ロバストポートフォリオ最適化を用いた資産運用モデルの有効性の検証

清水　豪士

富山県立大学　情報基盤工学講座
t715038@st.pu-toyama.ac.jp

January 7, 2022

はじめに

背景

- 金融資産の中からどの資産にどれだけ投資するかを決定する問題を，最適化というアプローチから計量的に推し進める方法にポートフォリオ最適化があるが，投資対象となる各々の資産の期待収益率と分散を過去のデータを用いて事前に推定し，その推定値を用いて最適化を行うが，推定値と実現地が乖離することが問題として挙げられる．
- この問題を取り扱う方法としてロバスト最適化によるアプローチが注目を集めている．

目的

- 国内株式市場のみに焦点を当て，34 銘柄を対象に検証を行い，ロバストポートフォリオ最適化の有効性を検証する．

平均・分散モデル

市場に N 個の資産 S_i が存在すると仮定し，資産 S_i の収益率を確率変数 R_i とする．
S_i へのポートフォリオウェイト（投資比率）を x_i とし，ポートフォリオをベクトル $x = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$ として表現する．
ここでは空売りを考慮しないため，ポートフォリオ x は $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ と $x_i \geq 0$ の 2 つの条件を満たす．
そしてポートフォリオ x の収益率は $R(x) = \sum_{i=1}^{N} R_i x_i$ と表すことができ，x のリターンとリスクの指標である期待収益率 $E[R(X)]$ と分散 $E[R(x)]$ は次のように表現できる．

$$E[R(x)] = E\left[\sum_{i=1}^{N} R_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E[R_i] x_i = \sum_{i=1}^{N} r_i x_i$$

$$V[R(x)] = E[(R(x) - E[R(x)])^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} R_i x_i - \sum_{i=1}^{N} E[R_i] x_i\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])] x_i x_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j$$

資産 S_i の期待収益率 $E[R_i]$ を r_i，資産 S_i と S_j の共分散 $E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])]$ を σ_{ij} としている．

つづき

本論文では直近の過去 T 期間の収益率に基づいて収益率の平均 r_i および共分散 σ_{ij} を計算する．（T を推定期間と呼ぶ）
このとき，リスク上限 σ_T^2 の下でリターンを最大にするポートフォリオウェイト x を決定する問題を，平均・分散モデル (P_D) として以下のように定義する．

$$
(P_D)\quad \left|\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} r_i x_i \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma_T^2 \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
 & 0 \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1,2,\dots,N
\end{array}\right.
$$

u_i は資産 S_i のポートフォリオウェイトの上限．
(P_D) は凸二次不等式制約を持つ凸二次計画問題である．

ロバスト最適化モデル

平均・分散モデル (P_D) は過去のデータから推定した期待収益率と共分散を用いているが，近年の不確実性が高い市場では難しい．
ロバスト最適化の手法を用いることで不確実性に対応することを考える．
本論文では期待収益率情報のみに不確実性を考慮した次の問題を扱う．

$$
(P_R)\quad \left|\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \displaystyle\min_{r\in U_r}\sum_{i=1}^{N} r_i x_i \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_i x_j \le \sigma_T^2 \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
 & 0 \le x_i \le u_i, \quad i = 1,2,\ldots,N
\end{array}\right.
$$

U_r は期待収益率ベクトル $r = (r_1, r_2, \ldots, r_N)^T$ の集合を表しており，不確実性集合と呼ぶ．(P_R) は各ポートフォリオ x に対し，U_r の中で最悪の期待収益率となることを想定している．
つまり，ポートフォリオの期待収益率を保守的に見積もって最適化を行うモデルと言い換えることができる．

矩形

矩形の不確実性集合は，期待収益率の推定値 $\tilde{r}_i$ とその許容乖離 δ_i を用いて以下のように定義する．

$$U_r = \{\, r \mid \ |r_i - \tilde{r}_i| \leq \delta_i,\ \ i = 1,2,\ldots,N \}$$

上記の式は，各資産の期待収益率 r_i が $\tilde{r}_i - \delta_i \leq r_i \leq \tilde{r}_i + \delta_i$ の範囲にあることを意味している．
本論文では空売りを考慮しないため，任意の x_i に対する最悪の期待収益率は $\tilde{r}_i - \delta_i$ であり，(P_R) は以下のようになる．

$$
(P_{R1}) \quad \left|
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (\tilde{r}_i - \delta_i) x_i \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma_T^2 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
& 0 \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1,2,\ldots,N
\end{array}
\right.
$$

