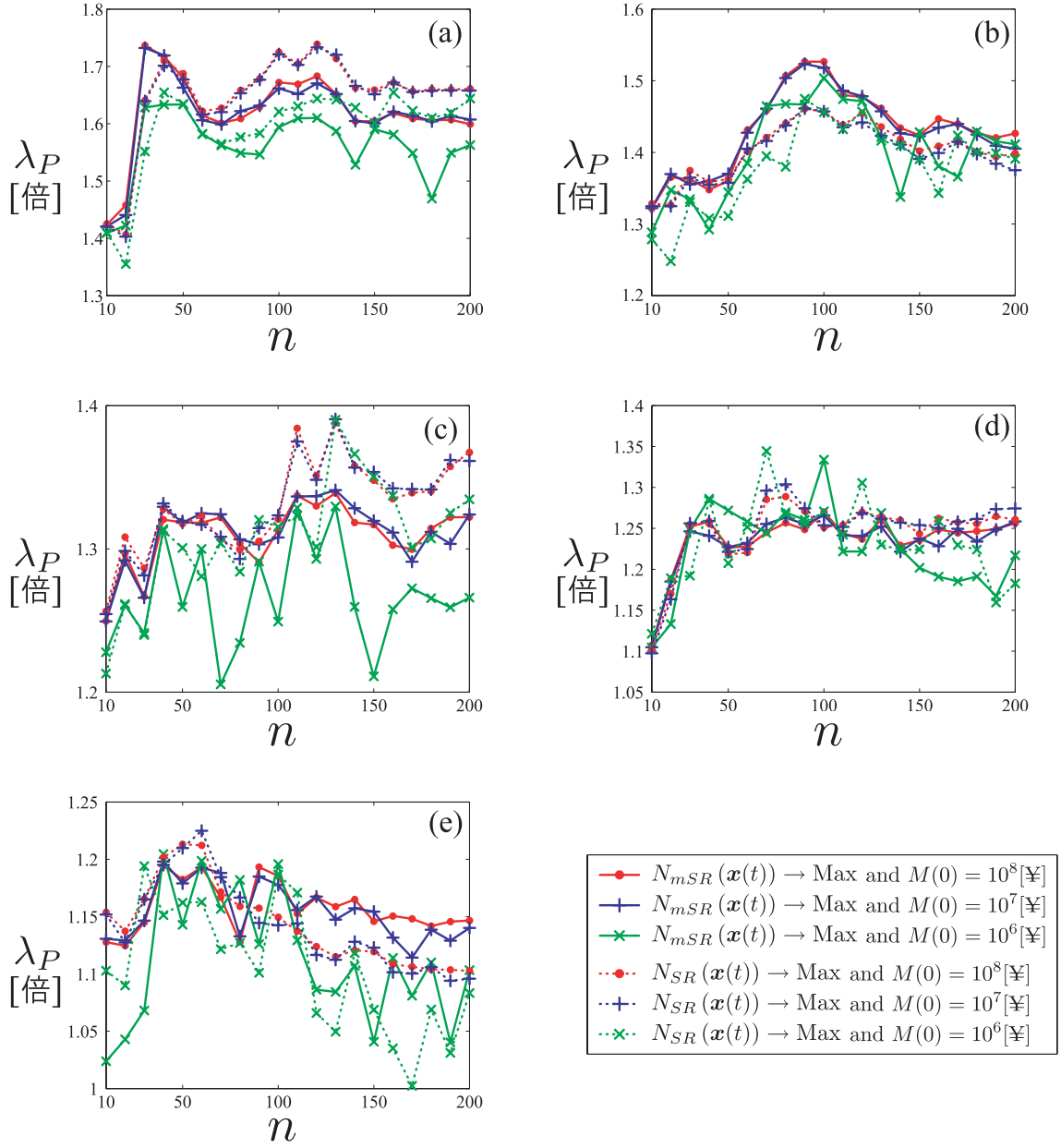


図 23: 図 20 と同様、ただしプロフィットファクター λ_P の結果。

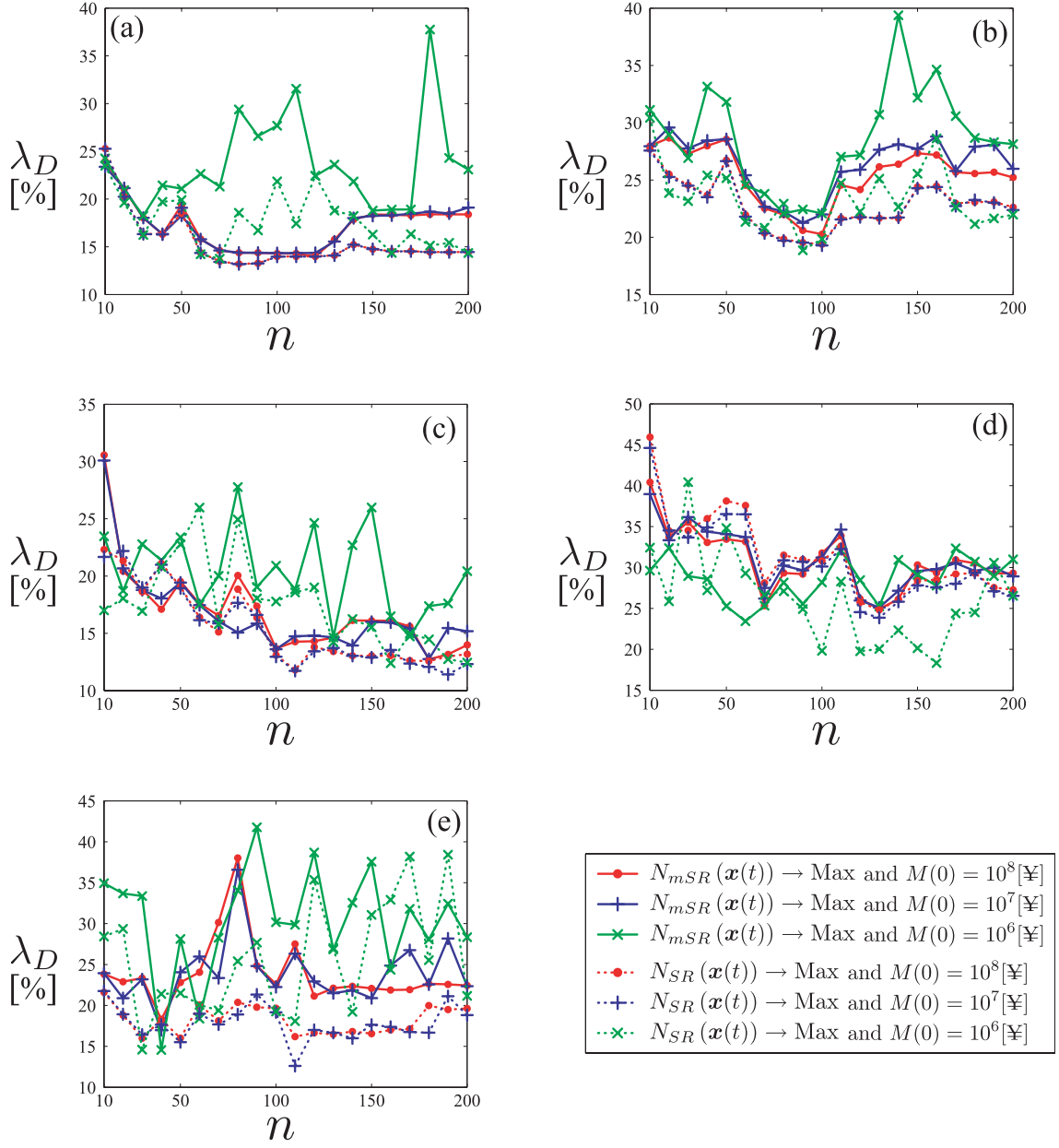


図 24: 図 20 と同様. ただし最大ドロウダウン率 λ_D の結果.

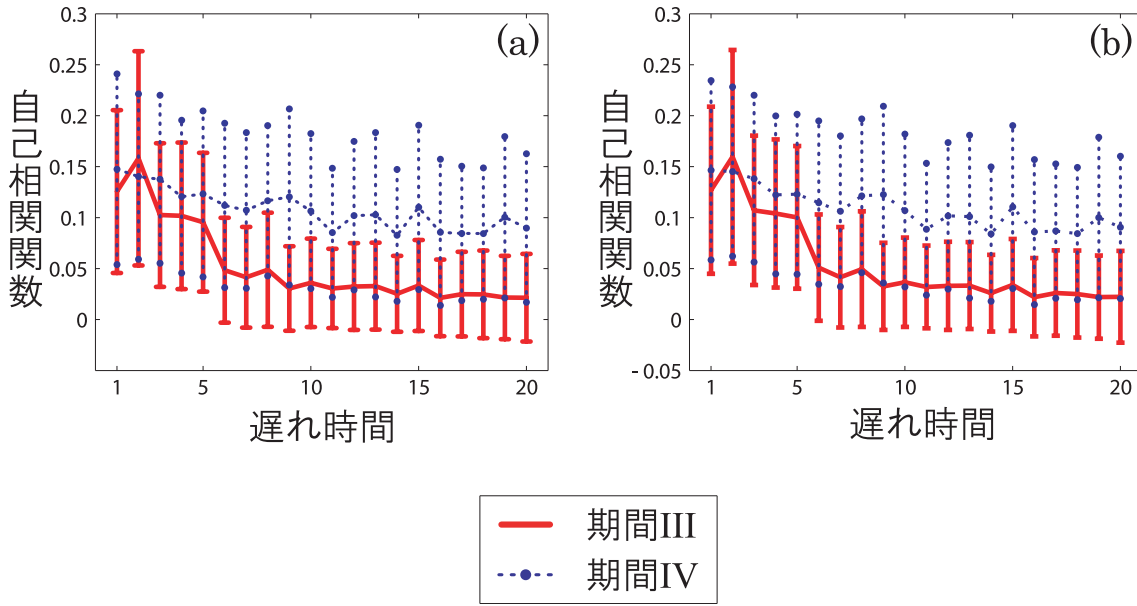


図 25: 各期間における自己相関関数:(a) 二乗収益率 $r_{i,1}^2(t)$, (b) 非線形予測の二乗誤差 $e_{i,1}^2(t)$ の結果. 平均値と標準偏差をエラーバーによって示した. 各期間については 8.3 章にて述べる.

8 より効率的な資産運用戦略

8.1 リスク推定に対する DCC モデルの適用

これまでに提案した NAR ポートフォリオモデルでは, 式 (41)~(43) のように, 過去の予測誤差 $e_{i,s}(t-as)$ の標本平均を将来のリスクと見なしている. これは式 (10)(11) の平均分散ポートフォリオモデルの推定方法を単純に活用したためである. これは期待収益率の場合と同様に, 時刻の経過とともに標本データも変化するため, リスクを単純移動平均値で推定していると見なすことができる. しかしこれは, 予測誤差 $e_{i,s}(t+s)$ の有しているかもしれない情報を活用せずに推定していることに相当する. そこで本章では, 予測誤差の有する情報について確認, モデル化を行い, リスクをより正しく推定することを試みる. さらによりリスクを低減する取引方法を導入し, より効率的な投資戦略について説明する.

