



# 勾配情報を活用した粒子群最適化による \*\*の大気的なパレート探索

2120019 柴原壮大 情報システム工学科 指導教員 奥原浩之

## 要約

Swarm Intelligence (群知能) は、鳥や魚、アリのコロニーなどのグループの行動に基づく最適化手法である。この技術の一つである粒子群最適化が開発され、様々な研究に応用されている。しかし、粒子群最適化の収束は根拠がない。本論文では、より良い最適解を求めるための群知能とニューラルネットワークダイナミックスの新しいハイブリッド動的システムを提案した。本論文の主な結果として、粒子群最適化とニューラルネットワークのメカニズムを理論的にどのように組み合わせるかを示し、提案システムが客観的な環境のグローバルな情報に基づいて補間探索を実現できることを確認した。

キーワード：粒子群最適化、勾配情報、局所探索

## 1 はじめに

近年、生体生命現象や物理現象を模倣し、それらを単純化したモデルに基づいて、大域的探索をおこなって凹凸状の目的関数の大域的最適解を比較的効率よく探索する最適化手法が提案されている。その大域的探索能力の高さが注目を集めている手法の一つとして、生物の群の挙動からヒントを得た Particle Swarm Optimization(2)(以降 PSO と略記する) とよばれる手法がある。この手法は、目的関数の勾配情報を用いて複数の探索点を更新し、かつそのパラメータを確率的に揺らす多点型確率的試行探索法であるが、力学系のモデルとして特徴づけると、「慣性型移流(対流)結合系モデル」と称することができる。ところで、PSO に関する研究は、この手法自体の特性に関するものから応用研究にいたるまで、すでに数多くなされているが、一般に、変数の次元の小さい無制約問題に対しては、更新式のパラメータを適切に調節すれば、比較的効率よく大域的最適解が探索可能であるのに對して、変数次元の大きな問題に対しては、必ずしも大域的最適化が効率よく求められないことが指摘されている。そこで本論文では、変数次元が比較的大きな問題であっても、ある程度狭い有界な領域を制約条件とする問題であるならば、その領域上の大域的最適解を比較的効率よく探索できる制約条件付最適化問題を直接解くことが可能な PSO を提案する。とくに本論文では、まず、この PSO がもつパラメータは確定的な値をとるものとした下で、PSO を力学モデルとして解釈し、まず上下制約領域内に束縛した PSO モデルを導出する。

## 2 PSO の概要

### 2.1 PSO アルゴリズム

PSO は群を成して移動する生物の行動を模範したアルゴリズムである。群をなす生物を粒子としてモデル化し、粒子は最適化問題における候補解を示している。PSO は群の中の粒子がもつ最良の情報 ( $p_{best}$ ) とその集団の最適値 ( $g_{best}$ ) から過去の探索を考慮し、さらにその集団の各粒子の位置および速度を更新することによって計算される。以下に PSO の解説を示す(図1: 参照)。

ここで、PSO の探索模式図及び速度と位置の更新式(図1: 参照)より、 $p_{best}$  に向かう  $c_{1r1}(x_k d_b \bar{x}_d k)$ 、 $g_{best}$  に向かう  $c_{2r2}(x_k d_b \bar{x}_d k)$ 、これまでの進行方向へ向かう  $wv_k^d$  の 3 つのベクトルを合成して速度ベクトル  $v_{i,k+1}$  を決定し、それを元に次に移動する位置  $x_k^d + 1$  を決定する。

PSO の探索式はランダム要素を含み、同時に最良解情報である  $p_{best}$  と  $g_{best}$  が探索に伴い変化するという時変性を有している[?]。このままの形では理論解析が困難であるので、一つの Particle に着目し、一次元の位置  $x$  と速度  $v$  について考え、さらに  $p_{best}$  と  $g_{best}$  を一つの点に縮約した簡略モデルが提案されている。この簡略モデルは、確定的な線形時不变システムとして表現され、よく知られた固有値解析により、Particle が構成するシステムの安定・不安定が解析的に評価でき、その安定性を示す(図1 参照)。

