

超離散化

—セルオートマトンと微分方程式をつなぐ—

薩摩 順吉 時弘 哲治

1 はじめに

科学技術の発展に数学が果たした役割はきわめて大きい。とくに解析学はその中心に位置していた。実際、解析学の原点は Newton, Leibnitz による微分を用いた物体の運動の記述にある。以降、天文学や物理学におけるさまざまな現象が微分方程式として表現され、その解を求めるという努力がなされてきた。時代が進むと、技術すなわち工学にもそうした方法が導入されるようになる。現在ではさらに生物学や経済学を含むさまざまな分野で微分方程式が用いられている。

コンピュータの登場により解析手段は多様化した。離散的な方程式の重要性も増したのである。その結果、代数的な手法も応用上必要になってきている。離散的な方程式の極めつけはセルオートマトン (Cellular Automaton, CA), すなわち、独立変数・従属変数のすべてが離散的なシステムである [24]。CA の起源は von Neumann にあるといわれている。もともとの動機づけは自分自身を再生する機械、さらには自分より複雑な機械を作り出す機械の存在証明にあった。その後、1970 年に Conway が空間 2 次元ので CA, ライフゲームを提案してから、単純な代数規則に基づく発展系という概念の重要性が認識され

[筆者紹介]



さつま じゅんきち。1968 年京都大学工学部数理工学科卒業。1973 年同大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学、工学博士。京都大学工学部助手、宮崎医科大学医学部助教授、東京大学工学部助教授を経て、現在東京大学大学院数理科学研究科教授。専門は数理物理学、応用数学。最近是非線形離散方程式に興味をもっている。日本応用数理学会、日本物理学会、日本数学会、日本流体力学会、日本シミュレーション & ゲーミング学会会員。著書：「確率統計」(岩波書店)、「物理の数学」(岩波書店)等。



ときひろ てつじ。1979 年東京大学工学部物理学科卒業。1982 年同大学大学院工学系研究科博士課程中退。工学博士。東京大学工学部助手、同講師を経て、現在東京大学大学院数理科学研究科助教授。専門は数理物理学。最近は、可積分セルオートマトンを主に研究している。日本応用数理学会、日本物理学会、日本数学会会員。

るようになった。

1983 年, Wolfram はそうした発展系で最も簡単な 1 次元モデルを提案した。「基本的な」セルオートマトン (Elementary CA, ECA) と呼ばれるそのモデルは, 1(空間)+1(時間) 次元で, $\mathbf{Z}_2 \sim \{0, 1\}$ に値をとる CA である。時刻 $t+1$, 位置 i におけるセルの値を u_n^{t+1} とすると, それは時刻 t , 位置 $n, n+1, n-1$ におけるセルの値 $u_n^t, u_{n+1}^t, u_{n-1}^t$ により決定される。すなわち, ECA の時間発展は函数 $u_n^{t+1} = F(u_n^t, u_{n+1}^t, u_{n-1}^t)$ により与えられる。このような F は $2^{2^3} = 256$ 個存在するが, そのうちとくに, 空間対称かつ $0 = F(0, 0, 0)$ を満たす $2^5 = 32$ 通りの legal ECA については, Wolfram によりよく調べられている。その結果によると, 各々の legal ECA の周期的境界条件およびランダムな初期状態からの時間発展の様子をもとに, 十分時間が経過した後の状態は次の三つに分類される[26]。タイプ 1: すべてのサイトが単一の状態になる, タイプ 2: いくつかの空間的局在パターンを含む定常状態または周期的状態になる。タイプ 3: いくつかの時間的, 空間的局在パターンを含むカオス的な状態になる。

この結果は CA が離散力学系のモデルとなること, すなわち常微分方程式系と何らかの対応関係があることを示唆している。それでは時空における発展系, すなわち偏微分方程式との関連についてはどうであろうか。Wolfram は 1985 年「CA 理論における 20 の問題」として未解決の重要な問題を列挙した[27]。その 9 番目に「What is the correspondence between cellular automata and continuous systems」というものがある。彼はこの問題に対するコメントの中で, 時空変数の離散化は方程式の解を数値的に求める際の近似としてとらえることができるが, 物理量の離散化についてはわからないと述べている。時空変数はその差分間隔の極限をとれば連続系に移行するが, 離散的な物理量と連続的な物理量との関係は定かではないのである。彼はさらに, 「Explicit examples of cellular automaton approximations to partial differential equations of physical importance would be valuable」と述べ, 具体的に微分方程式から CA を構成する重要性を指摘している。