8.1.1 GARCH モデル

ファイナンスの世界では, 二乗収益率 $r_{i,s}^2(t+s)$ をボラティリティと呼ぶ. そして多くの金融市場では, ボラティリティには図 25 のような長期自己相関性を有することが知られている. これはボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる. さらにこの性質は, NAR 予測の二乗誤差データからも確認できる. したがって NAR ポートフォリオモデルのリスク推定は, 式 (41)~(43) のような SMA 予測値ではなくこの特性を利用したモデルを構築することで, リスクの推定精度を向上できることを示唆している.

一般化自己回帰条件付分散不均一 (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity: GARCH) モデル [31] は, この特徴を表現するモデルである. まずモデルを適用する前に, 収益率過

程 $r_{i,s}(t)$ を以下のように定式化する.

$$\begin{aligned} r_{i,s}(t+s) &= \hat{r}_{i,s}(t+s) + e_{i,s}(t+s) \\ e_{i,s}(t+s) &= \sigma_{i,s}(t+s)\varepsilon_{i,s}(t+s) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\varepsilon_{i,s}(t+s) \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (66)$$

つまり

$$\begin{aligned} \text{Var}_t[r_{i,s}(t+s)] &= \text{E}_t \left[(r_{i,s}(t+s) - \hat{r}_{i,s}(t+s))^2 \right] \\ &= \text{E}_t [e_{i,s}^2(t+s)] \\ &= \sigma_{i,s}^2(t+s) \text{E}_t [\varepsilon_{i,s}^2(t+s)] \\ &= \sigma_{i,s}^2(t+s) \end{aligned}$$

となるため式 (3) と整合する.

そして GARCH モデルは, 過去の予測誤差 $e_{i,s}(t)$ からリスク $\hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s)$ を以下のように定式化する.

$$\hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s) = \beta_0 + \beta_1 e_{i,s}^2(t+s) + \beta_2 \hat{\sigma}_{i,s}^2(t) \quad (67)$$

ここでこの式を展開すると,

$$\hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s) = \beta_0 \sum_{a=0}^{\infty} \beta_2^a + \beta_1 \sum_{a=0}^{\infty} \beta_2^a e_{i,s}^2(t-as) \quad (68)$$

となり, 予測誤差 e_i^2 に関する長期自己相関構造によってリスクを推定していると解釈できる [31].

予測モデルの係数 $\theta_1 = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2\}$ は, 最尤法によって推定することができる. 式 (65)(66) より $\{e_{i,s}(t)\} = \{\varepsilon_{i,s}(t)/\sigma_{i,s}(t)\}$ は標準正規分布となるため, 対数尤度関数 $\ell(\theta_1)$ は

$$\begin{aligned} \ell(\theta_1) &= \log \left(\sum_{a=1}^{L_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_{i,s}^2(t-(a-1)s)}} \exp \left(-\frac{e_{i,s}^2(t-(a-1)s)}{2\hat{\sigma}_{i,s}^2(t-(a-1)s)} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{L_s} \left(\log 2\pi + \log \hat{\sigma}_{i,s}^2(t-(a-1)s) + \frac{e_{i,s}^2(t-(a-1)s)}{\hat{\sigma}_{i,s}^2(t-(a-1)s)} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

となり, この式を最大化する係数 θ_1 を採用する. なお $\hat{\sigma}_{i,s}(t) \geq 0$ であるため, $\beta_a \geq 0$ が課される. そして式 (41) における SMA 予測は,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 0 \\ \beta_1 &= \begin{cases} 1/T & (a \leq T) \\ 0 & (a \geq T+1) \end{cases} \\ \beta_2 &= 1 \end{aligned}$$

に制約した GARCH モデルに相当する.

8.1.2 DCC モデル

ポートフォリオのリスク $\hat{\sigma}_{p,s}(t+s)$ を推定する場合, 各銘柄の分散 $\hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s)$ だけでなく, 各銘柄間の共分散 $\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s)$ も推定する必要がある. 本研究では儉約的なパラメータ数でありながら, 各銘柄

間の相関構造の時変性も推定できる条件付き時変相関モデル (Dynamical Conditional Correlation: DCC) [75, 76] を導入する.

単銘柄の場合と同様に, n 銘柄 GARCH モデルは以下のように表現される.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s(t+s) &= \hat{\mathbf{r}}_s(t+s) + \mathbf{e}_s(t+s) \\ \mathbf{e}_s(t+s) &= \hat{\mathbf{H}}_s^{1/2}(t+s) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(t+s) \end{aligned} \quad (70)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(t+s) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n) \quad (71)$$

すると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[(\mathbf{r}_s(t+s) - \hat{\mathbf{r}}_s(t+s))(\mathbf{r}_s(t+s) - \hat{\mathbf{r}}_s(t+s))] &= \mathbb{E}_t[\mathbf{e}_s(t+s)\mathbf{e}_s^t(t+s)] \\ &= \hat{\mathbf{H}}_s(t+s) \end{aligned}$$

となるため, 式 (6)(7) と整合する.

Engle の提案した DCC モデル [75] は, まず分散共分散行列の推定値 $\hat{\mathbf{H}}_s(t+s)$ を以下のように分解する.

$$\hat{\mathbf{H}}_s(t+s) = \hat{\mathbf{D}}_s(t+s) \hat{\mathbf{R}}_s(t+s) \hat{\mathbf{D}}_s(t+s) \quad (72)$$

ここで $\hat{\mathbf{D}}_s(t+s)$ は, 式 (67) の GARCH モデルによって推定された各銘柄のリスクを対角成分に取めた対角行列である.

$$\hat{\mathbf{D}}_s(t+s) = \text{diag}[\hat{\sigma}_{1,s}(t+s), \hat{\sigma}_{2,s}(t+s), \dots, \hat{\sigma}_{n,s}(t+s)] \quad (73)$$

また $\hat{\mathbf{R}}_s(t+s)$ は相関行列の推定値であるため, 対称行列かつ対角成分が全て 1 とならなくてはならない. したがって相関行列 $\hat{\mathbf{R}}_s(t+s)$ は以下のように予測される.

$$\hat{\mathbf{R}}_s(t+s) = \hat{\mathbf{Q}}_s'^{-1}(t+s) \hat{\mathbf{Q}}_s(t+s) \hat{\mathbf{Q}}_s'^{-1}(t+s) \quad (74)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_s(t+s) = (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \bar{\mathbf{Q}}_s(t) + \gamma_1 \boldsymbol{\varepsilon}_s(t) \boldsymbol{\varepsilon}_s^t(t) + \gamma_2 \hat{\mathbf{Q}}_s(t) \quad (75)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_s(t+s) = \frac{1}{m} \sum_{a=1}^m \boldsymbol{\varepsilon}_s(t - (a-1)s) \boldsymbol{\varepsilon}_s^t(t - (a-1)s) \quad (76)$$

ここで対称行列 $\hat{\mathbf{Q}}_s(t+s)$ の各成分を $\hat{q}_{ij,s}(t+s)$ とすると,

$$\hat{\mathbf{Q}}_s'(t+1) = \text{diag} \left[\sqrt{\hat{q}_{11,s}(t+s)}, \sqrt{\hat{q}_{22,s}(t+s)}, \dots, \sqrt{\hat{q}_{nn,s}(t+s)} \right] \quad (77)$$

である. また式 (72) より, $\hat{\mathbf{Q}}_s(t+s)$ は標準化誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}_s(t) \left(= [\mathbf{e}_s^t(t) \hat{\mathbf{D}}_s^{-1}(t)]^t \right)$ の共分散行列を表しており, この式を展開すると,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_s(t+s) &= (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \sum_{a=1}^{L-m} \gamma_2^a \bar{\mathbf{Q}}_s(t - (a-1)s) \\ &\quad + \gamma_1 \sum_{a=1}^{L-m} \gamma_2^a \boldsymbol{\varepsilon}_s(t - (a-1)s) \boldsymbol{\varepsilon}_s^t(t - (a-1)s) \end{aligned} \quad (78)$$

となる. これは式 (68) と同様に, 予測誤差 $e_{i,s}(t)$ に関する長期自己相関構造をリスク推定に利用している. そのため本モデルは, GARCH モデルを多変量タイプに拡張したモデルである. 図 26 から分かるように, $i \neq j$ 間の予測誤差にも長期にわたる自己相関構造を確認でき, DCC モデルによって推定精度の向上を期待できる.

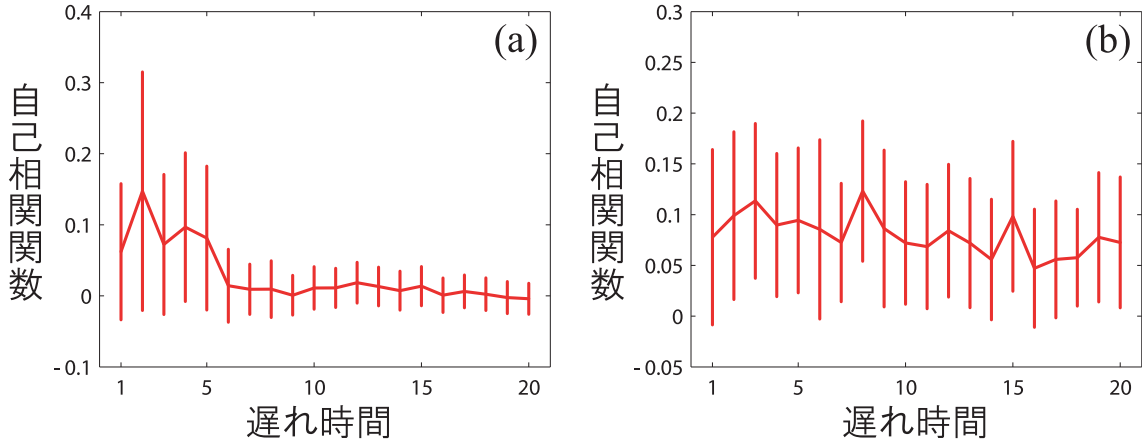


図 26: 非線形予測の予測誤差 $e_{i,1}(t)e_{j,1}(t)$ の自己相関関数:(a) 期間 III, (b) 期間 IV の結果. 平均値と標準偏差をエラーバーによって示した.

なお, 式 (43) の平均分散ポートフォリオモデルのリスク $\hat{H}_s(t+s)$ は, 以下の制約を課した DCC モデルによって推定していると見なすことができる.