### psō

$$x_d^{k+1} = x_d^k + v_d^{k+1}$$

$$v_d^{k+1} = wv_d^k + c_1r_1(x_g^k b - x_d^k) + c_2r_2(x_g^k b - x_d^k)$$

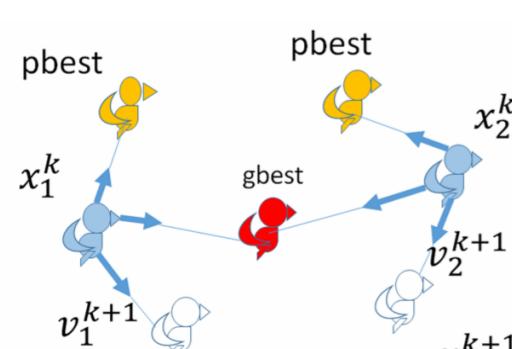


図1 psō の基本的な式

### 2.2 非線形変数変換モデルとその内部状態表現モデル

本研究では上下制約付最適化問題

$$\min_x E(x) \quad (28a)$$

$$\text{subj. to } p_i \leq x_i \leq q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (28b)$$

を解くための PSO モデルを扱う。

内部状態表現モデルを導出するため、まず(34h)式と同じ形の式を変数変換に用いるため、以下の図のようになる

### 非線形変数変換モデルとその内部状態表現モデル

$$x_i = f_i(y_i) = \frac{q_i + p_i \exp(-y_i)}{1 + \exp(-y_i)} \quad \rightarrow \quad \min_y E(f(y))$$

ただし、

$$f(y) = (f_1(y_1), \dots, f_n(y_n))^T$$

と置く

図2 無制約問題への変換

ここで、psō の更新式を力学的モデルとみなし、その連続化を試みる。

### 無制約連続時間PSOモデル

psō の更新式を力学的モデルとみなし、その連続化を試みる

$$\frac{dx^p(t)}{dt} = c \int_0^t e^{-a(t-\tau)} [F^p(x^p(\tau), \tau) + C(x^p(\tau), \tau)] d\tau$$

両辺を微分すると以下のようになる

$$\frac{d^2x^p(t)}{dt^2} + a \frac{dx^p(t)}{dt} = c [F^p(x^p(t), t) + C(x^p(t), t)]$$

$F^p$  や  $C$  は以下のようになり、これはそれぞれ  $p_{best}$ 、 $g_{best}$  に向かう力を意味する

$$F^p(x^p, t) = c_1 \{x^p(T^p(t)) - x^p\}$$

$$C(x^p, t) = c_2 \{x^{Q(t)}(T^o(t)) - x^p\}$$

図3 連続時間psō モデル

ここで  $T_p(t)$  は、時刻  $k$  までにおいて、個体  $p$  が関数  $E$  の値をもっとも小さくした時刻を表していて、その状態  $x_p(T_p(t))$  は PSO で  $p$ -best と呼ばれている。また、 $(Q(t), T_o(t))$  は、時刻  $t$  までにおいて、 $P$  個の個体の中で関数  $E$  の値をもっとも小さくした個体番号とその時刻を表し、その状態  $x_{Q(t)}(T_o(t))$  は PSO で  $g$ -best と呼ばれている。ここで、 $l_o(k)$  は個体  $p$  に対応して決まる離散時刻である。

無制約問題の変数  $y$  に関して、これらの連続時間系 PSO モデルをそのまま用いると、

### 無制約連続時間PSOモデルへの適応

無制約問題の変数  $y$  に関して、これらの連続時間系 PSO モデルを用いた結果

$$\frac{d^2y^p(t)}{dt^2} + a \frac{dy^p(t)}{dt} = c [F^p(y^p(t), t) + C(y^p(t), t)]$$