筆者たちの研究グループは近年, 離散可積分系を一つの主要な研究テーマにしている。可積分とは完全積分可能ともいい, もともとは Hamilton 力学系の初期値問題が解ける, すなわち初期値問題の解が得られるという意味をもっている[15]。その概念を無限次元の力学系ともいえる非線形偏微分方程式へ拡張したのが, 無限次元可積分系である。ソリトン方程式はその典型的なもので, 代表的な例として Korteweg-deVries (KdV) 方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

がある。この方程式は, 相互作用に際して安定に振る舞う非線形分散孤立波ソリトンを解としてもち, 原理的に初期値問題を解くことのできる逆散乱法の定

式化が可能であり，無限個の独立な保存量・対称性が存在するという性質を有している．そのことが無限次元可積分系と呼ぶ理由である[9]．

離散可積分系の典型例は，こうした性質を共有する(独立変数の一部が離散的な)半離散もしくは(独立変数すべてが離散的な)完全離散方程式である．前者に属するものとして，戸田方程式，

$$\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} = \exp[u_{n+1}(t)] - 2 \exp[u_n(t)] + \exp[u_{n-1}(t)] \quad (2)$$

があり，後者に属するものとして，広田・三輪方程式(もしくは離散 KP 方程式という)

$$\begin{aligned} & -\delta \tau(l-1, m, n) \tau(l, m-1, n-1) + (1+\delta) \tau(l, m-1, n) \\ & \cdot \tau(l-1, m, n-1) - \tau(l, m, n-1) \tau(l-1, m-1, n) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

がある．なお，(3)式において δ は適当なパラメータである．

連続系も離散系も共通した性質をもっているとき，従属変数まで離散化した超離散系(CA をこのように呼ぶことにする)ではどうであろうかという問題が自然に生じてくる．本稿の主題はその問題に対するこれまでの研究成果と応用例を示すことにある．まず2章で，解がソリトンの振る舞いを示す CA の研究経過を概観した後，可積分な CA が存在することを指摘し，その性質について議論する．次に3章で，「超離散極限」という手法を用いて，可積分な CA がソリトン方程式と関連づけられることを示した後，その結果がもつ数学的意味について議論する．4章では，「超離散極限」が可積分系だけでなく他のシステムへも適用可能であることを指摘する．

2 ソリトンセルオートマトン

CA においてソリトンの解が存在することは Wolfram の初期の研究においても指摘されていたが[25]，そのようなパターンの解析が活発になったのは1980年代の後半からである．例えば Park らは， u_n^{t+1} が u_n^t だけでなく $u_{n'}^{t+1}$ ($-\infty < n' \leq n-1$) にも依存するフィルター型 CA において，際立ってソリトンパターンが現れることを示している[14]．また，Fokas らは発展規則として

$$\begin{aligned} u_n^{t+1} \equiv & \sum_{j=0}^r u_{n+j}^t - \sum_{j=0}^{r-1} u_{n-r+j}^{t+1} \\ & + \max[u_{n-r}^{t+1}, u_{n-r+1}^{t+1}, \dots, u_{n-1}^{t+1}, u_n^t, u_{n+1}^t, \dots, u_{n+r}^t] \pmod{2} \end{aligned}$$

の形のものを考え，適当な初期値のもとでソリトンの解が存在することを示した[3]．しかしながら，これらの CA がそうした解をもつ理由については明らかではなく，またソリトンの振る舞いをするパターンはごく限られた初期条件のものに限られていた．一方，Bruschi らは，ソリトン解の構成は代数的な操作のみで行なえることに注目し，対応する線形方程式系(Lax 形式)を有

限体上で考えることによって「可積分」CA を構成した[1],[2]. この場合, もとも実数体上で可積分な離散方程式を有限体上の方程式と読み替えることになる. したがって, 構成方法から明らかに無限個の保存量をもつ. 連続的な非線形方程式との対応も明確である. ただし, 得られるパターンは, コヒーレントな構造はもつものの, 粒子的な孤立波(=ソリトン)の性格はもっているようには見えない. もともとのソリトン解は有限体上で閉じていず, 方程式は変わっていないため, 「有限体上でのソリトン解」が構成できないものと考えられる.

