社会ゲームにおけるナッシュ均衡の安定性：ポテンシャル・ゲームと完全予見動学

尾　山　大　輔*

＊東京大学経済学研究科　東京都文京区本郷 7–3–1
＊Faculty of Economics, University of Tokyo, Hongo 7–3–1, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan
＊E-mail: oyama@e.u-tokyo.ac.jp

キーワード：社会ゲーム (societal game)，完全予見動学 (perfect foresight dynamics)，ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)，ポテンシャル・ゲーム (potential game).
JL 0004/16/5504–0362 ©2016 SICE

1．はじめに

ゲーム理論は，複数の主体間の戦略的相互依存関係の帰結を考察するための分析枠組です．この理論はその名のとおり，現象をゲームとして定式化して分析します．ゲームは，参加者 (プレイヤー)，ルール (各プレイヤーがとりうる戦略)，ゴール (各プレイヤーの利得関数) から構成されます．各プレイヤーは自身の利得を最大化すべく戦略を選ぼうとしますが，利得関数はほかのプレイヤーのとる戦略にも依存します (戦略的相互依存)．したがって，各プレイヤーの最適戦略はほかのプレイヤーの戦略に対する予想が与えられてはじめて定まります．その予想がどこから来るのかということを決めないと理論モデルが閉じないわけですが，ゲーム理論の中心概念である「**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium)」はこの予想を「正しい予想」とすることによってモデルを閉じるものです．すなわち，プレイヤーが N 人いるとして，ナッシュ均衡とは戦略の組 $(s_1^*,\ldots,s_N^*)$ であって，各プレイヤー i の戦略 s_i^* が，ほかのプレイヤーたちの戦略を $(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_N^*)$ と予想したときの最適戦略になっているものとして定義されます．いいかえると，ナッシュ均衡は，戦略の組 $(s_1,\ldots,s_N)$ に対して各プレイヤーの最適戦略の組を返すような関数 (最適戦略は複数存在しうるので，正確には多価関数あるいは対応) の**不動点**のことです．世の中で繰り返し観察される行動様式は，そこでの各人の行動が結果として他人の行動に対する最適反応になっているからこそ持続性をもつ，と考えるわけです．ジョン・ナッシュ(Nash [1)〜3)] (注1)) は，どんな社会・経済現象もゲームとして定式化し，そこでの行動様式をナッシュ均衡としてとらえようというプログラムを提唱しました (注2)．現代経済学においてこの考え方は支配的となり，ナッシュは 1994 年に (ラインハルト・ゼルテン，ジョン・ハルサニとともに) ノーベル経済学賞を受賞しました (注3)．

さて，ゲーム理論は，社会で観察される行動パターンはナッシュ均衡になっているはずである，と考えるわけですが，一般にひとつのゲームには複数のナッシュ均衡が存在し，その中には何らかの意味で不安定であると考えられるものも含まれ，それらは現実の描写としてふさわしくないものです．ナッシュ均衡の安定性を論じるためには「均衡から外れたところでは何が起こるか」を定めないといけませんが，それはゲームの基本型じたいには含まれません．そこで均衡外での振る舞いを記述する理論モデルが必要となり，原理上モデルの数だけ安定性の概念も存在することになります．そのような理論の中でひとつの大きなカテゴリーを形成するのは，もともと生物学から導入された進化ゲームの理論です．進化ゲームは主に多数のプレイヤーからなる集団における戦略分布の調整過程を考察します．そこでは，プレイヤーは近視眼的 (myopic) で，おのおの現時点での戦略分布で評価された利得 (生物学寄りのモデルであれば適応度) を増加させるべく戦略を選ぶ，と想定されます．たとえば，生物学でよく知られているレプリケータ動学 (replicator dynamics) は混合戦略の空間上の微分方程式で記述されます (注4)．

本稿では，より経済学的な動学モデルのひとつ「完全予見動学 (perfect foresight dynamics)」を概説します (注5)．進化ゲームと同様に，この動学では，ゲームが多数の匿名性をもつプレイヤーの集団によってプレイされる状況を考えます (このようなゲームを社会ゲームと呼びます)(注6)．ここで「匿名性」とは，各プレイヤーの

