社会ゲームにおけるナッシュ均衡の安定性：ポテンシャル・ゲームと完全予見動学

長瀬　永遠

富山県立大学　情報基盤工学講座

October 23, 2020

はじめに

本発表の目的

経済学的な動学モデルの一つである「完全予見動学」を概説する．

そのために...

- 社会ゲームの説明
- 完全予見動学の説明
- ポテンシャル・ゲームにおける完全予見動学

社会ゲーム1

今回扱うプロパティ

- プレイヤー（社会を構成する連続体）
- 戦略（$n \geq 2$ の有限個）
- 戦略分布（＝社会の状態）
（n-1) 次元単体
$\Delta = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \{R_+^n | x_1 + ... + x_n = 1\}$ の要素 x
- 戦略 i をとっているプレイヤーの割合（x_i)
- 利得関数（$u_i(x)$)
（＝戦略分布が x のときの戦略 i に対する利得 ⋯ プレイヤー間で共通）

戦略の数 n の数を固定して考える　⇒　「n 戦略社会ゲーム」

均衡状態

戦略分布 $x^2* \in \Delta$ が社会ゲーム u の均衡状態
$\Rightarrow$ すべての $i = 1, ..., n$ に対して

$$x_i^* > 0 \Rightarrow u_i(x^*) \geq u_j(x^*) \quad \forall j = 1, ..., n \tag{1}$$

が成り立つ.

強均衡状態

戦略分布 $x^2* \in \Delta$ が社会ゲーム u の強均衡状態
$\Rightarrow$ すべての $i = 1, ..., n$ に対して

$$x_i^* > 0 \Rightarrow u_i(x^*) > u_j(x^*) \quad \forall j \neq i \tag{2}$$

が成り立つ.

完全予見動学 (定義１)

戦略変更機会

- 各プレイヤーの戦略変更機会は強度 $\lambda > 0$ のポアソン過程に従って訪れる.
- 戦略変更機会は各プレイヤー間で独立である.
- 各微小間隔 $[t, t+dt)$ において社会全体で $\lambda \times dt$ の割合のプレイヤーが戦略変更の機会を持つ.
- 戦略分布の時間経路を $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ のようにあらわす.

$\Rightarrow$ 何らかの $\alpha(t) \in \Delta$ が存在して,

$$\dot{x}(t) = \lambda(\alpha(t) - x(t)) \tag{3}$$

と書ける.

完全予見動学 (定義１)

定義 1

経路 $x : [0, \infty) \to \Delta$ が実現可能
$\Rightarrow$ ほとんどすべての $t \leq 0$ に対してある $\alpha(t) \in \Delta$ が存在して（3）が成り立つ.

完全予見動学（定義２）

摩擦度

- 時間割引率（θ）$\rightarrow$ 現在のの将来性
- 摩擦度 ($\delta = \theta/\lambda > 0$) が小さい $\rightarrow$ 未来利得が重要

完全予見経路

1. 各プレイヤーは経路 $x(\cdot)$ を予想し, それに対して最適戦略をとる
2. その最適戦略の結果として実現する経路は $x(\cdot)$ に一致する

完全予見動学（定義２）

定義２

実現可能経路 $x:[0,\infty)\to\Delta$ が $x^0\in\Delta$ を初期条件とする完全予見経路である.
$\Rightarrow x(0)=x^0$ かつほとんどすべての $t\leq 0$ とすべての $i=1,...,n$ に対して

$$\dot{x}_i(t)>-\lambda x_i(t)\Rightarrow V_i(x(\cdot))(t)\quad \forall j=1,...,n \tag{4}$$

が成り立つ.

完全予見動学（定義３）

定義３

(a) 戦略分布 $x^* \in \Delta$ が吸収的
$\Rightarrow$ ある $\epsilon > 0$ が存在して, すべての $x \in B_\epsilon(x^*)$ に対して, x を初期分布とするすべての完全予見経路が x^* に収束する.

(b) 戦略分布 $x^* \in \Delta$ が大域的に到達可能
$\Rightarrow$ すべての $x \in \Delta$ に対して, x を初期分布とする完全予見経路が x^* に収束する

$\rightarrow$ どちらかが成り立つならば, 戦略分布は均衡状態
$\rightarrow$ 両方が成り立つならば, 吸収的（もしくは大域的に到達可能な）唯一の戦略分布
$\Rightarrow$ 安定均衡状態

完全予見動学（まとめ）

結局は...

摩擦度 δ が十分に小さいとき（＝将来期待が重要なとき）

- 安定均衡状態は存在するのか
- 安定均衡状態はどのように特徴づけられるのか

ポテンシャル・ゲーム1

ポテンシャル関数

各プレイヤーの戦略変更による利得の増分がその値の増分に等しくなるような関数

（ポテンシャル関数の定義域）
$\overline{\Delta} = \{x \in R^n_+ \text{—} 1 - \eta < x_1 + \cdots + x_n < 1 + \eta\}$

（定義）
すべての $i, j = 1, ..., n$ とすべての $x \in \Delta$ に対して

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = u_i(x) - u_j(x) \tag{5}$$

が成り立つ.

ポテンシャル関数を持つ社会ゲーム $\Rightarrow$ ポテンシャル・ゲーム

ポテンシャル・ゲーム２

（仮定１）ポテンシャル関数 v の臨界値は有限個である．

定理 1

社会ゲーム u がポテンシャル関数 v を持ち，仮定 1 が成り立つ

$\rightarrow$ ある $\bar{\delta} > 0$ が存在して，どんな摩擦度 $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ に対しても x^* は大域的に到達可能である

$\rightarrow$ どんな摩擦度 $\delta > 0$ に対しても x^* は吸収的である

$\Rightarrow$ ポテンシャル最大化元は十分に小さい摩擦度に対する唯一の吸収的な均衡状態

ポテンシャル・ゲーム3

この手法の利点

関数の不動点であるところの均衡をポテンシャル関数の最適化問題の解としてとらえることができる

$\Rightarrow$ 多くの場合, 不動点をそのまま扱うよりも相対的に簡単である

おわりに

経済学の視点
「人々の行動は, 彼らの世の中の動きに関する予想に依存する」

完全予見動学

＝経済学的な考え方＋進化ゲーム理論的環境