これらの CA に対して, 1990 年に高橋と薩摩が提案したもの(以下ソリトン CA と呼ぶ)は, 無限遠方で 0 という境界条件のもとで, 「すべてのパターンがソリトンになる」という著しい性質をもっている[18],[19]. このセルオートマトンは 0,1 の二値のみをとる空間 1 次元系であり, その時間発展の規則は

$$u_n^{t+1} = \begin{cases} 1 & u_n^t = 0 \quad \text{および} \quad \sum_{i=-\infty}^{n-1} u_i^t > \sum_{i=-\infty}^{n-1} u_i^{t+1} \quad \text{のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (4)$$

で与えられる. 先に触れた Fokas たちの CA は有限個の近距離相互作用をもつものに対して, ソリトン CA では無限の長距離相互作用をもつ点が大きな特徴である.

この時間発展規則は, 次の簡単な操作を時刻 t の 0,1 列に施して時刻 $t+1$ の 0,1 列を得ることと等価である.

1. すべての 1 をただ一度だけ動かす.
2. まず, 一番左にある 1 をその右の最も近い 0 と入れ替える.
3. 次に, 残りの 1 のうち最も左にある 1 をその右の最も近い 0 と入れ替える.
4. 以上の操作をすべての 1 を動かし終えるまで続ける.

図 1 に時間発展の例を示す. 1 のかたまりを孤立波, その長さを波の振幅とみると, (i) 振幅の大きいものほど速く進み, (ii) 衝突の前後で位相はずれれるが振幅は変わらない, ことがわかる. これはまさにソリトンである. この CA は, N ソリトン状態, 無限個の保存量をもっている. 実はすべての状態がソリトンから構成されていることもわかる. その意味で, 純粋に「ソリトンセルオートマトン」と呼んでもいい CA である.

ソリトン CA が無限個の保存量をもっていることは容易に示すことができる. たとえば, ある時刻で次の状態であるとする.

```

t  ..001111000110010000000000000000000000..
    ↓
    ..000000111001101100000000000000000000..
    ..000000000011001001111000000000000000..
    ..000000000000110100000111100000000000..
    ..000000000000010110000000111100000000..
    ..0000000000000010011000000000111100..
  
```

図1 ソリトン CA の時間発展

... 00011110011011100010101100000 ...

ただし '10' という並びに下線が引いてあり、その個数は6である。ここでそれらの '10' を除くと、

... 000111101110010000 ...

というパターンが現れる。やはり '10' の個数を数えると、3であることがわかる。さらに、この '10' を除くと、

... 00011110000 ...

であり、'10' は1個存在する。以下、この操作を繰り返すことにより得られる '10' の数を並べると、 $\{6, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots\}$ (0は存在しないという意味) という数列が得られる。これは非増加数列であり、かつ時刻とともに変化しない。実際、次の時刻のパターンは

... 00000001100100011101010011111000 ...

であるが、やはり同じ数列が得られることがすぐにわかる。したがって、この半無限列の各要素は保存量であり、保存量は加算無限個存在することになるのである。

このソリトン CA は、Bruschi らのもののように可積分な方程式から出発して構成されたものではない。では、なぜこの CA がこのような際立ったソリトン性をもつのであろうか？ その理由については次章で述べることとして、ここでは2つの重要な CA の拡張を挙げることにする。一つは、現在「箱と玉の系」[19], [16]と呼ばれているものである。この系は最近、量子可積分系との関係が見いだされ活発に研究がなされている。もう一つは戸田型 CA [20]と呼ばれるもので、戸田方程式に良く似た性質をもつ。この CA の発見が次章で述べる「超離散極限」を生み出す直接の契機を与えたのである。

箱と玉の系とは、ソリトン CA において、0, 1 という数を「箱の中の玉の個数」と読み替えたものである。つまり、一列に並んだ無限個の箱の中を有限個の玉が運動する力学系とみなすのである (図2)。このように解釈し直すことによって、新たに2つの自由度を導入できる。一つは、箱の容量であり、もう一つは玉の種類である。M 種類の玉が存在するとき、その玉を1~M の自然数で区別し、時間発展の規則を書き下すと次のようになる。