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{r}}_s(t-as) &= \bar{\mathbf{r}}_s(t) \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_s(t-as) &= \mathbf{r}_s(t-as) - \bar{\mathbf{r}}_s(t) \\
 m &= T \\
 \beta_0 &= 0 \\
 \beta_1 &= \begin{cases} 1/T & (a \leq T) \\ 0 & (a \geq T+1) \end{cases} \\
 \beta_2 &= 1 \\
 \gamma_1 &= 0 \\
 \gamma_2 &= 0
 \end{aligned}$$

式 (75) におけるモデル係数 $\boldsymbol{\theta}_2 = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ は最尤法によって推定される. 特に DCC モデルの場合, まず共分散行列 $\hat{H}_s(t+s)$ の対角成分 $\hat{\sigma}_{i,s}^2(t+s)$ を推定後, 共分散 $\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s), (i \neq j)$ を推定する. つまり $\boldsymbol{\theta}_1$ を推定後, $\boldsymbol{\theta}_2$ を推定するため, 二段階最尤法と呼ばれる [95]. 対数尤度関数 $\ell(\boldsymbol{\theta}_2|\boldsymbol{\theta}_1)$ は

$$\ell(\boldsymbol{\theta}_2|\boldsymbol{\theta}_1) = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{L-M} \left(\log \left| \hat{\mathbf{R}}_s(t-(a-1)s) \right| + \boldsymbol{\varepsilon}_s^t(t-(a-1)s) \hat{\mathbf{R}}_s^{-1}(t-(a-1)s) \boldsymbol{\varepsilon}_s(t-(a-1)s) \right) \quad (79)$$

となり, この式を最大化することで最適な係数 $\boldsymbol{\theta}_2$ が得られる. ここで $\hat{\mathbf{H}}_s(t)$ が正定値行列となるために $\gamma_a \geq 0$ かつ $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$ の制約が課される. また $\hat{\mathbf{R}}$ が適切な相関行列となるためには, 式 (76) において $m \geq n$ を満たす必要がある [75]. ここでは 5 章で設定した T と比較するため, 1 年分とした. なお, 期待収益率 $\hat{r}_{i,s}(t+s)$ を式 (26) の NAR 予測, リスク $\sigma_{ij,s}(t+s)$ を式 (72) の DCC モデルによって推定するポートフォリオモデルを, 本研究では「NAR-DCC ポートフォリオモデル」と呼ぶ.

表 2: 表 1 と同様、ただし、期間 III および期間 IV の全銘柄に対する予測精度。

	期間 III		期間 IV	
	SMA 予測	NAR 予測	SMA 予測	NAR 予測
$\bar{\xi}$	-0.057	0.016	-0.047	0.012
$\max \{\xi_i\}$	0.041	0.237	0.082	0.300
$\min \{\xi_i\}$	-0.196	-0.142	-0.142	-0.166

8.2 ロングショート戦略

ポートフォリオのリスク分散効果は、式 (8) の相関係数 $\rho_{ij,s}(t+s)$ が大きく関与しており、値が小さいほどその効果は高い。しかし図 1 のように、現実の市場において、各銘柄の連動性は非常に高い。つまり式 (13)(14) のようにロングポジションのみ ($x_i(t) \geq 0$) またはショートポジションのみ ($x_i(t) \leq 0$) である場合、式 (44) の右辺第二項は $x_i(t)x_j(t)\hat{\sigma}_{i,s}(t+s)\hat{\sigma}_{j,s}(t+s) \geq 0$ になる傾向があるため、ポートフォリオのリスク $\hat{\sigma}_{p,s}(t+s)$ は大きく低減しない。

そこで本研究では、以下のロングショート戦略を活用する。

$$\begin{cases} \max. & N_{mSR}(\mathbf{x}(t)) \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in I^+} x_i(t) = 0.5, I^+ = \{i | x_i(t) > 0\} \\ & \sum_{i \in I^-} x_i(t) = -0.5, I^- = \{i | x_i(t) < 0\} \end{cases} \quad (80)$$

一般的に説明されるロングショート戦略は、株価の値上がりに対する利益だけでなく、空売りによる株価の値下がりからも利益を獲得できる機会が生まれるため、よりアクティブな運用ができるということである。本戦略の有用性は、高いリスク分散効果もある。購入と空売りを同時に行うロングショート戦略では $x_i(t)$ と $x_j(t)$ は異符号とすることができるため、 $x_j(t)x_i(t)\hat{\sigma}_{ij,s}(t+s) \leq 0$ になりやすく、リスク $\hat{\sigma}_{p,s}(t+s)$ を大きく低減させることができる。

8.3 投資シミュレーション

8.1 章で述べた DCC モデルを活用したリスク推定、そして 8.2 章で説明したロングショート戦略による高いリスク分散効果を検証すべく、以下の 2 期間のデータを用いてシミュレーションを行う。

III) 2001 年 1 月 3 日から 2008 年 12 月 30 日までの東京証券取引所一部上場企業 670 銘柄、8 年間の初期の学習データとし、2009 年 1 月 3 日から 2012 年 12 月 30 日までの 4 年間を評価データ [85]

IV) 2001 年 1 月 3 日から 2008 年 12 月 30 日までのニューヨーク証券取引所一部上場企業 499 銘柄、8 年間の初期の学習データとし、2009 年 1 月 3 日から 2012 年 12 月 30 日までの 4 年間を評価データ [85]

まず表 2 に各期間の予測結果をまとめる。この期間においても、表 1 と同じように NAR 予測の平均予測精度は正であり、かつ SMA 予測よりも高い精度を有している。Wilcoxon の符号順位検定を行った結果も、期間 III では $Z_{\text{NAR,SMA}} = 16.705$ かつ期間 IV では $Z_{\text{NAR,SMA}} = 9.278$ であることから、信頼度 95 [%] で NAR 予測モデルの予測精度は有意に高い。次に、図 27 に尤度 $\{\eta_i\}$ と予測精度 $\{\xi_i\}$ の相関図を示す。図 3 と同様に正の相関関係を確認できる。そのため尤度に基づく銘柄厳選が、予測精度の高いポートフォリオが構築できることを意味している。

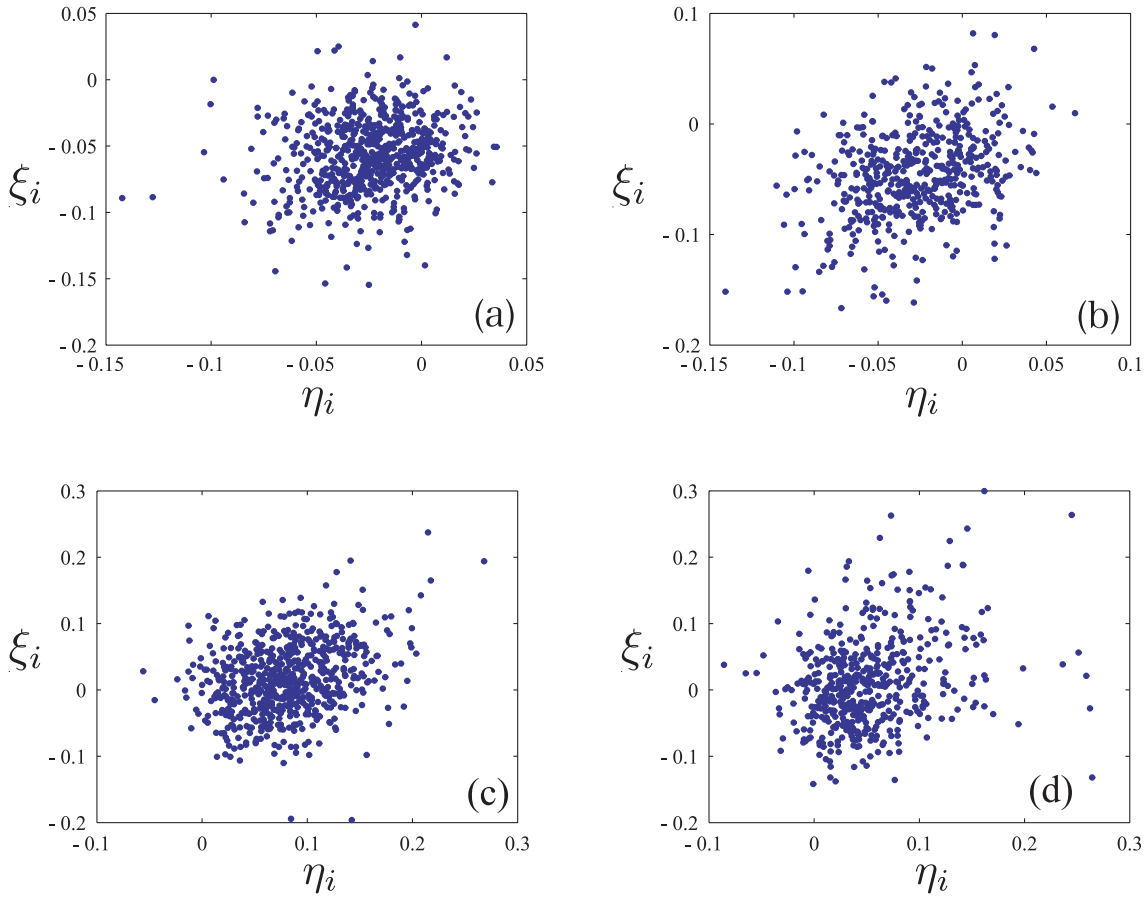


図 27: 予測モデルの尤度 $\{\eta_i\}$ と予測精度 $\{\xi_i\}$ の相関図:(a),(b)SMA 予測, (c),(d)NAR 予測の場合. なお, (a),(c) は期間 III, (b),(d) は期間 IV の結果. それぞれの相関係数は (a)0.159,(b)0.351,(c)0.304,(d)0.263 である.

次に, 実際に投資シミュレーションを行う. 前章の結果より短期取引であるほど良好な結果が得られたため, 本章では $s = 1$ のパフォーマンスを比較する. また, より詳細に検証すべく尤度 η_i が高い上位 100 銘柄を利用し, $n = 2, 3, \dots, 100$ までの投資シミュレーションの結果を示す. さらに無リスク資産には, 期間 III では 6 章と同様に無担保コールレート翌日物 [86] を, 期間 IV ではフェデラルファンドレート [94] を利用した. なお無リスク資産の資産増幅率 λ_A は, 期間 III では 1.0036 (年利約 [0.09%]), 期間 IV では 1.0040 (年利約 [0.1%]) であった.

8.3.1 ロングショート戦略の有用性

まず各ポートフォリオモデルに対するロングショート戦略の有効性を検証する. 期間 III の結果を図 28~30 に示す.

ロングショート戦略の議論の前に, この期間においてバイアンドホールド戦略の資産増幅率 λ_A は良い結果を示している. これは 2008 年 9 月 15 に発生したリーマンショックが関与している. 期間 III では投資開始を 2009 年からとしており, 株価が低迷していた時期に購入し, その後大きく上昇したためである. 2011 年 3 月 11 日に東日本大地震があったため, 途中で低下したが, 大きな利益を獲得することには成功した.

