Interpolation Search for Swarm Intelligence to Optimization Problem
最適化問題に対する群知能の補間探索

清水　豪士

富山県立大学　情報基盤工学講座
t715038@st.pu-toyama.ac.jp

May 14, 2021

はじめに

背景

- 群知能とは，鳥や魚などの集団や，蟻のコロニーの行動に基づいた最適化手法である．
- その手法の 1 つである PSO は，様々な研究で開発・応用されている．
- しかし，PSO の収束性には根拠がない．

目的

- より良い最適解を求めるために，群知能とニューラルネットワークのダイナミクスを組み合わせた新しいハイブリッドなシステム提案する．

粒子群最適化（PSO）

- 粒子群最適化（PSO）は，粒子が持つ最良の情報（p-best）と，その粒子から形成される集団の最適値 (g-best) から，過去の探索履歴を考慮して最適解を求める手法である．

PSO

PSO

- PSO アルゴリズムは，粒子として概念化されたランダムな解の候補の集団で初期化される．
- PSO は，各粒子の位置と速度を更新して計算する．
- PSO アルゴリズムは以下の通り

$$
\begin{aligned}
x_d^{k+1} &= x_d^k + v_d^{k+1} \\
v_d^{k+1} &= wv_d^k + c_1 r_1(\hat{x}_{db}^k - x_d^k) + c_2 r_2(\hat{x}_{gb}^k - x_d^k)
\end{aligned}
$$

x_d^k は k 回目の反復における個体 d の位置，v_d^k は速度，$r1$ と $r2$ は $[0, 1]$ の乱数，$c1$ と $c2$ はパラメータ．
また，w は運動量と呼ばれるパラメータであり，x_{db}^k，x_{gb}^k はそれぞれ p-best，g-best を示す

連続時間 PSO アルゴリズム

連続時間 PSO のダイナミクスを次のような行列で表現する：Σ_m

$$\dot{X} = V$$
$$\dot{V} = -\alpha V + \beta(X_{db} - X) + \gamma(X_{gb}T - X)$$

$$\dot{X_{db}} = a(X - X_{db})[I_n + \mathrm{diag}[\mathrm{sgn}(F(X_{gb} - F(X))]]$$
$$\dot{X_{gb}} = X_{db}Q_j \quad \text{where } j = \arg \inf_{0<i\leq n} (f(x_{db_i}))$$

ここで，$diag[y]$ をベクトル y の要素を対角要素とする対角行列とし，$sgn(y)$ を y のシグマ関数を表し，次のように定義する．

$sgn(y) = 1$if$y > 0$ and $sgn(y) = -1$if $y < 0$

X は位置行列，V は速度行列，X_{db} はローカル最適位置行列，X_{gb} はグローバル最適位置行列，$\Re^n$ は積層目的関数ローベクトル，T は1からなる行ベクトル，Q_i は i^{th} 要素を除き，1に等しいすべての要素が0の列ベクトル，I_n はサイズ n の単位行列

連続時間アルゴリズム

連続時間 PSO アルゴリズム

1. X, V およびパラメータ α, β, γ, a の初期値を設定する．
2. X_{db}, X_{gb} の初期値を導出する．
3. $\dot{V}$ を計算し，V を更新する．
4. X を更新し，X_{db}, X_{gb} を評価する．
5. 収束したと判断した場合は終了，そうでない場合は 3 に戻る．

ハイブリッド PSO アルゴリズムの提案

Z を以下のように定義する.

$$Z = \beta(X_{db} - X) + \gamma(X_{gb}T - X)$$

このとき，以下の条件を考える.

$$X = X_0 + \int_0^t V(s)ds$$

X_0 は初期位置行列である.
ここで，ハイブリッドダイナミクス Σ_n を導入する.

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= V \\
\dot{V} &= -\alpha V + Z \\
\dot{Z} &= \beta(\dot{X_{db}} - \dot{X}) + \gamma(\dot{X_{gb}}T - \dot{X}) + \delta(\dot{X_\mu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{X_{db}} &= a(X - X_{db})[I_n + \mathrm{diag}[\mathrm{sgn}(F(X_{gb} - F(X))]] \\
\dot{X_{gb}} &= X_{db}Q_j \qquad where\ j = \arg \inf_{0<i\leq n} (f(x_{db_i}))
\end{aligned}$$

ここで，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はゼロでない正の実数であり，$\beta + \gamma + \delta = 1$ を満たす.
X_μ はニューラルネットワークダイナミクスから得られた新しい行列である.