(P_D) と同様に (P_{R1}) も凸二次不等式制約を持つ凸二次計画問題である．

つづき

ここで期待収益率は正規分布に従うと仮定し，信頼水準を考慮することで δ_i を設定し，これによって不確実性を制御する．

$$\delta_i = z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_i}{\sqrt{T}}$$

σ_i は資産 S_i の標準偏差，T は推定期間，$z_{\alpha/2}$ は標準正規分布における両側確率が $\alpha\%$ になる点を示している．

矩形のロバスト最適化モデルでは，各資産の期待収益率が独立に考慮されているため，全資産の期待収益率がそれぞれ最悪になる．
つまり，究極の保守的ポートフォリオを作り上げることができる．

楕円形

楕円形の不確実性集合は以下のように定義される.

$$U_r = \left\{ r \middle| (r - \tilde{r})^T {\sum}_r^{-1} (r - \tilde{r}) \leq \delta^2 \right\}$$

$\sum_r$ は各資産の期待収益率の共分散行列であり，δ は不確実性の大きさを表す定数である.
(P_R) は次のようになる.

$$(P'_{R2}) \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i x_i - \delta \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}^r x_i x_j} \\ \text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma_T^2 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1,2,\dots,N \end{array} \right.$$

σ_{ij}^r は $\sum_r$ の第 ij 要素のを表す.
目的関数は期待収益率の項に不確実性の関数が追加された形となり，δ は投資家のリスク回避度を表現していると見ることができる.

つづき

期待収益率の分布に定常性を仮定した場合，σ^r_{ij} は期待収益率の共分散 σ_{ij} を用いて表すことができる．

$$\sigma^r_{ij} = \frac{1}{T}\sigma_{ij}\ , i = 1,2,\ldots,N$$

よって (P'_{R2}) は以下のように書き換えることができる．

$$(P_{R2})\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i x_i - \frac{\delta}{\sqrt{T}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_i x_j} \\ \text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_i x_j \le \sigma_T^2 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & 0 \le x_i \le u_i, \quad i = 1,2,\ldots,N \end{array}\right.$$

これは二次錐計画問題として定式化できる．

各モデルの関係

矩形

矩形の不確実性を考慮したモデル (P_{R1}) は (P_D) の目的関数における期待収益率 $\tilde{r}_i$ から δ_i を引いている．
各資産のリスクと投資家が想定する不確実性に基づいて，期待収益率を保守的に修正して最適化を行なっている，と解釈ができる．

楕円形

楕円形の不確実性を考慮した (P_{R2}) は (P_D) の目的関数における期待収益率をリスク回避度 $(\delta/\sqrt{T})$ と投資家の許容するリスク上限 σ_T^2 に基づいて保守的に修正して最適化を行なっていると解釈できる．

不確実性を考慮したモデル (P_{R1}),(P_{R2}) は，不確実性を考慮しないモデル (P_D) の入力である期待収益率の推定値を，投資家の想定するリスクの許容度あるいは回避度に基づいて修正していると解釈することができ，(P_D) の拡張モデルであると考えられる．

データとその性質

資産 S_i として，水産，鉱業等 34 業種から各 1 社，計 34 企業をランダムに選択.

1990 年 1 月から 2014 年 12 月を対象期間として，各企業の月次平均株価を取得.