次に、図 28,29 の単銘柄投資において SMA 予測は $\lambda_A < 1$ であるため、予測は有効でないことを確認できる。さらに、図 28 のロングショート型平均分散ポートフォリオモデルを利用した場合、最大ドローダウン率 λ_D は 90 [%] を超えており、この期間においてポートフォリオを構築するメリットは確認できなかった。しかしリスク源泉分散ポートフォリオを活用した場合、図 29 に示すように最大ドローダウン率は平均分散ポートフォリオモデルと比較して改善を確認できる。最後に図 30 の非線形ポートフォリオモデルでは、資産増幅率は 10 倍以上になっており、勝率やプロフィットファクターも良好な結果が得られた。しかし、この期間における最大ドローダウン率は 50 [%] を超えており、この面では単銘柄投資の結果のほうが良い結果を示している。

一方、式 (80) のロングショート戦略を導入した場合は、どのポートフォリオモデルにおいても非常に良い結果が得られた。ポートフォリオの構築銘柄数 n が上昇するほど最大ドローダウンは減少し、平均分散ポートフォリオモデルであっても 30 [%] 以下を実現している。さらに本戦略はロング or ショート戦略と比較して、損失を抑えることができており、しかしプロフィットファクターは同程度であることから、ロングショート戦略は損失を抑えるためのみに働いたといえる。さらに図 30 の NAR ポートフォリオモデルにおいては、資産増幅率は減少したが、効率性を表す指標は非常に良好な結果を示している。なおかつ、最大ドローダウン率も 50 [%] から 3 [%] にまで抑えることができており、つまり NAR ポートフォリオモデルにロングショート戦略を適用することで、低損失かつ高効率なポートフォリオを構築できる。

次に期間 VI の結果を図 31~33 に示す。これらの期間は期間 III よりバイアンドホールド戦略の有用性が高くなっている。米国市場では日本市場よりリーマンショックの影響は大きく、そして東日本大震災の影響は小さかった。それが資産増幅率の向上に起因している。また SMA 予測による単銘柄投資もより良好な結果が得られている。これは株価の上昇という安定したトレンドを有していたこと、さらに図 26(c) のように銘柄の厳選が良好であったことが理由である。さらにこれらの期間でも、ロング or ショート型ポートフォリオモデルの有用性は低い。一方、図 33 は NAR 予測法を活用した結果であり、 $n = 13$ のときの単銘柄投資の平均資産増幅率 λ_A は圧倒的に増加している。これは尤度 $\{\eta_i\}$ において上位から 13 番目の銘柄において、単銘柄投資の λ_A が 658.316 [倍] (年利約 407 [%]) と驚異的な結果を示す銘柄が存在したためである。さらにロング or ショート戦略においても、この銘柄がポートフォリオに良好な結果をもたらしている。一方、ロングショート戦略を導入した場合、どのポートフォリオモデルにおいても最大ドローダウン率 λ_D は大きく低下している。また NAR ポートフォリオモデルでは、資産増幅率 λ_A は低下するが、投資の効率性を表す指標 $\lambda_W, \lambda_R, \lambda_P$ や最大ドローダウン率 λ_D は良好な結果を示している。そのため期間 III と同様に、ロングショート戦略は低損失かつ高効率な資産運用に貢献することが分かった。

8.3.2 NAR-DCC ポートフォリオモデルの有用性

ロングショート戦略の有用性を確認できたため、次に NAR-DCC ポートフォリオモデルの有用性を確認すべく、投資シミュレーションを行った。ロングショート戦略を用いて、期間 III の結果を図 34、期間 IV の結果を図 35 に示す。まず期間 III では、平均分散ポートフォリオモデルよりも、リスク源泉分散ポートフォリオのほうが良好なパフォーマンスを発揮している。期間 IV においても最大ドローダウンが低下していることから、SMA 予測による期待収益率を活用しないほうが良好な結果が得られることを確認できた。一方、NAR 予測を導入した場合は 5 つの指標全てが改善している。次に、長期記憶性に基づいてリスクを推定する NAR-DCC ポートフォリオモデルは、予測誤差の標本平均をリスクとする NAR ポートフォリオモデルと比較して同等以上のパフォーマンスを発揮している。期間 III においては、資産増幅率 λ_A が同程度であるのに対し、銘柄数 n を増加する毎に、特にリスクリワードレシオ λ_R が向上する。この結果はプロフィットファクター λ_P に影響し、NAR

ポートフォリオモデルでは $\lambda_P = 3.5$ [倍] 程度であるのに対し, NAR-DCC ポートフォリオモデルでは $\lambda_P = 5$ [倍] まで向上している. また最大ドローダウン率 λ_D も低下できている. 図 35 の期間 IV の結果では, 構築銘柄数 n が小さいときにはプロフィットファクター λ_P が NAR ポートフォリオモデルと同程度であったのに対し, $n \geq 60$ では超越している. 結果として, 資産増幅率および最大ドローダウンは同程度でありながらプロフィットファクターは高いため, NAR-DCC ポートフォリオモデルは最も有用性が高いことが確認できた.

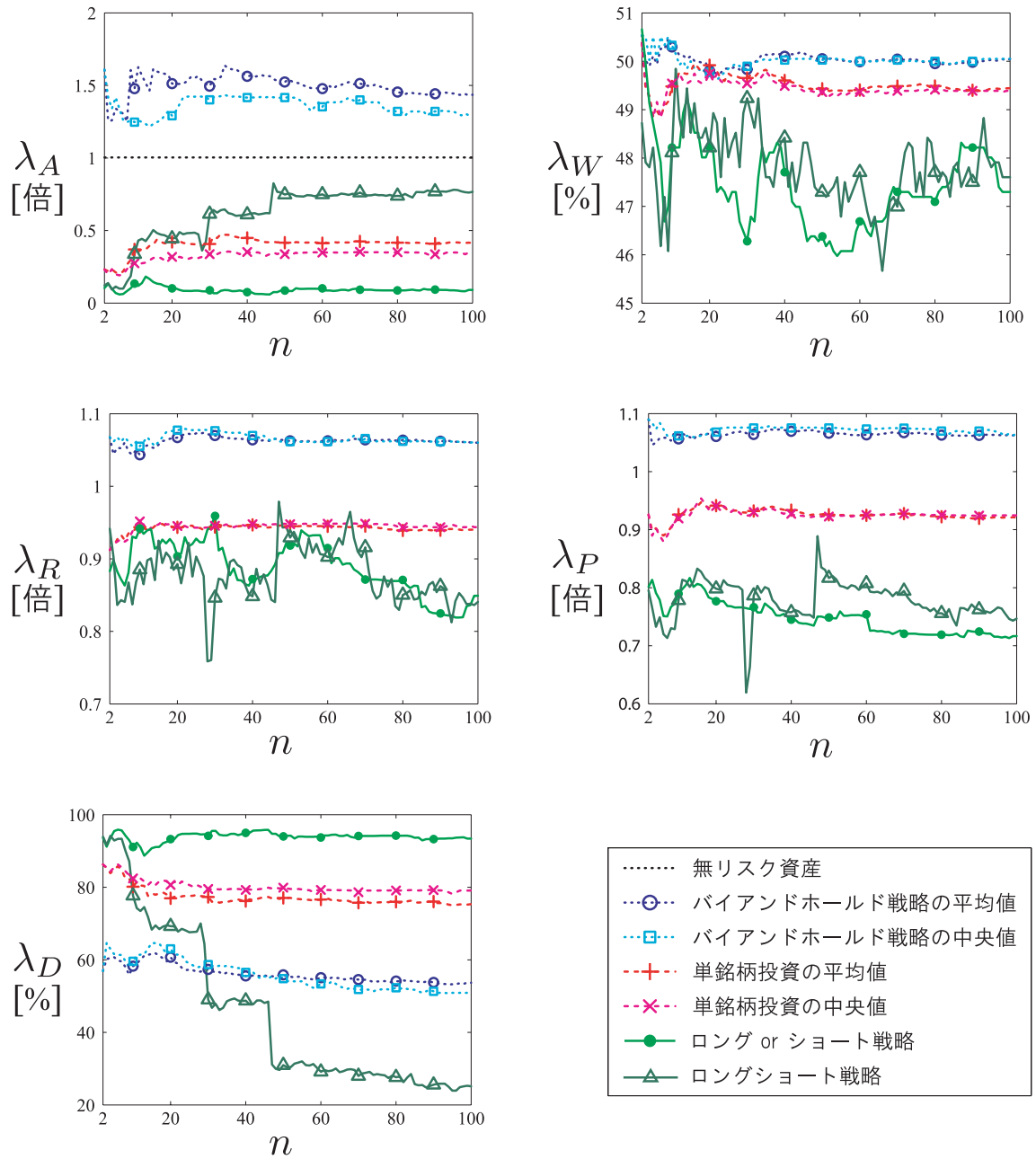


図 28: 平均分散ポートフォリオモデルに基づいたロング or ショート戦略およびロングショート戦略による投資結果。ただし期間 III の場合。

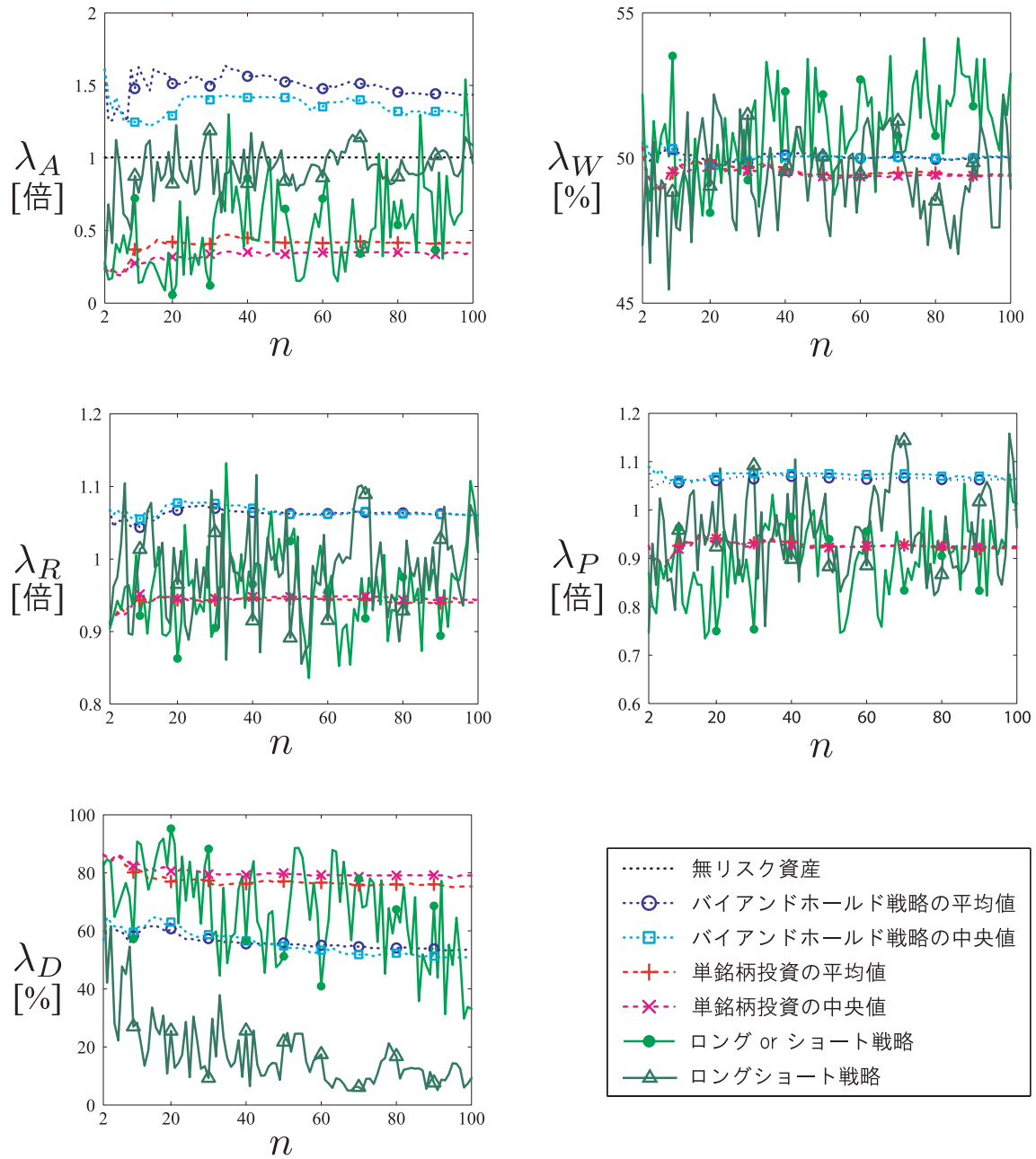


図 29: リスク源泉分散ポートフォリオモデルに基づいたロング or ショート戦略およびロングショート戦略による投資結果, ただし期間 III の場合.