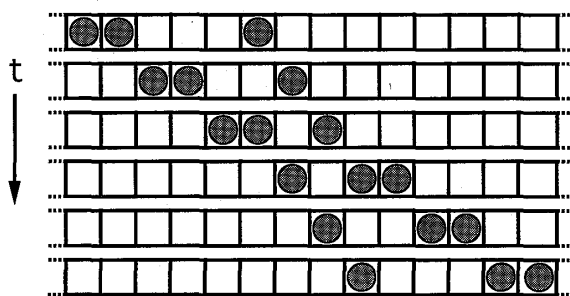


図2 箱と玉の系. 空き箱が0に玉の入った箱が1に対応している。

1. すべての玉をただ一度だけ動かす.
2. まず, 一番左にある番号1の玉をその右の最も近い空きのある箱に移す.
3. 次に, 残りの番号1の玉のうち最も左にあるものをその右の最も近い空きのある箱に移す.
4. 以上の操作をすべての番号1の玉を動かし終えるまで続ける.
5. 次に, 番号2の玉について以上と同じ操作を行う.
6. 以下, $3, 4, \dots, M$ の玉について順次この操作を繰り返す.

このように拡張しても玉の動きはやはりソリトン的となる. ただし, 玉の種類を増した系では, ソリトンを構成する玉の種類が衝突の前後で複雑に入れ替わる性質をもつ.

戸田型 CA は数年前高橋と松木平により提案されたもので,

$$u_n^{t+1} - 2u_n^t + u_n^{t-1} = \max[u_{n+1}^t, 1] - 2\max[u_n^t, 1] + \max[u_{n-1}^t, 1] \quad (5)$$

で与えられる発展系である. [20]では, 数値計算により, 適当な初期条件のもとでソリトン的なパターンを生じることが示されている. ただし, u_n^t は, 0, 1 の 2 値だけではなく, 一般にすべての整数値をとり得る. 戸田型 CA という名前の由来は, 上式と戸田方程式(2)との著しい類似性にある. 実際, この CA は(2)において, 時間微分を中心差分に置き換え, $\exp u$ を $\max[u, 1]$ に置き換えたものになっている. すなわち, (5)式は CA と微分方程式との対応関係を考える上できわめて都合の良い(max という操作とソリトンに特有な指数関数との対応が良く見える)形を与えており, さらに, 従属変数が離散値のみをとることを可能にしているのである. 典型的な可積分方程式である戸田方程式と(5)式の類似性は, CA がソリトン的な解をもつことと決して無縁でない. 次章で述べるように密接な関係が存在するのである.

3 ソリトン方程式の超離散化

戸田方程式(2)の可積分性を保ったまま時間を離散化した式が広田によって与えられている[7]. (「可積分性を保つ」離散化については文献[6]や[9]を参照.)その方程式は

$$v_n^{t+1} - 2v_n^t + v_n^{t-1} = \log[\delta + \exp(v_{n+1}^t)] - 2\log[\delta + \exp(v_n^t)] + \log[\delta + \exp(v_{n-1}^t)] \quad (6)$$

という表現をもっている. この形から(5)との対応を思いつくのは難しくはないであろう. ヒントになるのは, 任意の実数 a, x について成り立つ次の簡単な恒等式である.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log(e^{a/\epsilon} + e^{x/\epsilon}) = \max[a, x] \quad (7)$$

この式は, 解析的な関数の極限が max という解析性を破った関数になるこ

とを示し, (5)と(6)との関係を明らかにしている. 実際, $\delta = \exp(1/\varepsilon)$ において, $u_n^t \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon v_n^t$ とすれば, (6)は形式的に戸田型 CA(5)と一致する. そればかりでなく, (6)の解も ε に依存するので ($v_n^t = v_n^t(\varepsilon)$), 極限 u_n^t が存在すれば, それが(5)を満たすことは明らかである. こうして, 連続的な値をとる離散方程式から離散的な値のみをとる CA とその解を系統的に作り出す手法が見いだされた[21], [8]. この手法を使うと, 微分方程式から(一意的ではないが)それに対応する CA を導くことができるのみならず, 同時にその CA の解も構成できるのである. たとえば KdV 方程式(1)の離散版を考え, 超離散極限をとって従属変数まで離散化したすると, 2章で紹介したソリトンで CA(4)とそのソリトン解が得られる. この手法は, B. Grammaticos によって, 超離散化 (ultra-discretization) と名付けられた.

