

はじめに

例題

その他の手法

おわりに

# 多目的最適化手法

滝沢 光介

富山県立大学 電子情報工学科

October 23, 2020

## 多目的最適化問題とは

トレードオフの關係に複数の目的をさまざまパラメーターを変更することにより, 達成 (最適化) しようとする問題.

## 目的

複数の目的関数を最適化する中で, 意思決定者の理想とする解を見つけ出すこと.

## 決定変数

バス運営をする上で動かし得る 3 つの変数を考える.

バスの運転間隔	$x_1$ (分)	$1 \leq x_1 \leq 15$
バスの最高速度	$x_2$ (km/時)	$40 \leq x_2 \leq 60$
バスの大きさ (定員)	$x_3$ (人/両)	$15 \leq x_3 \leq 100$

なお、1 日に乗車できる定員は以下の制約を受ける.

$$D \leq \frac{60}{x_1} \cdot x_3 \cdot c_1$$

## 利用者の評価関数

まず利用者と運営者の利用関数を考える. 利用者はなるべく早く, 待つことなく, 快適に目的地にたどり着きたいと考える. 利用者の評価関数を乗車時間  $f_{p1}$ , 待ち時間  $f_{p2}$ , 混雑度  $f_{p3}$  とするとそれぞれは次のように表せる.

$$f_{p1} = \frac{d}{x_2 \times c_2} \quad (1)$$

$$f_{p2} = \frac{x_1}{2} \quad (2)$$

$$f_{p3} = \frac{D}{x_3 \times \frac{60}{x_1}} \quad (3)$$

ここで  $d$  は平均乗車距離,  $c_2$  は係数を表す.

## 運営者の評価関数

運営者はなるべくバスの運行費用を安くしようとする. 運営者の評価関数を投資コスト  $f_{01}$ , 維持運営コスト  $f_{02}$ , とすると以下のようになる.

$$f_{01} = \left\{ \frac{B_{100} - B_{15}}{100 - 15} (x_3 - 15) + B_{15} \right\} \times \left\{ \frac{M_{60} - M_{40}}{60 - 40} (x_2 - 40) + M_{40} \right\} \quad (4)$$

$$f_{02} = 2.0 \times L \times \frac{60}{x_1} \times H \times GAS \times 365 + n \times w \times c_L \quad (5)$$

$$n : \text{必要バス台数} = \left( \frac{2L}{c_2 x_2} \right) \times \left( \frac{60}{x_1} \right)$$

$L$  : バス路線の片道距離

$H$  : バスの 1 日の運行時間

$GAS$  : バスの 1 キロあたりのガソリン代

$w$  : バス運転手の 1 人あたりの年間賃金

$c_L$  : 運転要員系数

## 効用関数

効用とは消費者が消費するお金や財に対して消費者自身がどれだけの満足感を得られるかを表わす指標である。

## 利用者の目的関数

先ほど定義した (1),(2),(3) 式と効用関数  $u(\cdot)$  を用いて,

$$u(f_{p1}(x), f_{p2}(x), f_{p3}(x))$$

と表すことが出来る. さらに, 効用の加法性, 線形性が成立すると仮定すると,

$$f_1 = w_1 f_{p1} + w_2 f_{p2} + w_3 f_{p3} \quad (6)$$

となり, 利用者の不効用を表す評価関数が得られる.  
利用者にとっての希望は, 利用者の目的関数である  $f_1$  を最小化することである.

## 運営者の目的関数

運営者の評価関数は,(4) と (5) の 2 式に耐用年数などの係数  $k$  を考慮して, 次のように表すことができる.

$$f_2 = k f_{01} + f_{02} \quad (7)$$

これは, 運営者の消費する費用を表している。  
運営者にとっての希望は, 運営者の目的関数である  $f_2$  を最小化することである.

## 最適化

このバス会社の例で目的関数, 制約条件は以下のようになっている.

目的関数       $f_1(x)$  : 利用者の不効用  
                  $f_2(x)$  : 運営者の年間費用

制約条件       $1 \leq x_1 \leq 15$   
                  $40 \leq x_2 \leq 60$   
                  $15 \leq x_3 \leq 100$

以上の目的関数を制約条件のもとで最適化することを多目的最適化という.

## 非劣解 (パレート解)

非劣解とはいずれかの目的関数を増加させようとするともう一方の目的関数が減少してしまうような解である。パレート解とも呼ぶ。

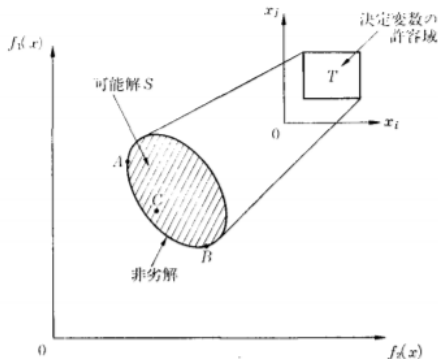


図 1: バス運用の例題における非劣解

## 選好解

意思決定者は図 1 において範囲  $S$  の中から解を選び出す必要がある。

この例題において利用者を最も満足させる点は  $B$  であり、運営者を最も満足させる点は  $A$  となる。

したがって、意思決定者は弧  $AB$  の範囲で解を出さなければならない。このように意思決定者が非劣解の中から選び出した解を選好解と呼ぶ。

## 手法

- 効用関数法 : 効用関数を用いて目的関数を決定する手法.
- *Lexicographic* 法 : 意思決定者が目的関数に順位付けを行い, 順位の高い目的関数から最適化を行う手法.
- ゴールプログラミング法 : 各目標関数に達成すべき目標を定めて, 選好解と目標との差がなるべく小さくなるように解を求める手法.

## まとめ

- 多目的最適化とは複数の目的関数同士の折り合いをつけることである。(複数の目的関数が存在する場合, すべての目的関数の最適化はほぼ不可能であるため)
- 多目的最適化の解は一つに限らず複数個の解が存在する.
- 複数個存在する解の中から選び出す解は意思決定者の理想により異なる.