TOYAMA Prefectural University

ハイブリッド PSO アルゴリズムの提案

X_μ 以下のように定義される．

$$\dot{x}_{\mu i} = -C \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(y_i(t))}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi(x(t))}{\partial x_i} (= \dot{z_i}(t))$$

$$\dot{x}_i = -a x_i(t) + z_i(t)$$

$$y_i(t) = \varphi(x_i(t))$$

z_i^k は Z のベクトル，$x_{\mu i}^k$ は k 回目の反復の個体 i に関する X_μ のベクトル．a と C はパラメータで，φ はシグモナイド関数である．

理論的分析の観点から，PSO の $\dot{V}$ とニューラルネットワークの $\dot{x}_i$ は同等のものとみなす．

TOYAMA Prefectural University

ハイブリッド PSO アルゴリズムの提案

提案するハイブリッド PSO アルゴリズム

1. X, V, X_μ の初期値と，パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a$ を設定する．
2. X_{db}, X_{gb}, Z の初期値を導出する．
3. $\dot{Z}$ を計算し，Z を更新する．
4. $\dot{V}$ を計算し，V を更新する．
5. X を更新し，X_{db}, X_{gb}, Z を評価する．
6. 収束したと判断した場合は終了，そうでない場合は3に戻る．

数値実験

Σ_m, Σ_n の挙動を比較する数値実験を行う．
ここでは，最小化するための 3 種類のテスト関数を用いる．
n 次元空間におけるテスト関数は以下のとおりである．

$$f_{Griewank} = \frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \Pi_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{\sqrt{i}}{x_i}\right) + 1$$

$$f_{Rosenbrock} = \sum_{i=1}^{n-1}(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2)$$

$$f_{Rastrigin} = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) + 10)$$

各関数の最小化問題に対して，安定領域にある各パラメータを設定した PSO アルゴリズムの収束時間，粒子位置のサンプル収束行列，最適感数値を調査する．

はじめに
PSO
連続時間 PSO アルゴリズム
ハイブリッド PSO アルゴリズムの提案
数値実験
コンクルージョン

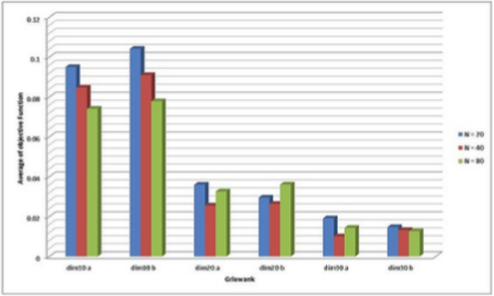
収束性の比較

実験１では基本ケースとして 10 次元，20 次元，30 次元の問題を扱い，その数値結果を述べる．
粒子数を (20,40,80)，反復回数を (1000,1500,2000) とし，それぞれ (10 次元,20 次元,30 次元) の問題を扱う．

Table 1: 2 つの異なるアルゴリズムの性能 a: PSO, b: ハイブリッド PSO の提案

a: PSO, b: Proposal of hybrid PSO, Average of 150 times						
Function	Iterations = 1000		Iterations = 1500		Iterations = 2000	
Griewank	a: dim10	b: dim10	a: dim20	b: dim20	a: dim30	b: dim30
N = 20	0.094988	0.104158	0.035971	0.029494	0.019112	0.014708
N = 40	0.084636	0.090979	0.025511	0.026347	0.010046	0.013243
N = 80	0.074046	0.077824	0.032574	0.036061	0.014315	0.0127
Function	Iterations = 1000		Iterations = 1500		Iterations = 2000	
Rastrigrin	a: dim10	b: dim10	a: dim20	b: dim20	a: dim30	b: dim30
N = 20	5.860594	5.83382	24.185181	26.653132	52.57797	42.33567
N = 40	4.285989	3.790377	19.33343	18.562738	41.644389	31.9873
N = 80	2.75856	2.708036	14.700459	14.922603	32.466173	31.2516
Function	Iterations = 1000		Iterations = 1500		Iterations = 2000	
Rosenbrock	a: dim10	b: dim10	a: dim20	b: dim20	a: dim30	b: dim30
N = 20	133.14007	41.74886	229.08707	146.95593	637.79283	319.25095
N = 40	70.82829	37.15916	219.00407	134.52409	442.88521	221.69113
N = 80	48.60264	14.74576	143.47258	86.38419	207.87556	99.74067

収束性の比較



(a) (b) (a) (b) (a) (b)
10-dim. 20-dim. 30-dim.