可積分方程式の数理構造を明らかにした一般理論としていわゆる佐藤理論 (KP 階層の理論)がある. 1章で紹介した広田・三輪方程式(3)はこの理論の要の一つといってもよい. 「箱と玉の系」において箱の容量が場所ごとに異なることを許す拡張版を考えよう. これは(3)で δ が n に依存するとした非自律離散 KP 方程式,

$$-\delta_n \tau(l-1, m, n) \tau(l, m-1, n-1) + (1+\delta_n) \tau(l, m-1, n) \cdot \tau(l-1, m, n-1) - \tau(l, m, n-1) \tau(l-1, m-1, n) = 0 \quad (8)$$

の超離散極限として得られるものである[22]. まず(8)において, $\tau(l, m, n)$ に

$$\tau(l, m, n) = \tau(l-M, m-1, n) \quad (9)$$

の条件を課す. ただし M は与えられた自然数である. ここで, $\sigma_s^n \equiv \tau_{s-1, m=0, n}$ とおくと, (8)は

$$(1+\delta_n) \sigma_{s-M}^{n-1} \sigma_{s+1}^n - \sigma_{s+1-M}^{n-1} \sigma_{s+1}^{n-1} - \delta_n \sigma_{s-M}^n \sigma_{s+1}^{n-1} = 0 \quad (10)$$

の双線形方程式になる. 一方, 箱と玉の拡張系で n 番目 ($-\infty < n < \infty$) の箱の容量を θ_n で表し, また玉が M 種類存在するとしてそれらを整数指標 j ($1 \leq j \leq M$) で区別することとする. 時刻 t において n 番目の箱の中にある指標 j をもつ玉の個数を $u_{n,j}^t$ と書くと, その時間発展規則は

$$u_{n,j}^t = \min \left[\sum_{n'=-\infty}^{n-1} u_{n',j}^{t-1} - \sum_{n'=-\infty}^{n-1} u_{n',j}^t, \theta_n - \sum_{j'=1}^{j-1} u_{n,j'}^t - \sum_{j'=j}^M u_{n,j'}^{t-1} \right] \quad (11)$$

と表される. さらに Y_n^s ($s \equiv Mt+j$) を

$$Y_n^s \equiv Y_n^{Mt+j} := \sum_{n'=-\infty}^n \left(\sum_{j'=j}^M u_{n',j'}^t + \sum_{t'=t+1}^{\infty} \sum_{j'=1}^M u_{n',j'}^{t'} \right)$$

と定義すると, (11)式は,

$$Y_n^{s+1} + Y_{n-1}^{s-M} = \max [Y_n^s + Y_{n-1}^{s+1-M}, Y_{n-1}^{s+1} + Y_n^{s-M} - \theta_n] \quad (12)$$

となる. この式は, $\delta_n = \exp[-\theta_n/\varepsilon]$ として, (10)を超離散化したものに等しい. 非自律離散 KP 方程式のソリトン解が箱と玉の系のソリトンの的なパターンを与えることも戸田型 CA 同様に示すことができる.

なお箱と玉の系には、もう一つの重要なソリトン方程式-戸田分子方程式-が附随していることを注意しておこう[10]. すなわち、 Q_n^{Mt+j} を時刻 t において n 番目の「ソリトン」に含まれる指標 j の玉の個数、 E_n^{Mt+j} を j 番目の玉を動かした後の n 番目と $n+1$ 番目のソリトンの間の間隔としたとき、箱と玉の系は

$$Q_n^{s+M} = \min \left[\sum_{i=1}^n Q_i^s - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i^{s+M}, E_n^s \right], \quad (n=1, 2, \dots, N), \quad (13)$$

$$E_n^{s+1} = Q_{n+1}^s + E_n^s - Q_n^{s+M} \quad (n=1, 2, \dots, N), \quad (14)$$

と書かれる. ただし、 $E_0^s = E_N^s = 0$ である. これは、拡張された戸田分子方程式、

$$I_n^{s+M} = I_n^s + V_n^s - V_{n-1}^{s+1} \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (15)$$

$$V_n^{s+1} = \frac{I_{n+1}^s V_n^s}{I_n^{s+M}} \quad (n=1, 2, \dots, N-1) \quad (16)$$

の超離散極限で得られるものである. この結果を用いると、箱と玉の系がソリトンの振る舞うこと、無限個の保存量が存在すること、散乱行列が Yang-Baxter 関係式を満たすことなどを証明できる[23].

