超離散的からくり

沼田　賢一

富山県立大学　情報基盤工学講座

1. はじめに
2. セクション名
3. おわりに

November 29, 2019

はじめに

背景

万華鏡は、単純な仕掛けで予想できない模様が現れる。数理科学でも、一見複雑に見えて単純なものがある。超離散でも仕掛け (変数変換と極限) によってこのような驚きがあることがある。

目的

変数変換と極限を使って、どのように方程式が変化するのかを確認する。最後に、超離散化による応用例を示す。

差分方程式の変数変換

変数変換を試す方程式として差分方程式を用いる。

$$u_j^{t+1} = (u_{j-1}^t + u_{j+1}^t)/(1 + u_{j-1}^t u_{j+1}^t)$$

j は空間格子番号、t は時刻である。
差分方程式は非線形方程式であるから、初期時間 t=0 で異なる初期値を設定したものでの解の重ね合わせができない。

ここで、$u = tanh(v)$ として変数変換をすると、tanh の加法定理が使える形になるので整理すると

$$v_j^{t+1} = v_{j-1}^t + v_{j+1}^t$$

となり、線形方程式が得られる。
このようにして変数変換は非線形方程式を線形方程式に変えることができる。

差分方程式の極限

次に、差分方程式の初期値に∞の数を設定する。
すると、時間がたっても常に 0 か∞の値しかとらない。

ここで、 $u_j^t = e^{(U_j^t - 1/2)/\varepsilon}$ として変数変換し、

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \cdots) = \max(A, B, \cdots)$$

という超離散極限の公式を用いて整理すると、

$$U_j^{t+1} = \max(U_{j-1}^t, U_{j+1}^t) - \max(0, U_{j-1}^t + U_{j+1}^t - 1)$$

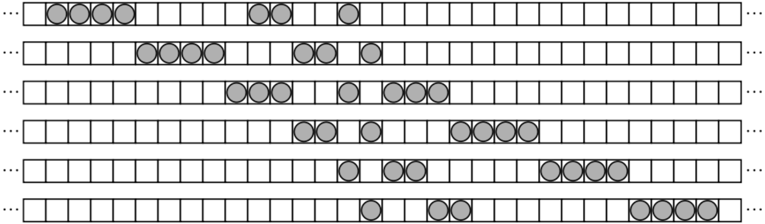
この方程式から U の値が 0 か 1 のみとるとき時間経過しても 0 または 1 をとることがわかる。
こうして従属変数が連続的な値から離散的な値へ変換できた。
(今回得られた方程式からできるフラクタル図形はセルオートマトンのルール番号 90 に等しい)

差分方程式の超離散化

このようにして $x = e^{\frac{X}{\varepsilon}}$ の形に変数変換をして $\varepsilon \to +0$ の極限をとることを超離散化といい、和と積で表されていた方程式が max と + に置き換えることができる。
方程式の見かけが全く異なるのに、実は構造は同じになっている。

箱玉系

箱玉系とは、ソリトン的性質を持つ 1 次元 Filter 型 CA のこと。
ルールは、大きさの同じ玉を N 個と、玉の大きさと同じ箱を無限個用意し横に 1 列に並べる。
すべての玉を箱に適当に放り込んだ状態を初期状態とする。
玉は時間経過ですべて右の一番近い空いている箱動いていく。
移動するときはすべて左の玉から行う。



図のように、玉の集団が衝突してもしばらくたつと、また同じ数の集団ができている。
このように、相互作用にも関わらず自己を保存する、という性質をソリトンという。

箱玉系

箱玉系の時間発展を記述する方程式は、
左から j 番目の箱の時刻 t での玉の数を T_j^t(=0,1) とすると、

$$T_j^{t+1} = \min\left(1 - T_j^t, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (T_i^t - T_i^{t+1})\right)$$

この式は、差分ロトカーボルテラ方程式を超離散化したものとなっている。
差分ロトカーボルテラ方程式もソリトン方程式であり、実はこの性質が箱玉系にも受け継がれている。

箱玉系

次に、箱玉系の各時刻の空箱と玉のそれぞれの塊の数の状態からみた方程式では、
時刻 t における左から n 番目の玉の並びの玉の個数を Q_n^t、空箱の並びの箱の個数を E_n^t とすると、

$$Q_n^{t+1} = \min(E_n^t, \sum_{k=1}^{n} Q_k^t - \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^{t+1})$$

$$E_n^{t+1} = E_n^t + Q_{n+1}^t - Q_n^{t+1}$$

$$E_0^t = E_N^t = \infty$$

この式は戸田分子方程式を離散化したものである。
この方程式も同様にソリトン方程式であり、性質が箱玉系にも受け継がれている。

楕円関数

次に楕円関数の超離散化をする。
用いるのはヤコビ楕円関数 cn(u;k) である。ここでは計算しやすくするために cn^2u として計算する。
楕円テータ関数 θ_0、θ_2、θ_3 と cnu の関係

$$\mathrm{cn}\, u = \theta_0(0)\theta_2(v)/\theta_2(0)\theta_0(v)$$

をヤコビ虚数変換したものを用いると、$\varepsilon \sim +0$ で

$$(\theta_0(v))^2 \sim \frac{p}{\pi\varepsilon}\left(e^{-p(\{v\}-1/2)^2/\varepsilon} + e^{-p(\{v\}+1/2)^2/\varepsilon}\right)^2$$

ほかのテータ関数でも同様にして整理すると、

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log \mathrm{cn}^2(p\,v/\varepsilon) = -p\,\min(2\{v\}, 2-2\{v\})$$

以上で、楕円関数の超離散化ができた。

楕円関数

ここで楕円関数の差分方程式を超離散化を行うと、

$X_{n+1} + 2X_n + X_{n-1} = \min(2p,\, X_n + 2q)$

となる。この解は、 $X_n = p\ \min(\frac{q}{p},\, 2\{\frac{q}{2p}n\},\, 2 - 2\{\frac{q}{2p}n\})$

である。

まとめ

1. 見かけが全く異なる方程式を超離散化によって作れることが分かった。
2. 超離散化をしても元の方程式の性質を引き継げることが分かった。