(注1) いずれも H.W. クーン・S. ナサー編『ナッシュは何を見たか–純粋数学とゲーム理論』シュプリンガー・ジャパン，2005 年に収められています．ナッシュ均衡のことをナッシュ自身は均衡点 (equilibrium point) と呼びました．

(注2) そういっておいてゲームに均衡が存在しないことがあると困るので，ナッシュは有限ゲーム (有限人のプレイヤー，有限個の戦略) は混合戦略 (戦略の確率的選択による凸化概念) の範囲で必ず均衡をもつことを示しました．証明は角谷 (Nash[1]) あるいはブラウワー (Nash[2), 3)]) の不動点定理によります．

(注3) 現代の経済学でのゲーム理論の位置づけに関する詳しい解説については神取[4)] を参照してください．

(注4) 進化ゲーム理論については，たとえば Hofbauer and Sigmund [5), 6)]，Sandholm [7)] をご覧ください．

(注5) ゲーム理論の枠組では Matsui and Matsuyama [8)] によって最初に定式化されました．その後の発展については，Hofbauer and Sorger [9), 10)]，Oyama [11)]，Oyama et al. [12)]，Takahashi [13)] など．応用研究としては Matsuyama [14)] (経済発展論)，Oyama [15)] (空間経済学) などがあります．

(注6) 完全予見動学を含め，社会ゲームについて解説した日本語文献としては尾山・松井[16)]，松井[17), 第 II 部] があります．

利得が (どのプレイヤーがどの戦略をとっているかではなく) 集団全体の戦略分布のみに依存するという性質を意味します．例として企業の立地選択を考えるとすると，それぞれの地域に立地したときの収益性は，各地域の立地企業のメンバーシップには依存せず，経済全体の企業分布 (各地域に何割の企業が立地しているか) のみに依存する，という想定です．また，プレイヤーの選択には (陽には定式化されない) 調整費用のために不可逆性があって (たとえば，いったんある地域に工場を建てたら，すぐつぎの日に別の地域に引っ越すということはできない)，戦略分布は徐々に調整されるとします (数学的にいうと，戦略分布は時間の関数として連続であるということです)．進化ゲームとの大きな違いは，人々は世の中の動きに関する予想を立てた上で自身の行動を決めるであろう，という前提に立っている点にあります．企業が立地する地域を選ぶ際には，**いま現在**の需要や企業間競争のようすだけでなく，**将来時点**での動向をも考慮に入れることでしょう．将来予想の役割は経済学の歴史上大昔から重要視されていたことで，完全予見動学の理論もその流れに沿ったものです．理論モデルを閉じるためには将来予想をどのように与えるかを決めないといけませんが，ここでもやはりそれを「正しい予想」とします．すなわち，この動学の均衡経路 (完全予見経路と呼びます) は「各プレイヤーがその経路じたいを予想してそれに対する最適戦略をとった結果実現する戦略分布の経路」として定義されます.「均衡経路」とは聞き慣れない言い方かもしれませんが，ここで「均衡」とはそれが「与えられた経路に対して，それに対する最適反応の結果実現する経路たちを返す」ような (関数空間から関数空間への) 対応の不動点であることを指し,「経路」は静学的な社会ゲームの均衡と区別するためについています (注7)．完全予見経路は通常の微分方程式の解としては記述できず，あえていうなれば完全予見動学は「進みのある微分方程式」と見ることもできます．一般に，与えられた初期条件に対して完全予見経路は一意ではなく (注8)，このことは安定性の概念を強める方向に働きます (この動学の下での安定性の定義については本論を参照のこと)．実際，戦略の数が 2 である単純なケースにおいては，進化ゲーム動学では安定な均衡は一般に複数存在しますが，完全予見動学では (将来利得が十分重要であるようなパラメタの範囲では) 安定均衡が必ず一意に定まります．この意味で，完全予見動学は「均衡選択」の理論を与えていると考えることができます．