最後に、最近急速に研究が進展している箱と玉の系と可積分格子模型の関係について触れておく. 容量 1 の箱と玉の系において二つのソリトンはその構成要素に注目すると、たとえば、

$$113345 + 245 \longrightarrow 135 + 123445$$

のように散乱される. 山田と国場は、この振る舞いが A 型の結晶基底に対する組み合わせ論的 R 行列の作用に等しいことを指摘した[28]. また、樋上らは、量子化された Lotka-Volterra 方程式(Bogoyavlensky 方程式)から構成される可解格子模型において、変形パラメータ q を 0 にとった極限で許される状態が箱と玉の系の時間発展パターンに一致することを示した[5]. この結果は、絶対零度における可解格子模型の(適当な境界条件における)基底状態が(可積分な)CA パターンを与えた点で重要である. 彼らはこの CA を得る手法を結晶化(crystallization)と呼んでいる. さらに、幡山らは容量 1 の箱と玉の系が A 型の組み合わせ論的 R 行列から構成される 2 次元格子系の基底状態に一致することを示すとともに、affine 型を含む一般の Lie 環に拡張し、T-system などとの関係について議論している[4]. こうした研究の蓄積により、箱と玉の系の背後にあるより大きな数理構造が明らかになる日も近いと思われる.

4 非可積分系への応用

これまで超離散極限の方法を用いて可積分であるソリトン方程式に対応する CA が存在することを示してきた. この手法はより広いクラスの系に適用可能であろうか. ポイントとなるのは超離散極限である. 適当な形の完全離散(偏

差分)方程式が与えられれば超離散系が得られるし、連続化を行うことによって微分方程式も得られる。また、いくつかの仮定の下で逆超離散化もできる。すなわち、CA に対応する完全離散系を構成でき、さらに連続極限をとってやはり対応する微分方程式を作ることにもできる。Wolfram の提出した CA の 9 番目の問題に一定の解を与えることができるのである。ここではソリトン方程式以外の例を紹介しておくことにしよう。

まず非線形拡散系への適用である。西成と高橋は Burgers 方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (17)$$

を超離散化して対応する CA を導出し、交通渋滞の解析にその結果を適用した [11], [12]. 彼らはまず Cole-Hopf 変換, $u = f_x/f$, で (17) を線形化した式, $f_t = f_{xx}$, を差分化し、完全離散方程式,

$$u_n^{t+1} = u_{n-1}^t \frac{(1-2\delta)u_n^t/c + \delta(1+u_{n+1}^t u_n^t/c^2)}{(1-2\delta)u_{n-1}^t/c + \delta(1+u_{n-1}^t u_n^t/c^2)} \quad (18)$$

を得ている。ここで小さな変数 ε を導入して, $u_n^t = \exp(U_n^t/\varepsilon)$, $(1-2\delta)/(c\delta) = \exp(-M/\varepsilon)$, $1/c^2 = \exp(-L/\varepsilon)$ の変換を施し, $\varepsilon \rightarrow +0$ の超離散化を行って得られるのが,

$$U_n^{t+1} = U_{n-1}^t + \max[0, U_n^t - M, U_{n+1}^t + U_{n-1}^t - L] - \max[0, U_{n-1}^t - M, U_{n-1}^t + U_n^t - L] \quad (19)$$

の CA である。彼らはこの CA を用いた計算において、非渋滞相から渋滞相への移行でオーバーシュートする状況を実現している。

西成と高橋が提案した CA は、特別な場合に ($L=M=1$ のとき), Wolfram の ECA のうちの一つ、ルール 184 に一致する。この例のような対応関係は、実は他の ECA についても考えることができる。いくつかの試みが既に行われているが [17], ここでは野辺による結果を紹介しておこう [13].