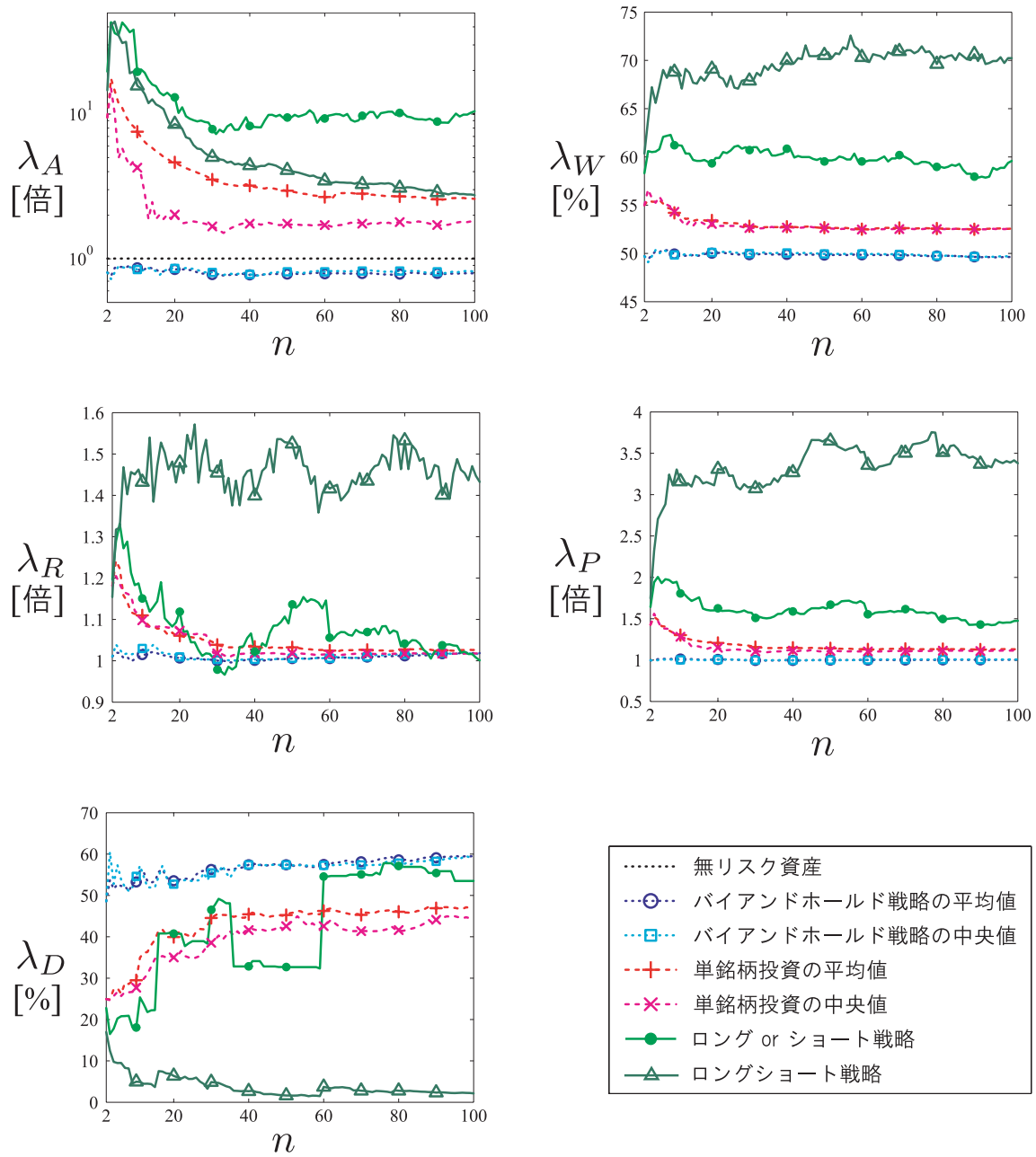


図 30: NAR ポートフォリオモデルに基づいたロング or ショート戦略およびロングショート戦略による投資結果, ただし期間 III の場合.

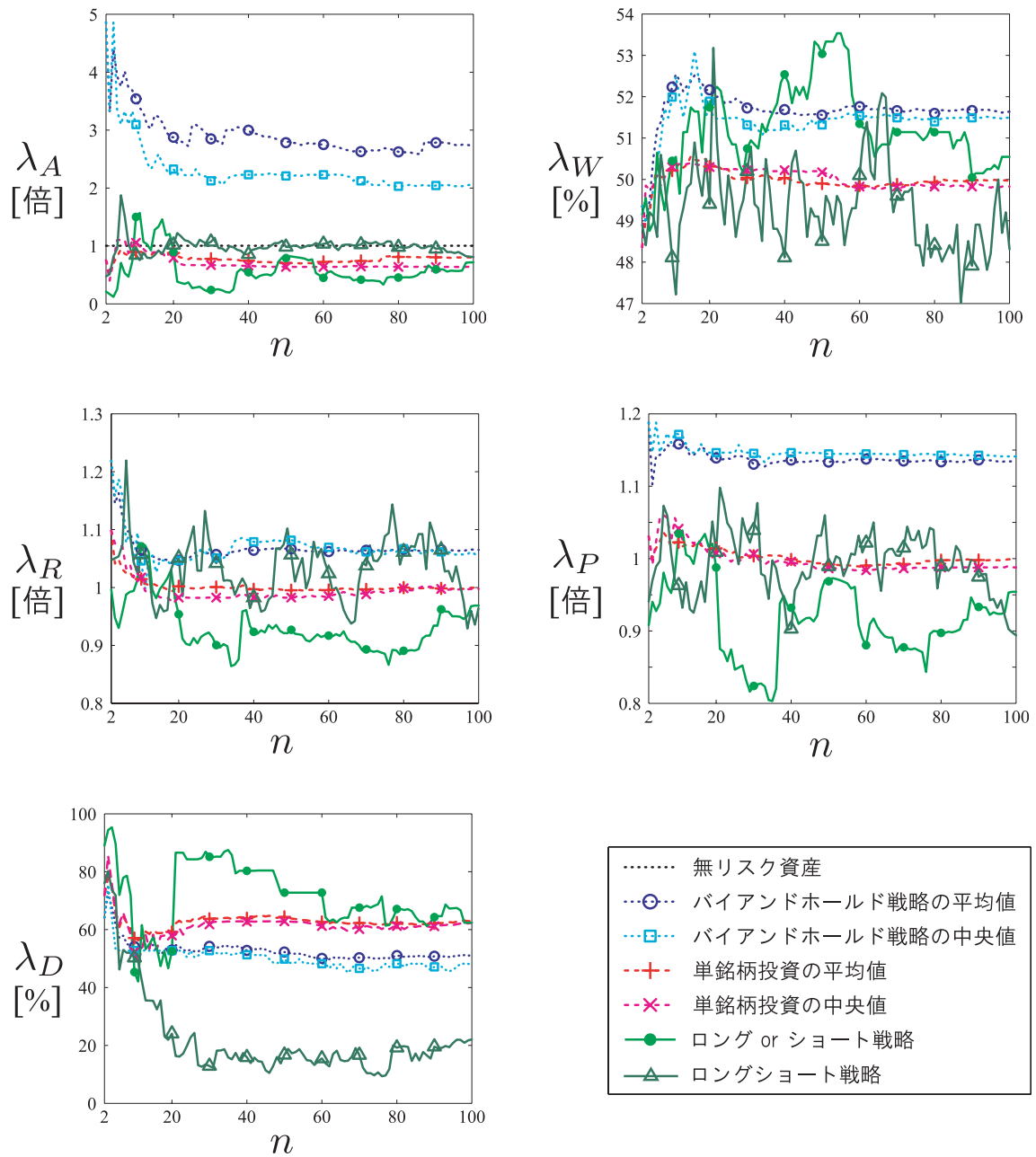


図 31: 図 28 と同様. ただし, 期間 IV における結果.

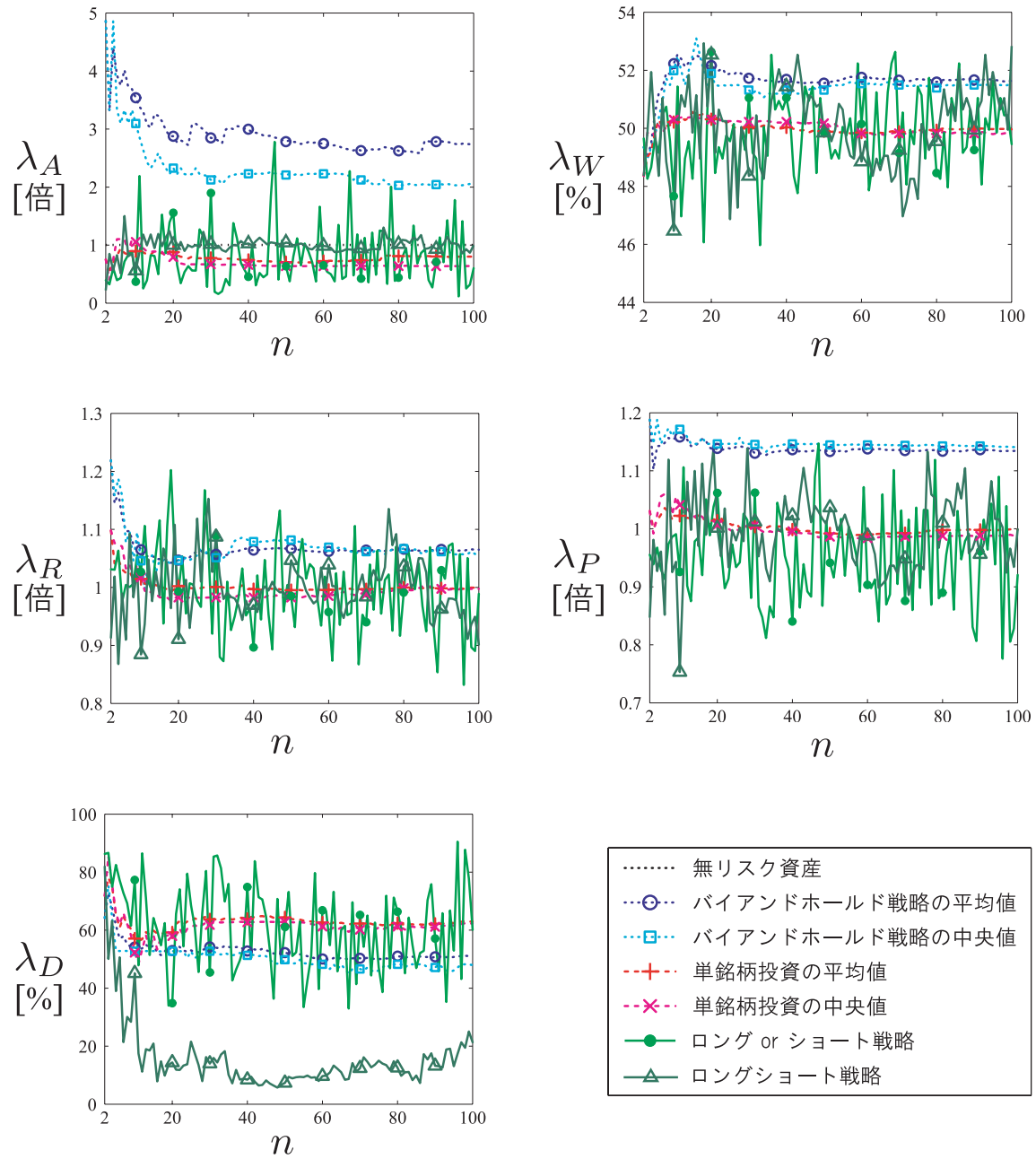


図 32: 図 29 と同様. ただし, 期間 IV における結果.

