行動的決定理論に基づく ポートフォリオ・モデルの構築

清水　豪士

富山県立大学　情報基盤工学講座
t715038@st.pu-toyama.ac.jp

January 21, 2022

はじめに

背景

- ポートフォリオモデルを現実の問題に適用する際に生じる問題点として，得られた最適ポートフォリオからの解の選択方法が挙げられる．
- 現実の問題において，意思決定者の有する効用を関数として同定することは困難である．
- このため，意思決定者である投資家は，解の選択に対して望ましいと考えられる解を試行錯誤的に探索していると考えられる．

目的

- 解の選択方法に関する問題点の解決をねらいとして，意思決定社の解に対する満足度水準を考慮したポートフォリモデルの拡張モデルを提案する．
- 具体的には，プロスペクト理論をもとに，解に対する満足度水準の設定の方法およびそのモデル化について提案する．

平均・分散モデル

[P 1]

$$\text{min.} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \qquad \text{(1-a)}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i = E \qquad \text{(1-b)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad \text{(1-c)}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad \text{(1-d)}$$

E は期待収益率，σ_{ij} は第 i 証券と第 j 証券との共分散，μ_i は第 i 証券の収益率，x_i は第 i 証券下の投資比率．

P1 による意思決定は，一般的に意思決定者の有している効用を用いて解の選択を行うとされている．

しかしながら，現実の問題において各意思決定者の効用を何らかの関数として表現することは困難である．

このようなことから，ファジィ概念を適用したポートフォリオモデルを提案

ファジィ・ポートフォリオモデル

[P 2]

$$\max. \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \qquad \text{(2-a)}$$

$$\min. \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \qquad \text{(2-b)}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad \text{(2-c)}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad \text{(2-d)}$$

P2 による意思決定では，一般的に対話型システムを利用することによって解を導出している．

しかし，意思決定者である投資家は，リスク下で代替案選択を行う際に過去の経験と現状を照らし合わせて，得られた結果を評価しているものと考えられるため，意思決定者はあらかじめ期待収益率およびリスクに対して何らかの目標値を有していると判断できる．

このため，対話型システムによって解を導出する場合には，その目標となる解の周辺を試行錯誤的に探索せざるを得ない．

つづき

目標期待収益率および目標リスクの各々に対して意思決定者は，必要レベルおよび十分レベルを設定する．

必要レベルは最悪の達成度を意味し，十分レベルは十分満足できる達成度を意味している．

これらを設定すること目標期待収益率および目標リスクに対するメンバシップ関数が作成される．

線形型のメンバシップ関数を採用すると，目標期待収益率は大きなる程好ましいため，左の式のように表され，目標リスクに関しては，小さくなる程好ましいため，右の式のように表される．

$$\mu_E(E(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}1 & ;\ E_U\leq E(\boldsymbol{x})\\ 1+\dfrac{E(\boldsymbol{x})-E_U}{E_U-E_L} & ;\ E_L\leq E(\boldsymbol{x})\leq E_U\\ 0 & ;\ E(\boldsymbol{x})\leq E_L\end{cases} \tag{3}$$

$$\mu_V(V(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}1 & ;\ V(\boldsymbol{x})\leq V_U\\ 1-\dfrac{V(\boldsymbol{x})-V_U}{V_L-V_U} & ;\ V_U\leq V(\boldsymbol{x})\leq V_L\\ 0 & ;\ V_L\leq V(\boldsymbol{x})\end{cases} \tag{4}$$

このとき，$E(x)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i$ で，$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$ である．

つづき

最大化決定を適用すれば P2 を以下のファジィ・ポートフォリオモデルとして定式化できる.

[P 3]

$$
\begin{array}{lll}
\text{max.} & \lambda & \text{(5-a)} \\
\text{s.t.} & V(\boldsymbol{x})+(V_L-V_U)\lambda \leq V_L & \text{(5-b)} \\
& E(\boldsymbol{x})+(E_L-E_U)\lambda \geq E_L & \text{(5-c)} \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i=1 & \text{(5-d)} \\
& \lambda,\, x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) & \text{(5-e)}
\end{array}
$$

λ は解に対する満足度，V_L はリスクに対する必要レベル，V_U はリスクに対する十分レベル，E_L は期待収益率に対する必要レベル，E_U は期待収益率に対する十分レベルである．

.