表 1　選択した 34 社とその企業株価の基本情報

企業名	リターン平均（%/年）	標準偏差（%/年）	08年10月リターン（%/月）	企業名	リターン平均（%/年）	標準偏差（%/年）	08年10月リターン（%/月）
1.トヨタ自動車	8.59	25.96	-14.84	18.日本車輌製造	-0.14	35.12	-42.23
2.日本水産	2.10	33.70	-37.40	19.セイコーホールディングス	3.17	47.23	-25.58
3.日鉄鉱業	-0.11	36.08	-13.89	20.ヤマハ	6.13	36.20	-47.96
4.積水ハウス	2.28	26.05	1.15	21.松屋	7.83	44.07	13.12
5.キリンホールディングス	2.12	24.13	-22.51	22.スルガ銀行	6.93	31.64	-24.67
6.ユニチカ	-0.97	44.60	-24.72	23.野村ホールディングス	2.13	40.33	-31.98
7.大王製紙	3.32	33.38	-16.72	24.オリックス	13.67	42.57	-21.62
8.石原産業	0.76	43.81	-45.00	25.三菱地所	5.83	32.90	-15.07
9.武田薬品工業	5.45	22.28	-8.00	26.小田急電鉄	0.42	20.19	-8.72
10.昭和シェル石油	4.87	33.20	-23.08	27.日本通運	0.32	29.14	-15.95
11.ブリヂストン	8.66	30.34	-13.78	28.日本郵船	0.50	31.32	-30.24
12.旭硝子	-0.45	30.52	-33.84	29.ANAホールディングス	-3.83	26.36	-0.53
13.神戸製鋼所	0.99	35.23	-24.64	30.ケイヒン	-1.34	35.65	-9.22
14.古河電気工業	3.97	46.58	-36.12	31.日本電信電話	0.76	28.40	-16.42
15.石井鐵工所	4.67	51.15	-20.92	32.関西電力	-1.95	24.80	4.26
16.オムロン	8.08	34.33	-13.99	33.東京ガス	0.60	22.63	-3.89
17.川崎重工業	6.28	41.97	-19.72	34.日本工営	2.91	37.22	-12.39

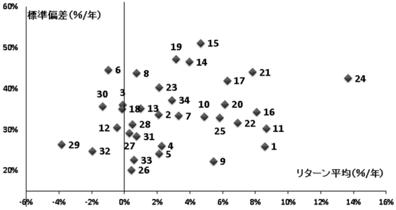

図 1　リターン平均と標準偏差の散布図

分析結果

表 2　設定条件

分析期間	1993年2月から21014年12月
推定期間	リバランスを行う時点から過去36か月
回転率上限	20%(月)
リバランス頻度	毎月
各資産への投資ウェイト上限	50%
リスク上限	20%(年)
信頼水準	30%,50%,70%

ポートフォリオは毎月リバランスを行うものとし，その回転率に上限 M を 20% とした．
すなわち，x_i^0 を前月のポートフォリオウェイトとすると，

$$\sum_{i=1}^{N} \left| x_i - x_i^0 \right| \leq M$$

を満たすようにする．
これらの制約を与えることで，1 つの資産しか保有しないというリスクを回避することができ，またリバランス時に発生する手数料等のコストを抑制することが可能である．

パフォーマンス分析

表 3　2008 年 10 月のポートフォリオウェイト

（単位%）

企業番号		5	7	8	11	16	18	21
Pd								50.00
Pr1	α=30%	30.00						20.00
	α=50%	50.00						
	α=70%	40.00						
Pr2	α=30%	19.77	6.26	2.21	4.16	0.31	6.66	3.00
	α=50%	19.22	5.94	2.30	4.40	1.09	6.46	2.00
	α=70%	18.68	5.65	2.35	4.51	1.80	6.28	2.00

企業番号		22	25	26	28	29	31	32
Pd			50.00					
Pr1	α=30%		30.00	20.00				
	α=50%			40.00	10.00			
	α=70%			40.00				20.00
Pr2	α=30%	5.28		8.85	0.58	15.08	15.75	12.38
	α=50%	5.50		8.36	0.23	15.77	15.79	12.48
	α=70%	5.49		8.26		16.36	15.84	12.58

表 3 より，例えば (P_D) では資産 S_{21} と S_{25}(企業 21 と 25) を保有していることがわかる．

つづき

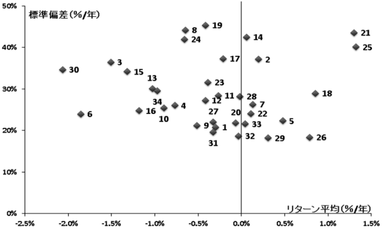

図 2　2008 年 10 月時点から直近の過去 36 ヶ月のリターン平均と標準偏差

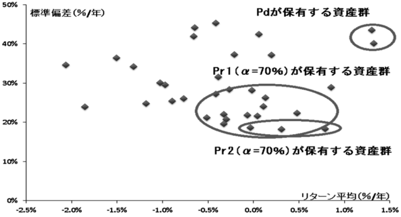

図 3　2008 年 10 月における各モデルの保有資産の内容

表 3 と図 3 より，2008 年 10 月においては，不確実性を考慮したモデルの方が標準偏差の小さい資産（リスクの小さい）を保有しており，保守的なポートフォリオを組んでいることがわかる．