$F^p$ 、 $C$  は以下のようになる

$$F^p(y^p, t) = c_1 \{y^p(T^p(t)) - y^p\}$$

$$C(y^p, t) = c_2 \{y^{Q(t)}(T^o(t)) - y^p\}$$

であり、 $T_p(t)$  や  $(Q(t), T_o(t))$  の定義は図3と同じであり、その場合このようになる

$$x^p(\tau) = f(y^p(\tau))$$

また、2種類の内部状態  $u_p$ 、 $v_p$  を用意し右のように置く

$$u^p(t) = y^p(t)$$

$$v^p(t) = \frac{du^p(t)}{dt} + au^p(t)$$

図4 無制約連続時間psō モデルへの適応

このように、この式の中の  $F^p$  や  $C$  の定義式も含ませ、さらに出力関数  $f_i$  を連立させて具体的に記述すると、

### 非線形変数変換PSOモデル

$$\frac{du^p(t)}{dt} = -au^p(t) + v^p(t)$$

$$\frac{dv^p(t)}{dt} = c [F^p(u^p(t), t) + C(u^p(t), t)]$$

$$F^p(u^p, t) = c_1 \{u^p(T^p(t)) - u^p\}$$

$$C(u^p, t) = c_2 \{u^{Q(t)}(T^o(t)) - u^p\}$$

$$T^p(t) = \arg\min_{\tau} \{E(x^p(\tau)) \mid 0 \leq \tau \leq t\}$$

$$(Q(t), T^o(t)) = \arg\min_{(q, \tau)} \{E(x^q(\tau)) \mid$$

$$q = 1, \dots, P, 0 \leq \tau \leq t\}$$

$$x_p^p(t) = f_i(u^p_i(t)) = \frac{q_i + p_i \exp(-u^p_i(t))}{1 + \exp(-u^p_i(t))}$$

$$i = 1, \dots, n$$

図5 非線形変数変換psō モデル

ここで注意することは、この非線形変数変換モデルの場合の  $F^p$  や  $C$  の引数の引数は  $u_p$  であることであり、 $p$ -best の時刻  $T_p(t)$  や  $g$ -best の個体番号  $Q(t)$  と時刻  $T_o(t)$  の算出にのみ、出力関数  $f_i$  が用いられることがある。

### 2.3 非線形変数変換モデルの離散化PSO モデル

内部情報をサンプリングパラメータ  $\Delta T$  のオイラー法で離散化すると、

$$u_p(k+1) = u_p(k) + \Delta T \{v_p(k) - au_p(k)\} \quad (1)$$

$$v_p(k+1) = v_p(k) + c \Delta T [F_p(x_p(k), k) + C(x_p(k), k)] \quad (2)$$

となる。

非線形作用素モデルと同様に、図5の式をそのままオイラー法で離散化して対応する式も加えると、次のような式が得られる。

### 非線形変数変換モデルの離散化PSOモデル

$$u^p(k+1) = (1 - a \Delta T) u^p(k) + \Delta T v^p(k)$$

$$v^p(k+1) = v^p(k) + c \Delta T [F^p(x^p(k), k) + C(x^p(k), k)]$$

$$F^p(x^p(k), k) = c_1 \{x^p(T^p(k)) - x^p(k)\}$$

$$C(x^p(k), k) = c_2 \{x^{Q(k)}(T^o(k)) - x^p(k)\}$$

$$l^p(k) = \arg\min_l \{E(x^p(l)) \mid l = 0, \dots, k\}$$

$$(Q(k), l^p(k)) = \arg\min_{(q, l)} \{E(x^q(l)) \mid$$

$$q = 1, 2, \dots, P, l = 0, 1, \dots, k\}$$

$$x^p_i(k) = f_i(u^p_i(k)) = \frac{q_i + p_i \exp(-u^p_i(k))}{1 + \exp(-u^p_i(k))}$$

$$i = 1, \dots, n$$

図6 無制約連続時間psō モデルへの適応

となり、形の上では制約を考慮しない PSO モデル(20)式と同様のモデルが得られる。なお、(42)式に対して言及したように、 $F_p$  や  $C$  の  $l^p(k)$ 、 $(Q(k), l^p(k))$  は、変換式  $f$  を通した(45g)式によって決まることが、制約を考慮しない PSO モデルと大きく異なっている。このモデルにおいても  $\Delta T$  の調節で有界領域内に閉じ込められた形で不安定化されることにより、その領域内を走査するカオス的な現象を生み出すことができると期待される。