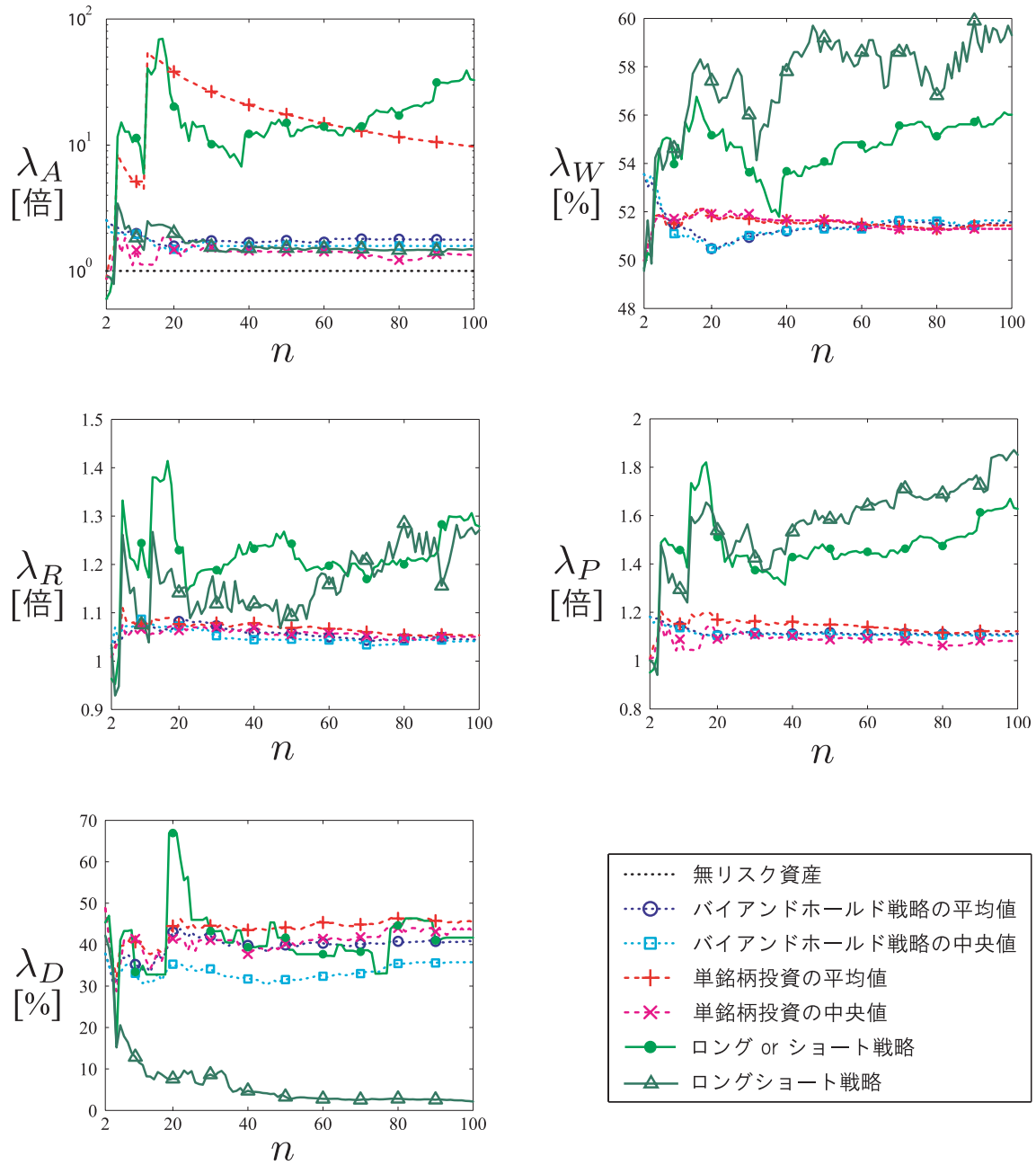


図 33: 図 30 と同様, ただし, 期間 IV における結果.

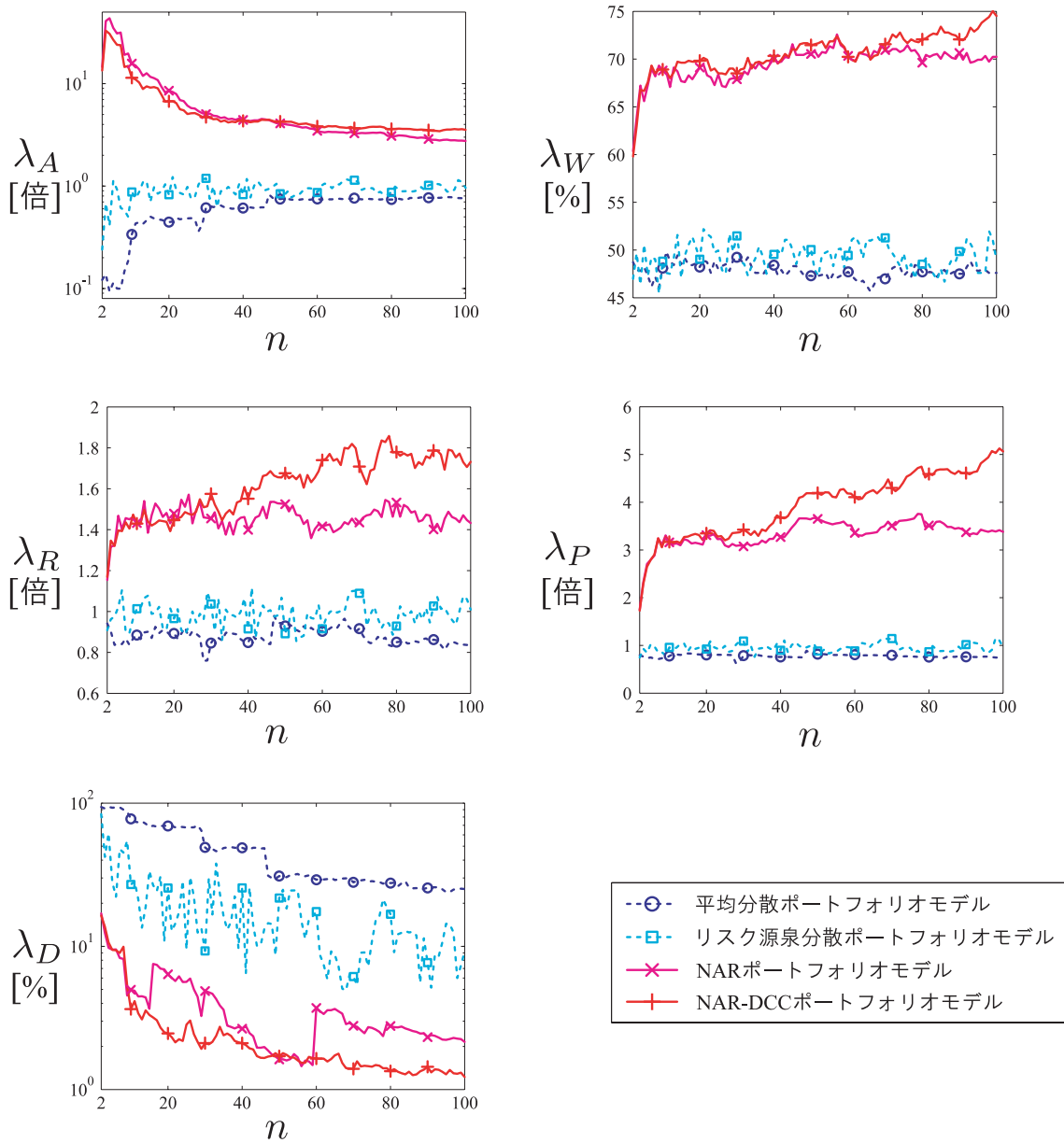


図 34: 従来および提案したポートフォリオモデルにおいてロングショート戦略を適用した際の投資結果。ただし期間 III の場合。

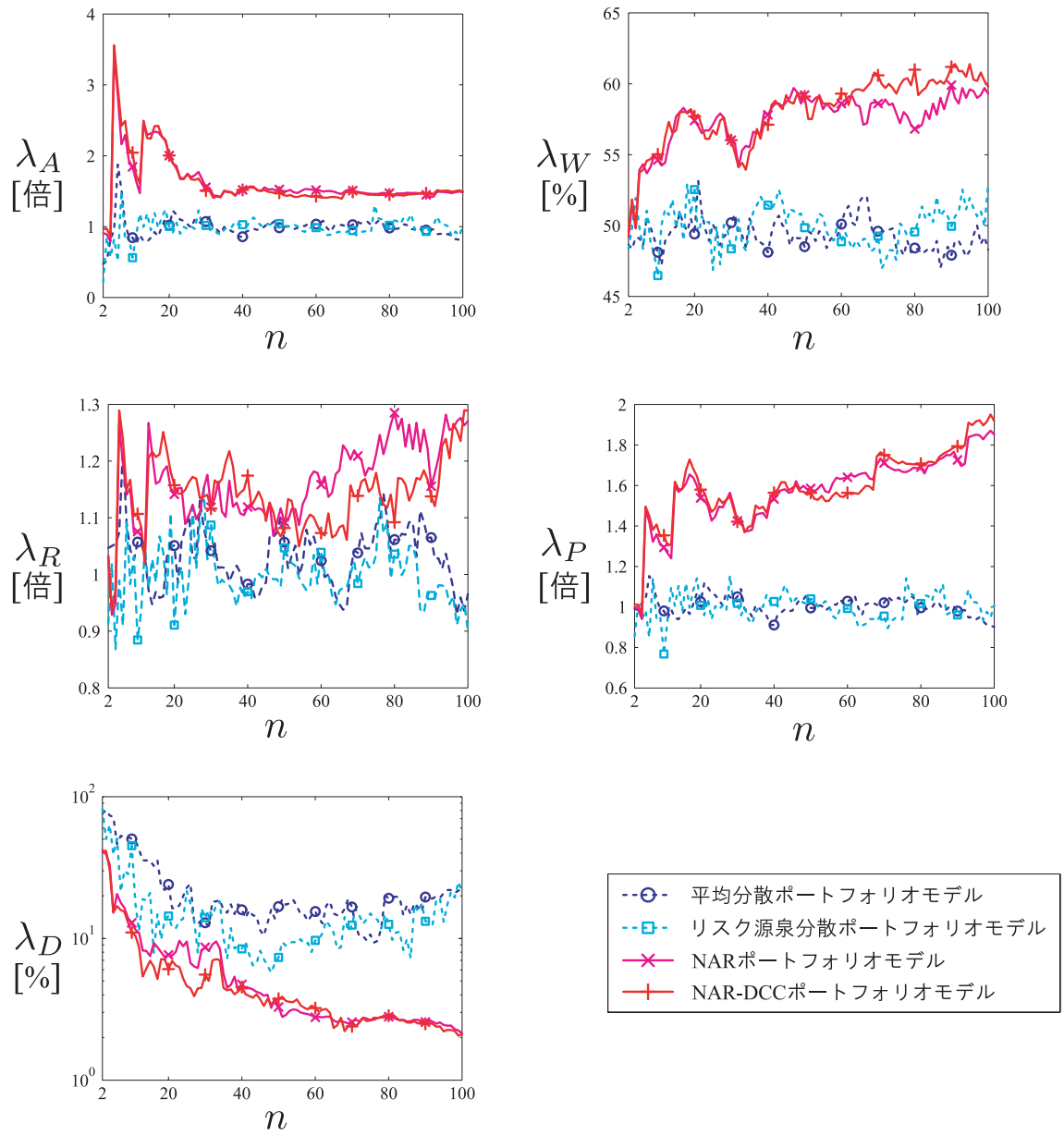


図 35: 図 34 と同様, ただし期間 IV の場合.