つづき

リーマンショックが起こった 2008 年 9 月以降，ロバスト最適化モデルを適用することによってどの程度損失を抑えることができたのか，またモデルの精度として，理論値と実現地がどの程度乖離しているのかを確認する．

表 4 分析期間のリターン平均、2008 年 10 月のリターン、2008 年以降の最小リターン

実現値		リターン平均(%/月)	08年10月リターン(%/月)	08年以降の最小リターン(%/月)
Pd		5.70	-18.67	-18.67
Pr1	α=30%	5.94	-18.44	-18.44
	α=50%	7.05	-19.92	-19.92
	α=70%	6.70	-13.02	-13.02
Pr2	α=30%	2.67	-19.27	-19.27
	α=50%	2.55	-19.11	-19.11
	α=70%	2.50	-18.93	-18.93

表 5 理論値と実現値の差の二乗の総和

Pd	20.70
Pr1(α=70%)	9.12
Pr2(α=70%)	5.80

表 4 より，$(P_{R1})(\alpha = 70\%)$ は 2008 年 10 月以降の最大損失を -13% に抑えることに成功した．

他の信頼水準の場合および (P_{R2}) の結果を見ると，不確実性を考慮しても，リーマンショックの損失を抑制することができたと結論を出すことはできない．

しかし，表 5 で示すように，不確実性を考慮したモデル (P_{R1}),(P_{R2}) の方が精度が高いということができる．

以上のように，ランダムに選出した 34 銘柄ではロバストポートフォリオ最適化の有効性を確認することができなかった．

つづき

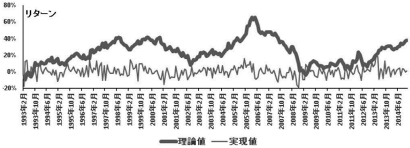

図 4　(P_D)の理論値と実現値の推移

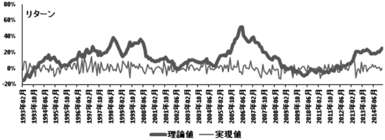

図 5　(P_{R1})（α=70%）の理論値と実現値の推移

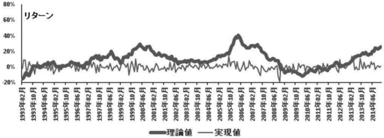

図 6　(P_{R2})（α=70%）の理論値と実現値の推移

各モデルの理論値と実現地の推移を示している.

つづき

34 銘柄に国債短期を加えた場合の分析結果を下表に示す.

表 6　分析期間のリターン平均、2008 年 10 月のリターン、2008 年以降の最小リターン

実現値		リターン平均(%/月)	08年10月リターン(%/月)	08年以降の最小リターン(%/月)
Pd		3.60	-13.71	-15.93
Pr1	α=30%	3.87	-10.41	-10.41
	α=50%	5.56	-10.40	-10.40
	α=70%	4.59	-9.63	-9.63
Pr2	α=30%	2.05	-10.25	-10.25
	α=50%	1.77	-10.13	-10.13
	α=70%	1.71	-10.04	-10.04

表 6 より，国債というリスクの小さい資産を加えたデータに対しては，不確実性を考慮したモデルの方が，2008 年 10 月の損失と，それ以降の最大損失を抑えることができたことがわかる.

おわりに

まとめ

- 対象となる市場を国内株式に絞った場合，ロバストポートフォリオ最適化が有効であるかを実証した．
- ロバスト最適化が有効であるとの結論を出すことはできなかった．
- 従来研究では 15% から 25% 程度まで抑えることができたが，それができなかった原因として，扱う資産の性質の違いが考えられる．
- 国内株式の標準偏差は最低でも 20% を超えていたため，リスクを回避したポートフォリオの構築を試みたとしても，十分にリスク回避できなかったと考えられる．
- ランダムに選出した 34 銘柄のデータを用いて，国内株式に対してロバストポートフォリオ最適化が有効であるか行なったが，必ずしも有効になるとは限らないことがわかった．

おわりに

課題

- ロバストポートフォリオ最適化が有効になる条件を追求すること．
- 国債を含めたデータに対してロバストポートフォリオ最適化の有効性を確認することができたが，その違いがどこにあるのか解明すること．