一般の n 戦略社会ゲームについては，安定均衡は必ずしも存在するとは限らず，安定性の必要十分条件を得るのは困難であると考えられます．そこでゲームのサブクラスにおいて安定性を特徴づけることが研究課題となります．本稿では,「ポテンシャル関数」をもつゲーム (ポテンシャル・ゲーム) に関する結果を紹介します．社会ゲームのポテンシャル関数 v とは，戦略分布の空間上の実数値関数であって,「各プレイヤーが戦略を変更したときに生ずる自身の利得の変化分が，v の変化分につねに等しい」という性質をもつ関数のことです．そのような関数の類型は古くからさまざまな分野で考えられていて，たとえば生物学 (Fisher[18]) や交通工学 (Beckmann et al.[19]) などの文献に現れています．ゲームがポテンシャル関数をもてば，その最大化元はナッシュ均衡になります．また，多くの進化ゲーム動学においては，ポテンシャル関数はリャプノフ関数として働き，したがってその**局所**最大化元になっているナッシュ均衡はそれぞれ局所安定になることが知られています．これに対して，完全予見動学においては，ポテンシャル関数の**大域**最大化元が (将来利得が十分重要なときの) 唯一の安定均衡になる，ということが示されます (Hofbauer and Sorger[9])．その証明は，ポテンシャル関数の時間積分の最大化という最適制御問題と完全予見経路とを関連づける，という方針で行われます．その本質は,「不動点であるところの均衡をそのまま扱うのではなく，最大化問題におきかえて分析する」ということにあります．

2．社会ゲーム

社会ゲームは，多数のプレイヤーからなり，その利得関数は (各プレイヤーの戦略のプロファイルではなく) プレイヤーたちの戦略の集計量のみに依存するようなゲーム，と緩やかに定義されるものですが，ここではつぎのようなケースに限定することにします．社会は同質のプレイヤー (player) の連続体からなります．各プレイヤーがとりうる戦略 (strategy) は有限個で，$1, \ldots, n$ の n 個 ($n \geq 2$) とします．社会の状態は，$(n-1)$ 次元単体

$$\Delta = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

の要素 x——戦略分布 (strategy distribution) と呼びます——で表わされます (Δ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸部分集合になります)．ここで，x_i は戦略 i をとっているプレイヤーの割合です．利得関数 (payoff function) はプレイヤー間で共通で，戦略分布のみに依存します．これを $u \colon \Delta \to \mathbb{R}^n$ とします．$u_i(x)$ は戦略分布が x のときの戦略 i に対する利得を表わします．u は連続関数であるとします．以下，戦略の数 n を固定して考えることで，連続関数 $u \colon \Delta \to \mathbb{R}^n$ じたいを n 戦略**社会ゲーム** (societal game) と呼ぶことにします．

戦略分布 $x^* \in \Delta$ が社会ゲーム u の**均衡状態** (equilibrium state) であるとは，すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して

(注7) 「完全予見」は経済学界での業界用語で,「時間変数の入ったモデルでの均衡 (不動点)」を示唆するだけのものです．対外的には誤解を招きかねない表現だとは思いますが，そのまま用いることにします．

(注8) その存在は適切な仮定の下で無限次元版の角谷の不動点定理からしたがいます．

$$x_i^* > 0 \Rightarrow u_i(x^*) \geq u_j(x^*) \quad \forall j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

が成り立つことをいい，また，$x^* \in \Delta$ が u の**強均衡状態** (strict equilibrium state) であるとは，すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して

$$x_i^* > 0 \Rightarrow u_i(x^*) > u_j(x^*) \quad \forall j \neq i \tag{2}$$

が成り立つことをいいます．強均衡状態は必ず Δ の頂点です．条件 (1) (条件 (2)) は，戦略分布 x^* において，正の割合のプレイヤーたちが戦略 i をとっているならば，その戦略は x^* 自身に対して弱い意味で (強い意味で) 最適反応でないといけない，ということを要請しています．

社会ゲーム u の**最適反応対応** (best response correspondence) とは

$$b(x) = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha_i > 0 \\ \Rightarrow u_i(x) \geq u_j(x)\ \forall j = 1, \ldots, n\}$$