9 まとめ

Markowitz の平均分散ポートフォリオモデルでは、過去の収益率の単純移動平均値によって期待収益率の予測がなされていると解釈できる。そこで、より高次の時系列予測モデルを既存のポートフォリオ理論に導入する方法を検討した。ここで単純移動平均予測以外の予測値を期待収益率とみなすには、リスクの評価式を変更する必要がある。リスクの原義を考えると、予測誤差の期待値がリスクと考えられるため、過去の予測誤差に基づいて推定した。

このような変更の効果があるのかを検証すべく、実際の株価データを用いてシミュレーションを行った。まず各予測モデルで収益率を予測したところ、単純移動平均予測と比較して、高次の予測モデルの予測精度が優位に高いことを確認した。また各予測モデルの尤度と予測精度に正の相関関係を確認できた。したがって尤度を参照することで、収益率を推定し易い銘柄を選択することができ、これらの銘柄を優先的に利用してポートフォリオを構築した。これらのポートフォリオによる投資シミュレーションを行ったところ、高い予測精度かつ高いリスク分散効果を発揮でき、リーマンショック前では最大年利約 191[%]、リーマンショック後であっても最大年利約 77[%] を実現した。さらに単銘柄投資の場合と比較して低リスクかつ高収益な資産運用を行えることを確認した。

さらに現実の取引において発生する、取引手数料と端株処理を考慮しても十分な利益を獲得できるか検証した。この制約の下でリバランスを積極的に行った場合、取引手数料が増加する。一方でリバランス頻度を低下させると、市場のトレンドに高速に対応できないデメリットがあり、さらに長期予測をする必要が発生する。本研究では短期収益率データを説明変数とし、多ステップ予測をすることでモデルパラメータの誤推定を抑える手法を提案したが、それでも長期予測では予測精度が低下するデメリットも確認された。さらに投資シミュレーションを行ったところ、平均分散ポートフォリオモデルではそもそも予測が困難であり、短期リバランスによるメリットを確認できなかった。その結果、バイアンドホールド戦略であればより安定するため、この戦略が有用であるという先行研究を支持する結果が得られた。一方、高次予測モデルを導入したポートフォリオモデルにおいては、取引手数料が増加するデメリットが存在しても、短期リバランスであるほど良好であるという結果が得られた。つまりアクティブ運用は有用であり、先行研究を否定する結果が得られた。さらに初期資産が少ないほど、無制約下の投資比率から乖離するため、より非効率な投資行動となってしまう。しかし一千万円程度あればポートフォリオの資産運用に十分であることが、シミュレーションの結果より確認できた。さらに取引手数料を考慮して投資比率を最適化することで、従来のシャープレシオと比較して、ミドルリスクハイリターンな資産運用ができることを確認した。

次に、各銘柄間の収益率には非常に高い連動性があることを確認した。この場合、ポートフォリオのリスク分散効果は低い。そこでロングショート戦略を導入することで、リスクを大きく低減できることを数式から証明した。実際に投資シミュレーションを行ったところ、獲得できる利益は減少するが、それ以上に効率的かつ大きく損失を低減できることを確認した。

最後に、リスクの推定にも時系列予測モデルの導入を検討した。平均分散ポートフォリオモデルは、期待収益率だけでなく、リスクにおいてもダイナミクスが存在しないとして推定している。提案したポートフォリオモデルでは過去の予測誤差に基づいてリスクを推定しているが、非線形予測の誤差データには、長期にわたって正の自己相関構造があることを確認した。そこでこの特徴をモデル化した DCC モデルによってポートフォリオのリスクを推定した。投資シミュレーションを行った結果、単純移動平均によって予測した場合と比較して、より効率性の高い資産運用ができることを確認することができた。

10 謝辞

本研究の過程において、親切なる御指導、御鞭撻を頂きました、茨城大学 工学部 電気電子工学科 山中一雄教授に心より感謝を申し上げます。また、博士後期課程進学に際し、研究生活の環境を用意して下さったことにも、再度感謝を申し上げます。同大学 工学部 知能システム工学科 鈴木智也准教授には、修士課程より本研究の実施の機会を与えていただきました。本論文を纏めるに際して、親切な御助言と力強い励ましを頂き、学会や研究会など私にとって貴重な体験と活躍の場を提供していただきました。また、あいおいニッセイ同和損害保険株式会社 業務監査部 担当部長 神成敦様には実務の面から研究内容の助言を頂き、感謝を申し上げます。同学科 星野修教授および揚子江教授、関根栄子講師、情報工学科 濫澤進教授には、自身の研究内容について多くの御意見を頂き、研究内容をより深く考察できました。ありがとうございます。

また日常の議論を通じて知識や示唆を頂き、苦楽を共にし支え続けてくれた修士課程2年の大蔵邦彰君、小沼元君、横内萌美さん、修士課程1年の榊晴晶君、鄭如瀟君、和知宏武君、学部4年生の小泉洋八君、小林大樹君、永山尚人君、成松優君、柳澤和輝君に深く感謝いたします。同時に既に本学を卒業されました、大塚陽介君、岡澤政幸君、仲田和也君、大倉佑嗣君、田中清春君、林大賀君、平野裕作君、阿部寛之君、Vu Tat Thanh 君、齋藤正寛君にも深く感謝させていただきます。多くの食事の機会やイベント等に参加させていただいたからこそ、学生生活をより充実したものになりました。

また9年間アルバイトをさせていただいた、セブン-イレブン日立鮎川町店にも学生生活を続けるために支えて頂き、感謝を申し上げます。

最後に、大学生活において金銭的、精神的に支えてくれた両親に感謝いたします。その他、あらゆる面で協力して下さった全ての皆様に厚く謝意を表し、今後の健闘と御活躍をお祈りし、謝辞とさせていただきます。

参考文献

- [1] H. M. Markowitz: “Portfolio Selection,” *Journal of Finance*, Vol.7, No.1, pp.77–91, 1952.
- [2] W. F. Sharpe: “A Simplified Model for Portfolio Analysis,” *Management Science*, Vol.9, No.2, pp.277–293, 1963.
- [3] W. F. Sharpe: “A Linear Programming Algorithm for a Mutual Fund Portfolio Selection,” *Management Science*, Vol.13, No.7, pp.499–510, 1967.
- [4] W. F. Sharpe: “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk,” *Journal of Finance*, Vol.19, No.3, pp.425–442, 1964.
- [5] H. J. Elton and N. J. Gruber: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 8th edition, John Wiley & Sons, New York, 2009.
- [6] 矢島邦昭: アセット・アロケーション戦略, 金融財政事情研究会, 1992.
- [7] G. P. Brinson, L. R. Hood and G. L. Beebower: “Determinants of Portfolio Performance,” *Financial Analysis Journal*, Vol.42, No.4, pp.39–44, 1986.
- [8] H. Konno and H. Yamazaki: “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market,” *Management Science*, Vol.37, No.5, pp.519–531, 1991.
- [9] H. Konno and H. Shirakawa: “Equilibrium Relations in a Capital Asset Market: A Mean-Absolute Deviation Approach,” *Financial Engineering and the Japanese Markets*, Vol.1, No.1, pp.21–35, 1994.
- [10] E. F. Fama and K. R. French: “The Cross-Section of Expected Stock Returns,” *Journal of Finance*, Vol.47, No.2, pp.427–486, 1992.
- [11] R. Roll: “A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory,” *Journal of Financial Economics*, Vol.4, No.2, pp.129–176, 1977.
- [12] A. Perold: “Large Scale Portfolio Optimization,” *Management Science*, Vol.30, No.10, pp.1143–1160, 1984.
- [13] E. F. Fama and K. R. French: “Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds,” *Journal of Financial Economics*, Vol.33, No.1, pp. 3–56, 1993.
- [14] B. Rosenberg and V. Marathe: “Common Factors in Security Returns: Microeconomic Determinants and Macroeconomic Correlates,” *Proceeding of the Seminar on the Analysis of Security Prices*, University of Chicago, pp.61–115, 1976.
- [15] S. A. Ross: “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing,” *Journal of Economics Theory*, Vol.13, No.3, pp.341–360, 1976.
- [16] E. F. Fama: “Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work,” *Journal of Finance*, Vol.25, No.2, pp.383–417, 1970.
- [17] E. F. Fama: “Efficient Capital Markets: II,” *Journal of Finance*, Vol.46, No.5, pp.1575–1617, 1991.

- [18] B. G. Malkiel: *A Random Walk Down Wall Street: The Time-Tested Strategy for Successful Investing*, W. W. Norton & Company, 2012.
- [19] D. G. Luenberger: *Investment Science*, 2nd Edition, Oxford University Press, 2013.
- [20] J. Lintner: “The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets,” *The Review of Economics and Statistics*, Vol.47, No.1, pp.13–37, 1965.
- [21] J. Tobin: “Liquidity Preference as Behavior Toward Risk,” *Review of Economic Studies*, Vol.25, No.1, pp.65–86, 1958.
- [22] A. W. Lo and C. A. Mackinlay: *A Non-Random Walk Down Wall Street*, Princeton University Press, 2007.
- [23] N. Jegadeesh and S. Titman: “Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency,” *Journal of Finance*, Vol.48, No.1, pp.65–91, 1993.
- [24] N. Jegadeesh: “Evidence of Predictable Behavior of Security Returns,” *Journal of Finance*, Vol.45, No.3, pp.881–898, 1990.
- [25] B. N. Lehmann: “Fads, Martingales and Market Efficiency,” *Quarterly Journal of Economics*, Vol.105, No.1, pp.1–28, 1990.
- [26] S. S. Alexander: “Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks,” *Industrial Management Review*, Vol.2, pp.7–26, 1961.
- [27] 日本証券アナリスト協会 編: 新・証券投資論 I&II, 日本経済新聞出版社, 2009.
- [28] 日本テクニカルアナリスト協会 編: 日本テクニカル分析大全, 日本経済新聞出版社, 2004.
- [29] 宮野尚哉, 辰巳憲一: “非線形時系列解析による株価の曜日効果分析,” 電子情報通信学会論文誌 A 基礎・境界, J87-A, pp.1226–1235, 2004.
- [30] R. F. Engle: “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variances of United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, Vol.50, No.4, pp.987–1007, 1982.
- [31] T. Bollerslev: “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity,” *Journal of Econometrics*, Vol.31, No.3, pp.307–327, 1986.
- [32] R. F. Engle and V. K. Ng: “Measuring and Testing the Impact of News on Volatility,” *Journal of Finance*, Vol.48, No.5, pp.1749–1778, 1993.
- [33] P. H. Franses and D. V. Dijk: “Forecasting Stock Market Volatility Using (Non-Linear) Garch Models,” *Journal of Forecasting*, Vol.15, No.3, pp.229–235, 1996.
- [34] P. Posedel: “Analysis of the Exchange Rate and Pricing Foreign Currency Options on the Croatian Market: the NGARCH Model as an Alternative to the Black-Scholes Model,” *Financial Theory and Practice*, Vol.30, No.4, pp.347–368, 2006.
- [35] M. L. Higgins and A. K. Bera: “A Class of Nonlinear ARCH Models,” *International Economics Review*, Vol.33, No.1, pp.137–158, 1992.