## 3 ハイブリッド PSO の提案

### 3.1 ハイブリッド PSO

本節では提案手法であるハイブリッド PSO について解説する(図5参照)。PSO の応用法であり、上下制約を直接考慮した離散時間系モデルに勾配情報を加えることにより、精密な探索を行なうことを狙いとしている。仮に  $t$  とは無関係に

$$F(x_p, t) = -c_1 \nabla E(x) \quad (3)$$

とおくと、勾配法型慣性系である。勾配法における  $-\nabla E(x)$  は、 $x$  において関数  $E$  を局所的に最も減少させる方向であるのに対して、PSO では勾配を用いる代わりに  $F_p$  を用いていることになるが、 $x(l(k))$  が過去の時系列でもっとも  $E$  を小さくする状態であることから、式の  $F$  も等号を含めた広義の関数  $E$  の減少方向を与えるものであることがわかる。

### ハイブリッドPSO

$$u^p(k+1) = (1 - a \Delta T) u^p(k) + \Delta T v^p(k)$$

$$v^p(k+1) = v^p(k) + c \Delta T [F^p(u^p(k), k) + C(u^p(k), k) - \nabla E(u^p(k), k)]$$

$$F^p(k, k) = c_1(u^p(T^p(k)) - u^p(k))$$

$$C^p(k, k) = c_2(u^{Q(k)}(T^o(k)) - u^p(k))$$

$$\nabla E(k, k) = c_3 \frac{\partial E(k, t)}{\partial k}$$

$$l^p(k) = \arg\min_l \{E(x^p(l)) \mid l = 0, \dots, k\}$$

$$(Q(k), l^p(k)) = \arg\min_{(q, l)} \{E(x^q(l)) \mid q = 1, 2, \dots, P, l = 0, 1, \dots, k\}$$

$$x^p_i(k) = f_i(u^p_i(k)) = \frac{q_i + p_i \exp(-u^p_i(k))}{1 + \exp(-u^p_i(k))}, i = 1, \dots, n$$

図7 ハイブリッド psō

## 4 数値実験ならびに考察

000

モデルを導出した。また、PSOの簡単な数値実験を行つた。しかし、実際の問題に適応したわけではない。よって今後は、提案手法の適応を行う。

## 参考文献

- [1] J. Kennedy, R.C. Eberhart: Particle swarm optimization, IEEE Conf. on Neural Networks, IV, Piscataway, NJ, pp. 1942-1948 (1995).
- [2] J. Kennedy, R.C. Eberhart, Y. Shi: "Swarm intelligence," Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, pp. 1942-1948, 2001.
- [3] 石龜 敦司, 安田 恵一郎: "群れの知能: Particle Swarm Optimization," 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌), Vol. 20, No. 6, pp. 829-839 (2008) .
- [4] H. M. Emara and H.A. Abdel Fattah: "Continuous swarm optimization technique with stability analysis," Proceedings of the 2004 American Control Conference, pp. 2811-2817 (2004).
- [5] Ryuzaburo SUGINO, Anan National College of Technology: "Numerical Performance of PSO Algorithm Using Gradient Method."
- [6] M. Jiang, Y. P. Luo and S. Y. Yang: "Stochastic convergence analysis and parameter selection of the standard particle swarm optimization algorithm," Information Processing Letters, vol. 102, No. 1, pp. 8-16 (2007).