図 10: 2 つの異なるアルゴリズムにおける個々の収束性能 (Griewank) a: PSO, b: ハイブリッド PSO の提案

収束性の比較

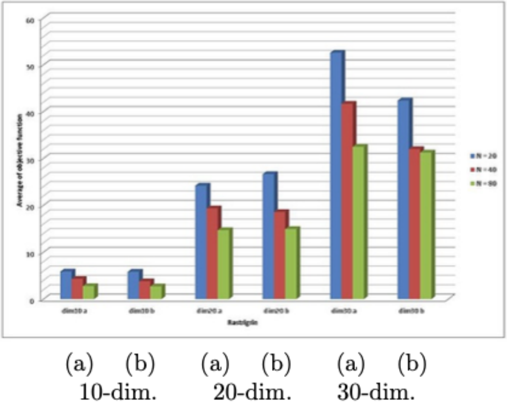


図 11: 2 つの異なるアルゴリズムにおける個々の収束性能 (Rastrigrin) a: PSO, b: ハイブリッド PSO の提案

収束性の比較

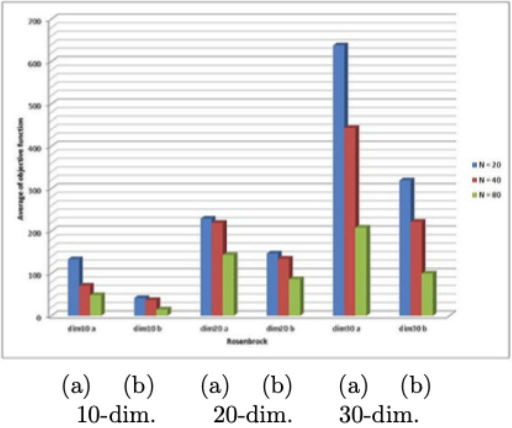


図 12: 2 つの異なるアルゴリズムにおける個々の収束性能 (Rosenbrock) a: PSO, b: ハイブリッド PSO の提案

TOYAMA Prefectural University

収束性の比較

- 3 つの画像は，各テスト関数における 2 つのアプローチの最良の目的地を示している．
- 図の全体的な特徴として，提案したアルゴリズムの収束性能が PSO アルゴリズムよりも優れている．
- テスト関数 fRosenbrock と fRastrigin の場合、2 つのアプローチのパフォーマンスの違いが顕著。
- 対照的に、マルチモデル関数 fGriewank の場合、両方のパフォーマンスに違いはあまりない。

- 以上より，高次元の場合でも有効であり，fRosenbrock および fRastrigin 関数は fGriewank 関数よりも効果を示しやすいことを示唆している．

反復の比較

2 つのアルゴリズムのパフォーマンスを評価するために，各関数が収束する反復回数を調べます．
3 つの関数の 30 次元問題を扱い，粒子数を 80 とし，反復回数を 1～1600 の範囲にする．

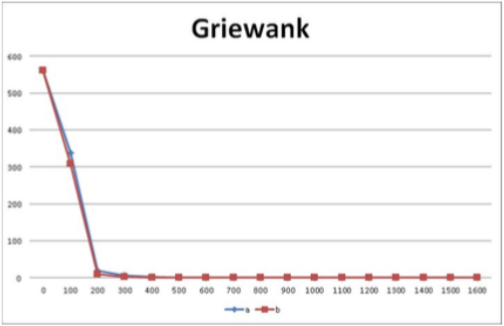


図 13: 2 つのアプローチにおける関数 Griewank の最高適合度と反復回数の関係 a: PSO, b: ハイブリッド PSO の提案

反復の比較

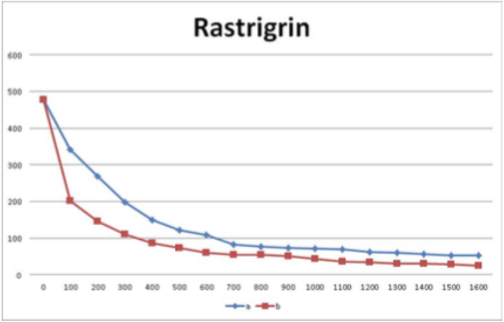


図 14: 2 つのアプローチにおける関数 Rastrigin の最適な適合度と反復回数の関係 a: PSO, b: ハイブリッド PSO の提案

反復の比較

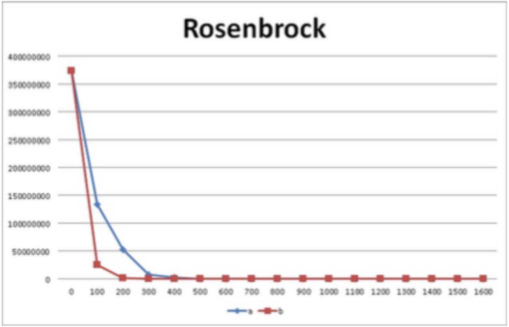


図 15: 2 つのアプローチにおける関数 Rosenbrock の最適な適合度と反復回数の関係 a: PSO, b: ハイブリッド PSO の提案

反復の比較

- 3 つの画像は，ハイブリッド法の収束率は，PSO の収束率よりも少ない反復回数で優れていることを示している．
- 反復回数が 100 から 200 の範囲で，fRosenbrock と fRastrigin を使用している場合に特に顕著である．
- 以上の結果より，反復回数が少なくても，ハイブリッドアルゴリズムが最適値に近いことを示している．

コンクルージョン

まとめ

- PSO とニューラルネットワークのメカニズムを組み合わせる方法を理論的に示し，提案システムが目的環境のグローバルな情報を基づいた補間探索を実現できることを確認した．
-

課題

- より広いベンチマーク問題での検討や，シンプレックス法や DE との比較