ECA の時間発展を与える関数 $u_n^{t+1} = F(u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t)$ に,

$$R = \sum_{u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t} F(u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t) \cdot 2^{2^2 \cdot u_{n-1}^t + 2^1 \cdot u_n^t + 2^0 \cdot u_{n+1}^t}$$

の規則で番号 R をつける。すると ECA の全体は $\{F_{2^0}, F_{2^1}, \dots, F_{2^7}\}$ を生成元とする \mathbf{Z}_2 -加群と見なせる。この \mathbf{Z}_2 -加群は、集合 $S = \{u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t\}$ に演算 \max を導入することにより、自然に \mathbf{Z} -加群の中に埋め込まれる。すなわち、ルール番号 R が偶数のもの (EECA と呼ぶことにする) は、集合 S に演算 \max を導入して得られる半群から生成される \mathbf{Z} -加群の元として一意的に表すことが可能である。奇数ルールの ECA は適当な変換により偶数ルールの ECA と 1 対 1 の対応関係をつけることができるので、偶数ルールの ECA (EECA) のみ考察すればよい。集合 $S = \{u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t\}$ から演算 \max を積とする位数 $2^3 - 1 = 7$ の可換な半群を

$$H = \{u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t, \max(u_{n-1}^t, u_n^t), \max(u_{n-1}^t, u_{n+1}^t), \\ \max(u_n^t, u_{n+1}^t), \max(u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t)\}$$

とし, これから得られる \mathbf{Z} -加群,

$$\tilde{G} = \{G | G = a_1 u_{n-1}^t + a_2 u_n^t + a_3 u_{n+1}^t \\ + a_4 \max(u_{n-1}^t, u_n^t) + a_5 \max(u_{n-1}^t, u_{n+1}^t) \\ + a_6 \max(u_n^t, u_{n+1}^t) + a_7 \max(u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t), a_i \in \mathbf{Z}\}.$$

を考える. EECA を \mathbf{Z}_2 -加群とみたときの基底は \mathbf{Z} -加群 \tilde{G} の元として一意に表現可能である. こうした事実は 3 近傍 2 値の CA だけでなく, もっと一般的な CA についても成り立つ.

以上の準備のもとで, 各 EECA に微分方程式を対応づける. 次の操作を逆超離散極限と呼ぶことにしよう.

$$\max(x_1, \dots, x_n) \implies \varepsilon \log \{C_1 \exp(x_1/\varepsilon) + \dots + C_n \exp(x_n/\varepsilon)\}$$

ただし, $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ は適当な正定数である. \mathbf{Z} -加群 \tilde{G} の元として表されている EECA にこの逆超離散を施すと, 差分方程式,

$$e^{\hat{U}} = C_1 C_2 C_3 e^{a_1 \underline{U}} e^{a_2 \underline{U}} e^{a_3 \bar{U}} (C_4 e^{|a_4| \underline{U}} + C_5 e^{|a_4| \underline{U}})^{\frac{a_4}{|a_4|}} (C_6 e^{|a_5| \underline{U}} + C_7 e^{|a_5| \bar{U}})^{\frac{a_5}{|a_5|}} \\ \times (C_8 e^{|a_6| \underline{U}} + C_9 e^{|a_6| \bar{U}})^{\frac{a_6}{|a_6|}} (C_{10} e^{|a_7| \underline{U}} + C_{11} e^{|a_7| \underline{U}} + C_{12} e^{|a_7| \bar{U}})^{\frac{a_7}{|a_7|}} \quad (20)$$

が得られる. ただし, $U \equiv U_n^t$, $\hat{U} \equiv U_n^{t+1}$, $\underline{U} \equiv U_{n-1}^t$, $\bar{U} \equiv U_{n+1}^t$ である. こうして導いた差分方程式に連続極限を施すことにより以下の結果が得られる. 番号 $R \geq 128$ の EECA に対応する微分方程式は波動方程式, 拡散方程式, Burgers 方程式のいずれかである. また, $R < 128$ の EECA に対応する微分方程式は, それらに $e^{-U} - 1$, $-e^U + 1$ などの項が加わったものに限られる.

以上, ECA から微分方程式を構成する一つの方法を紹介した. 得られた微分方程式は ECA がもつ解のもっとも基本的な振る舞いを反映したものになっている. しかし, いくつかの ECA の解が示すような自己相似構造は微分方程式では一切見られない. 連続近似のもとでは解はなめらかになり, そのような構造は消えてしまうのである. それに対し, 数値計算によると, 得られた差分方程式の解はセルオートマトン同様自己相似構造を示している. 今後, CA と微分方程式を結ぶ差分方程式すなわち完全離散方程式の数学的構造を調べるのが重要であり, そのことによって両者の関係がより一層明らかになることを期待している.