つづき

線形型のメンバシップ関数は解の選択が困難という問題点を有しているため，線形型メンバシップ関数の有する問題点を解決するために $\lambda = 1$ を全金銭とするメンバシップ関数としてシグモイド関数を適用する．

$$f(x) = \frac{1}{1+\exp(-\alpha x)} \tag{6}$$

シグモイド関数型メンバシップ関数を用いると，目標期待収益率と目標リスクは次のようになる．

$$\mu_E(E(x)) = \frac{1}{1+\exp(-\alpha_E(E(x)-E_M))} \tag{7}$$

$$\mu_V(V(x)) = \frac{1}{1+\exp(\alpha_V(V(x)-V_M))} \tag{8}$$

E_M は目標期待収益率に対する満足度 λ が 0.5 となる期待収益率の値，V_M は目標リスクに対する満足度 λ が 0.5 となるリスクの値，α_E および α_V はメンバシップ関数の形状を決定するパラメータで両方とも 0 より大きい．

つづき

紹介したメンバシップ関数を用いて最大化決定にしたがえば，P2 は以下のように定式化される．

[P 4]

$$\text{max.}\quad \lambda \tag{9-a}$$

$$\text{s.t.}\quad \lambda + \exp(\alpha_V(V(x) - V_M))\lambda \leq 1 \tag{9-b}$$

$$\lambda + \exp(-\alpha_E(E(x) - E_M))\lambda \leq 1 \tag{9-c}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{9-d}$$

$$\lambda,\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{9-e}$$

基本的に P4 を用いて解を導出すればよい．

プロスペクト理論

行動的決定理論

規範的な意思決定理論とは異なり，実際の意思決定行動を記述しようとするもの．
期待効用理論のような数理化学的側面だけでなく行動科学的側面も有している．

プロスペクト理論

客観的確率や期待効用理論で算出される効用では説明できない人間の心理的な意思決定を説明しようとする叙述的理論である．
この理論における平均的な人間の意思決定は，従来の期待効用最大化に基づくもではなく，価値関数を最大化するような意思決定を行うものとされている．

$$V(x,p\,;\,y,1-p)=\pi(p)v(x)+\pi(1-p)v(y) \tag{14}$$

$\pi()$ はウェイト関数，$v()$ は価値関数あるいは評価関数である．

この式は，利得 x を確率 p，利得 y を確率 $1-p$ で得る場合の価値を表している．

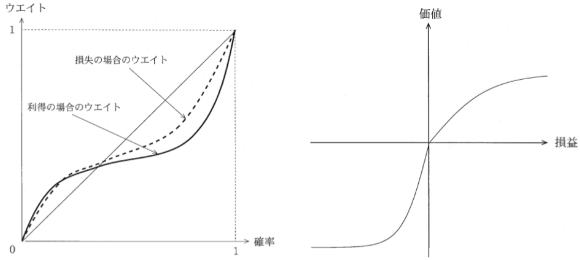

図 1: 左：ウェイト関数，右：価値関数

ウェイト関数は，人間は主観的な評価によって客観的な確率を修正していることを意味している．

価値関数の図中の原点は，参照点と呼ばれる点で，意思決定者である物事の評価を行う際の基準点である．
利益（損失）の増加量とその価値の増加量（減少量）は比例しない．
つまり，利益（損失）の増加量に対する正（負）の価値の増加量は逓減する（感応度逓減と呼ぶ）．

プロスペクト理論における意思決定者の判断とその意思決定行動の特徴

図２の右のおいて正の価値が増加した場合，意思決定者は相対的に高い価値を得て，この状態から株価が上昇する場合の価値の増加は感応度逓減によって小さなものでしかない．

しかし，株価の下落は大きな価値減少をもたらす．

このため，利益が得られている状態の場合には，不確実な利益をより追求するよりも，確実に得られている利益の確保が好まれる．

これは逆の場合にもいうことができる．

これらのことから，平均的な意思決定者は利益が得られている場合にはリスク回避的であるが，損失が生じている場合にはリスク愛好的な行動をとる

提案モデル

提案するファジィ・ポートフォリオモデルは意思決定者が希求する目標期待収益率と目標リスクの両者をポートフォリオモデルに直接反映するものである（十分レベルと必要レベル）．
より精緻なポートフォリオモデルを実現させるために価値関数の概念を反映させる必要性がある．