で定義される対応 (多価関数) $b\colon \Delta \to \Delta$ のことです．x^* が均衡状態であるとは，それが b の不動点であること，すなわち $x^* \in b(x^*)$ が成り立つこと，といいかえることができます．このように，経済学で「均衡」といったときは，それは何らかの関数 (あるいは対応) の不動点として定義されています．

関数 u に連続性を要請しているので，均衡状態は必ず存在します (最適反応対応 b に角谷の不動点定理を適用する)．

命題 1. 均衡状態は少なくともひとつ存在する．

さて，一般に (強) 均衡状態は複数存在します．「どの均衡状態がよりプレイされやすいか」という問いを定式化しそれに答えるためには，ゲームがプレイされる状況をより詳しく記述する必要があります．以下で，そのような理論として「**完全予見動学** (perfect foresight dynamics)」というモデルを解説します．

3．完全予見動学

時間は連続とし，変数 $t \in [0, \infty)$ で表わします．$t = 0$ 時点での戦略分布 $x^0 \in \Delta$ は外生的に与えられます．プレイヤーたちはどの瞬間でも戦略を変更できるわけではなく，各プレイヤーの戦略変更機会は強度 $\lambda > 0$ のポワソン過程に従って訪れるとします．これらの過程は “プレイヤー間で独立である” と想定し，各微小時間間隔 $[t, t + dt)$ において社会全体で $\lambda \times dt$ の割合のプレイヤーが戦略変更の機会をもつとします．戦略分布の時間経路を $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ のように表わすとすると，ポワソン戦略変更の仮定より，何らかの $\alpha(t) \in \Delta$ が存在して，

$$x(t + dt) = (1 - \lambda dt) \times x(t) + \lambda dt \times \alpha(t)$$

すなわち

$$\dot{x}(t) = \lambda\bigl(\alpha(t) - x(t)\bigr) \tag{3}$$

と (形式的に) 書けることになります．ここで $\alpha(t)$ は t 時点において戦略変更機会を得たプレイヤーたち (その割合は λdt) の戦略選択の分布を意味します (残りの $1 - \lambda dt$ の割合のプレイヤーたちの戦略分布は $x(t)$ のまま)．より厳密に，以下で定義される実現可能性の条件を課します．

定義 1. 経路 $x\colon [0, \infty) \to \Delta$ が**実現可能** (feasible) であるとは，それがリプシッツ連続で，ほとんどすべての $t \geq 0$ に対してある $\alpha(t) \in \Delta$ が存在して (3) が成り立つことをいう．

$x(0) = x \in \Delta$ を満たす実現可能経路全体からなる集合を Φ_x と書きます．Φ_x は適切なノルムに関するバナッハ空間のコンパクト凸部分集合になります．

さて，各プレイヤーはいったんある戦略をとると，一定期間 (平均 $1/\lambda$) その戦略にコミットしなければなりません．その間も社会全体の戦略分布 $x(t)$ は変化し，それにともなって，受け取る利得 $u(x(t))$ も変化していきます．そのことを読み込んで，各プレイヤーは将来社会の変化に関する予想 (expectation) を形成し，その予想に対する最適戦略をとります．t 時点において，実現可能経路 $x(\cdot)$ を予想したときに戦略 i から (コミット期間に) 得られる期待割引利得は

$$\begin{aligned} &V_i(x(\cdot))(t) \\ &\quad = (\lambda + \theta) \int_0^\infty \int_t^{t+z} e^{-\theta(s-t)} u_i(x(s))\, ds\, \lambda e^{-\lambda z} dz \\ &\quad = (\lambda + \theta) \int_t^\infty e^{-(\lambda+\theta)(s-t)} u_i(x(s))\, ds \end{aligned} \tag{4}$$

で与えられます．ここで，$\theta > 0$ は時間割引率 (将来価値の現在価値への換算率) を表わします (プレイヤー間で共通とする)．また，$\lambda + \theta > 0$ を掛けて基準化しています．両パラメタの比を $\delta = \theta/\lambda > 0$ とおき，**摩擦度** (degree of friction) と呼びます．摩擦度が小さい (すなわち時間割引率 θ が小さい，あるいはポワソン率 λ が大きい) ことは，将来利得が重要であることに対応します．