[参考文献]

- [1] Bruschi, A., Ragnisco, O., Santini, P., and Tu, G., Integrable Symplectic Maps, *PhysicaD* 49(1991), 273-294.
- [2] Bruschi, A., Santini, P., and Ragnisco, O., Integrable Cellular Automata, *Phys. Lett., A* 169(1992), 151-169.
- [3] Fokas, A. S., Papadopolou, E. P., and Saridakis, Y. G., Soliton Cellular Automata, *PhysicaD*, 41(1990), 297-321.
- [4] 幡山五郎, 国場敦夫, 私信.
- [5] Hikami, K., Inoue, R., and Komori, Y., Crystallization of the Bogoyavlensky Lattice, preprint.

- [6] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 1992.
- [7] Hirota, R., Nonlinear Partial Difference Equations II, Discrete-Time Toda Equation, J. Phys. Soc. Jpn., 43(1977), 2074-2078.
- [8] Matsukidaira, J., Satsuma, J., Takahashi, D., Tokihiro, T., and Torii, M., Toda-type Cellular Automaton and its N-soliton Solution, Phys. Lett., A 225(1997), 287-295.
- [9] 三輪哲二, 神保道夫, 伊達悦朗, ソリトンの数理, 岩波書店, 東京, 1993.
- [10] Nagai, A., Takahashi, D., and Tokihiro, T., Soliton cellular automaton and Toda molecule equation, accepted for publication in J. Phys., A.
- [11] Nishinari, K., and Takahashi, D., Analytical Properties of Ultradiscrete Burgers Equation and Rule-184 Cellular Automaton, J. Phys., A 31(1998), 5439-5448.
- [12] Nishinari, K., and Takahashi, D., A New CA Model for Traffic Flow with Multiple States, J. Phys., A 32(1999), 93-104.
- [13] 野辺厚, 東京大学大学院数理科学研究科修士論文(1999).
- [14] Park, K., Steiglitz, K., and Thurston, W. P., Soliton-like Behavior in Automata, Physica, D 19(1986), 423-432.
- [15] 薩摩順吉, 完全積分可能系, 数理科学, No. 366(1993), 12-15.
- [16] 高橋大輔, 箱と球でもソリトン系!, 日本物理学会誌, 48(1993), 37-40.
- [17] 高橋大輔, 私信.
- [18] Takahashi, D., and Satsuma, J., A Soliton Cellular Automaton, J. Phys. Soc. Jpn., 59(1990), 3514-3519.
- [19] 高橋大輔, 薩摩順吉, 単純なソリトン系をなすセル・オートマトンについて, 日本応用数理学会論文誌, 1(1991), 41-60.
- [20] Takahashi, D., and Matsukidaira, J., On Discrete Soliton Equations Related to Cellular Automata, Phys. Lett., A 209(1995), 184-188.
- [21] Tokihiro, T., Takahashi, D., Matsukidaira, J., and Satsuma, J., From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure, Phys. Rev. Lett., 76(1996), 3247-3250.
- [22] Tokihiro, T., Takahashi, D., and Matsukidaira J., in preparation.
- [23] Tokihiro, T., Nagai, A., and Satsuma, J., Proof of Solitonical Nature of Box and Ball Systems by Means of Inverse Ultra-discretization, preprint.
- [24] Wolfram, S., ed., Theory and Applications of Cellular Automata, (World Scientific, Singapore, 1986).
- [25] Wolfram, S., Statistical Mechanics of Cellular Automata, Reviews of Modern Physics, 55(1983), 601-644.
- [26] Wolfram, S., Universality and Complexity in Cellular Automata, Physica, 100(1984), 1-35.
- [27] Wolfram, S., Twenty Problems in the Theory of Cellular Automata, Phys. Scripta, T 9(1985), 170-183.
- [28] 山田泰彦, 国場敦夫, 私信.

[Abstract]

Cellular automata exhibiting solitonical behavior are discussed. Then it is shown that such cellular automata are directly related to a class of nonlinear wave equations by means of the technique of "ultradiscretization". Mathematical meaning and applications to other equations of the technique are also mentioned.