価値関数の概念を適用した期待収益率は以下のように表される．（E_R は参照点を顕 s う期待収益率）

$$\mu_E(E(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\exp(-\alpha_E(E(\boldsymbol{x})-E_R))} & ;\ E(\boldsymbol{x})\geq E_R \\ \dfrac{1}{1+\exp(-2.25\alpha_E(E(\boldsymbol{x})-E_R))} & ;\ E(\boldsymbol{x})<E_R\end{cases} \qquad (16)$$

$$\alpha_E=\frac{\log\dfrac{0.99}{1-0.99}}{E_U-E_R} \qquad (17)$$

参照点を表す E_R と関数の形状を規定する α_E（右式）でメンバシップ関数を定めることができる．
（17）式より（16）式のメンバシップ関数を定めるためには，意思決定者が参照点を表す期待収益率と十分レベルに該当する期待収益率の 2 つの目標値を有していれば良い．

つづき

本論文が提案するポートフォリオモデルは以下のようになる．
右は $\lambda < 0.5$ の場合

[P 6]

$$\text{max.} \quad \lambda \tag{18-a}$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda + \exp(\alpha_V(V(\boldsymbol{x}) - V_M))\lambda \leq 1 \tag{18-b}$$

$$\lambda + \exp(-\alpha_E(E(\boldsymbol{x}) - E_R))\lambda \leq 1 \tag{18-c}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{18-d}$$

$$\lambda, x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{18-e}$$

[P 6′]

$$\text{max.} \quad \lambda \tag{19-a}$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda + \exp(\alpha_V(V(\boldsymbol{x}) - V_M))\lambda \leq 1 \tag{19-b}$$

$$\lambda + \exp(-2.25\alpha_E(E(\boldsymbol{x}) - E_R))\lambda \leq 1 \tag{19-c}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{19-d}$$

$$\lambda, x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{19-e}$$

数値例

数値例として全証券数 30 からなるポートフォリオ選択を行う.

データは，日経 225 採用銘柄からランダムに 30 銘柄を抽出した.

銘柄に対する収益率 μ_i とリスク σ_{ij} は，2001 年 1 月から 3 年間分の月次収益率をもとに算出する.

P4 に関しては $E_U = 0.04$，$E_L = 0.03$，$V_U = 0.015$，$V_L = 0.025$ とし，α_E，α_V は (17) 式と以下の式を用いて算出する.

$$\alpha_V = \frac{\log \frac{1-0.99}{0.99}}{V_U - V_M} \tag{21}$$

P6 に関しては $E_U = 0.04$，$E_R = 0.035$，目標リスクおよび α_E，α_V は P4 と同様.

つづき

表 1　P4および P6（P6′）による解

	満足度 λ	期待収益率	リスク
P4による解	0.293954	0.034047	0.020953
P6(P6′)による解	0.231339	0.034419	0.021307

得られた解は，両モデルとも満足できると解釈されるものではない.

提案したモデル（P6）の方が満足度は低いが，得られた期待収益率は P4 による解よりも高い収益率を示している.

この理由は，意思決定者の有する希求水準の違いにある.

2 つの間の異なる点は目標期待収益率において必要レベルを設定する代わりに参照点に該当する目標値を定めることである.

参照点に該当する目標値を与えるということは，必要レベルを与えるということよりも，より明確に希求水準を有しているものと判断できる.

おわりに

まとめ

- 意思決定者の解に対する満足度水準を考慮したポートフォリオモデルの拡張モデルである価値関数を考慮したモデルを提案した.
- 従来のモデルと比較するために全証券数 30 からなるポートフォリオ選択問題を扱った.
- 計算の結果より，満足度 λ が 0.5 を下回る場合には，本提案手法の方が得られる満足度の値は低いものの期待収益率は目標値に近い結果を導出していることがわかった.
- 意思決定者によって与えられるパラメータから目標期待収益率に対する必要レベルが推定できるものであっても，参照点に該当する目標値を有する意思決定者に対しては，本提案手法を適用する方がより適切な解を提示できると考える.

おわりに

課題

- 意思決定者がどのゆに判断しているのか現状では不明なので，今後はポートフォリオモデルにおけるリスクそのものに関して意思決定者がどのように捉えているのかを明らかにし，このことを考慮したポートフォリオモデルの構築についての研究