- [36] D. B. Nelson: "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, Vol.59, No.2, pp.347–370, 1991.
- [37] E. F. St. Pierre: "Estimating EGARCH-M Models: Science or art?," *The Quarterly Review of Economics and Finance*, Vol.38, No.2, pp.167–180, 1998.
- [38] E. Sentana: "Quadratic ARCH Models," *The Review of Economic Studies*, Vol.62, No.4, pp.639–661, 1995.
- [39] L. R. Glosten, R. Jagannathan and D. Runkle: "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *Journal of Finance*, Vol.48, No.5, pp.1779–1801, 1993.
- [40] R. Rabemananjara and J. M. Zakoian: "Threshold Arch Models and Asymmetries in Volatility," *Journal of Applied Econometrics*, Vol.8, No.1, pp.31–49, 1993.
- [41] R. F. Engle and T. Bollerslev: "Modeling the Persistence of Conditional Variances," *Econometric Reviews*, Vol.5, No.1, pp.1–50, 1986.
- [42] R. T. Baillie, T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen: "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol.74, No.1, pp.3–30, 1996.
- [43] Z. Ding, C. W. J. Granger and R. F. Engle: "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model," *Journal of Empirical Finance*, Vol.1, No.1, pp.83–106, 1993.
- [44] J. Beran: *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall, 1994.
- [45] R. T. Baillie: "Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics," *Journal of Econometrics*, Vol.73, No.1, pp.5–59, 1996.
- [46] W. A. Brock and P. J. F. de Lima: "Nonlinear Time Series, Complexity Theory and Finance," in G. S. Maddala and C. Rao editions, *Handbook of Statistics*, Vol.14, North-Holland, pp.317–361, 1996.
- [47] T. Bollerslev and H. O. A. Mikkelsen: "Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, Vol.73, No.1, pp.151–184, 1996.
- [48] S. J. Taylor: *Modeling Financial Time Series*, John Wiley & Sons, 1986.
- [49] G. W. Schwert: "Why does Stock Market Volatility Change Over Time?," *Journal of Finance*, Vol.44, No.5, pp.1115–1153, 1989.
- [50] R. F. Engle: "Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of '87," *Review of Financial Studies*, Vol.3, No.1, pp.103–106, 1990.
- [51] E. Qian: *Risk Parity Portfolios: Efficient Frontiers Through True Diversification*, PanAgora White Paper, 2005.
- [52] H. Kaya, W. Lee and Y. Wan: "Risk Budgeting with Asset Class and Risk Class Approaches," *The Journal of Investing*, Vol.21, No.1, pp.109–115, 2012.

- [53] A. Meucci: “Managing Diversification,” *Risk Magazine*, pp.74–79, 2009.
- [54] G. Tiao and R. S. Tsay: “Model Specification in Multivariate Time Series,” *Journal of Royal Statistical Society B*, Vol.51, No.2 pp.157–213, 1989.
- [55] 沖本竜義: 経済・ファイナンスデータの計量時系列分析, 朝倉書店, 2010.
- [56] E. N. Lorenz: “Atmospheric Predictability as Revealed by Naturally Occurring Analogues,” *Journal of the Atmospheric Science*, Vol.26, No.4, pp.636–646, 1969.
- [57] J. D. Farmer and J. J. Sidorowich: “Predicting Chaotic Time Series,” *Physical Review Letters*, Vol.59, No.8, pp.845–848, 1987.
- [58] B. LeBaron: “Nonlinear Forecasts for the S&P Stock Index,” in *Nonlinear Modeling and Forecasting, SFI Studies in the Science of Complexity*, in M. Casdagli and S. G. Eubank editions, Addison-Wesley, 1992.
- [59] S. George and M. M. Robert: “Nonlinear Forecasting as a Way of Distinguishing Chaos from Measurement Error in Time Series,” *Nature*, Vol.344, No. pp.734–741, 1990.
- [60] 池口徹, 山田泰司, 小室元政: カオス時系列解析の基礎と応用, 合原一幸 編, 産業図書, 2000.
- [61] T. Bollerslev, R. F. Engle and J. M. Wooldridge: “A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances,” *Journal of Political Economy*, Vol.96, No.1, pp.116–131, 1988.
- [62] R. Engle and F. K. Kroner: “Multivariate Simultaneous Generalized ARCH,” *Econometric Theory*, Vol.11, No.1, pp.122–150, 1995.
- [63] C. M. Hafner: “Fourth Moment Structure of Multivariate GARCH processes,” *Journal of Financial Econometrics*, Vol.1, No.1, pp.26–54, 2003.
- [64] T. Nijman and E. Sentana: “Marginalization and Contemporaneous Aggregation in Multivariate GARCH Processes,” *Journal of Econometrics*, Vol.71, No.1, pp.71–87, 1996.
- [65] R. S. Tsay: *Analysis of Financial Time Series*, 3rd Edition, John Wiley, 2010.
- [66] R. F. Engle, T. Ito and W-L. Lin: “Meteor Showers or Heat Waves? Heteroskedastic Intradaily Volatility in the Foreign Exchange Market,” *Econometrica*, Vol.58, No.3, pp.525–542, 1990.
- [67] T. Bollerslev and R. F. Engle: “Common Persistence in Conditional Variances,” *Econometrica*, Vol.61, No.1, pp.167–186, 1993.
- [68] W. L. Lin: “Alternative Estimators for Factor GARCH Models – A Monte Carlo Comparison,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol.7, No.3, pp.259–279, 1992.
- [69] I. D. Vrontos, P. Dellaportas and D. N. Politis: “A Full-factor Multivariate GARCH Model,” *Econometrics Journal*, Vol.6, No.2, pp.311–333, 2003.
- [70] R. van der Weide: “GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol.17, No.5, pp.549–564, 2002.

- [71] K. Diamantopoulos and I. D. Vrontos: “A Student-t Full Factor Multivariate GARCH Model,” *Computational Economics*, Vol.35, No.1, pp.63–83, 2010.
- [72] E. Jondeau and M. Rockinger: “The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock-Market Application,” *Journal of International Money and Finance*, Vol.25, No.5, pp.827–853, 2006.
- [73] C. Brunetti, C. L. Gilbert: “Bivariate FIGARCH and Fractional Cointegration,” *Journal of Empirical Finance*, Vol.7, No.5, pp.509–530, 2000.
- [74] F. K. Kroner and V. K. Ng: “Modeling Asymmetric Comovements of Asset Returns,” *The Review of Financial Studies*, Vol.11, No.4, pp.817–844, 1998.
- [75] G. A. Christodoulakis and S. E. Satchell: “Correlated ARCH: Modeling the Time-varying Correlation between Financial Asset Returns,” *European Journal of Operations Research*, Vol.139, No.2, pp.351–370, 2002.
- [76] D. Pelletier: “Regime Switching for Dynamic Correlations,” *Journal of Econometrics*, Vol.131, No.1, pp.445–473, 2006.
- [77] Y. K. Tse and A. K. C. Tsui: “A Multivariate GARCH Model with Time-Varying Correlations,” *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol.20, No.3, pp.351–362, 2002.
- [78] F. Wilcoxon: “Individual Comparisons by Ranking Methods,” *Biometrics Bulletin*, Vol.1, No.6, pp.80–83, 1945.
- [79] D. M. Allen: “Mean Square Error of Prediction as a Criterion for Selecting Variables,” *Technometrics*, Vol.13, No. 3, pp. 469–475, 1971.
- [80] T. Suzuki, Y. Ueoka and H. Sato: “Estimating Structure of Multivariate Systems with Genetic Algorithms for Nonlinear Prediction,” *Physical Review E*, Vol.80, No.6, 066208, 2009.
- [81] F. Takens: “Detecting strange attractors in turbulence,” *Lecture Notes in Mathematics*, Vol.898, pp.366–381, Springer-Verlag, 1981.
- [82] T. Sauer, J. A. Yorke and M. Casdagli: “Embedology,” *Journal of Statistical Physics*, Vol.65, No.3–4, pp.579–616, 1991.
- [83] H. Akaike: “Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle,” *Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory*, in B. N. Petrov and F. Caski editions, pp.267–281, 1973.
- [84] 株価データはパンローリング株式会社から購入。
<http://www.panrolling.com/pansoft/data/> (参照日 2011.7.30)。
- [85] 株価データは yahoo!ファイナンスから入手。
<http://finance.yahoo.co.jp> (参照日 2013.1.10)。
- [86] 無担保コールレート翌日物データは東京短資株式会社から入手。
<http://www.tokyotanshi.co.jp/past/index2.shtml> (参照日 2012.1.15)。

- [87] E. Fama and M. Blume: “Filter Rules and Stock-Market Trading,” *Journal of Business*, Vol.39, No.1, pp.226–241, 1966.
- [88] T. Suzuki: “Appropriate Time Scales for Nonlinear Analyses of Deterministic Jump Systems,” *Physical Review E*, Vol.83, No.6, 066203, 2011.
- [89] 大塚陽介, 鈴木智也: “決定論的ジャンプ過程のシステム同定と長期予測に適したサンプリング手法の検討,” 情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用, Vol.5, No.1, pp.30–39, 2012.
- [90] C. A. E. Goodhart and M. O’Hara: “High Frequency Data in Financial Markets: Issues and Applications,” *Journal of Empirical Finance*, Vol.4, No.2–3, pp.73–114, 1997.
- [91] R. N. Mantegna and H. E. Stanley: *An Introduction of Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, 2000.
- [92] 取引手数料データは岡三オンライン株式会社から入手.
<http://www.okasan-online.co.jp/cost-comparing/> (参照日 2012.11.30) .
- [93] J. H. Holland: *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence*, University of Michigan Press, 1975.
- [94] フェデラルファンドレートデータは公式サイトから入手.
<http://www.newyorkfed.org/markets/omo/dmm/fedfundsdata.cfm> (参照日 2013.1.10) .
- [95] R. F. Engle and K. K. Sheppard: “Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH,” *National Bureau Economic Research*, Working Paper, No.8554, 2001.