この動学モデルの均衡経路「完全予見経路」は

1. 各プレイヤーは経路 $x(\cdot)$ を予想しそれに対して最適戦略をとり
2. その最適戦略の結果として実現する経路は $x(\cdot)$ に一致する

という性質が成り立つような実現可能経路 $x(\cdot)$ として定義されます．

定義 2. 実現可能経路 $x\colon [0, \infty) \to \Delta$ が $x^0 \in \Delta$ を初期条件とする**完全予見経路** (perfect foresight path) であるとは，$x(0) = x^0$ かつほとんどすべての $t \geq 0$ とす

べての $i=1,\dots,n$ に対して

$$\dot{x}_i(t) > -\lambda x_i(t) \\ \Rightarrow V_i(x(\cdot))(t) \geq V_j(x(\cdot))(t) \quad \forall j=1,\dots,n \tag{5}$$

が成り立つことをいう．

条件 (5) の「$\dot{x}_i(t) > -\lambda x_i(t)$」は，実現可能性の条件式 (3) での $\alpha(t)$ を用いると「$\alpha_i(t) > 0$」と書けます．つまり，条件 (5) は，経路 $x(\cdot)$ において，戦略変更の機会をもつプレイヤーのうち正の割合が戦略 i をとっているならば，その戦略は $x(\cdot)$ 自身に対する最適反応でないといけない，ということをいっています．

先に述べたとおり，経済学において「均衡」と呼ばれるものは何らかの関数･対応の不動点になっています．完全予見動学モデルの均衡であるところの完全予見経路は，

$$\beta_{x^0}(x(\cdot)) = \{y \in \Phi_{x^0} \mid \dot{y}_i(t) > -\lambda y_i(t) \\ \Rightarrow V_i(x(\cdot))(t) \geq V_j(x(\cdot))(t)\ \forall j=1,\dots,n\}$$

で定義される対応 $\beta_{x^0}\colon \Phi_{x^0} \to \Phi_{x^0}$ の不動点になっています．この対応 β_{x^0} に無限次元版の角谷の不動点定理 (たとえばAubin and Cellina[20, *Theorem* 2.1.4]) を適用することで完全予見経路の存在が示されます．

命題 2. 各戦略分布 $x^0 \in \Delta$ に対して，x^0 を初期分布とする完全予見経路は少なくともひとつ存在する．

証明は Oyama et al.[12, *Section* 2.3] を参照ください．

完全予見経路の一意性は一般に成り立ちません．つまり，同じ初期分布に対して複数の完全予見経路が存在し得ます．

戦略分布 $x \in \Delta$ に対して，x が社会ゲーム u の均衡状態ならば，またそのときに限り，x にとどまり続ける定常経路 (すべての $t \geq 0$ について $\bar{x}(t) = x$ である経路) $\bar{x}(\cdot)$ は完全予見経路になります (そのような経路 $\bar{x}(\cdot)$ に対してはすべての $t \geq 0$ について $V(\bar{x}(\cdot))(t) = u(x)$ であることから)．また，何らかの完全予見経路 $x(\cdot)$ の $t \to \infty$ での収束先になっている戦略分布は均衡状態です (Oyama et al.[12, *Proposition* 2.1])．一般に，x が強均衡状態であっても，定常経路以外にも完全予見経路が存在し得ます．そのことをふまえて，均衡状態のこの動学の下での安定性をつぎのように定義します．Δ における $x \in \Delta$ の相対 ε 近傍を $B_\varepsilon(x) = \{y \in \Delta \mid |y-x| < \varepsilon\}$ と書きます．

定義 3. (a) 戦略分布 $x^* \in \Delta$ が**吸収的** (absorbing) であるとは，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，すべての $x \in B_\varepsilon(x^*)$ に対して，x を初期分布とするすべての完全予見経路が x^* に収束することをいう．

(b) 戦略分布 $x^* \in \Delta$ が**大域的に到達可能** (globally accessible) であるとは，すべての $x \in \Delta$ に対して，x を初期分布とする完全予見経路が存在して x^* に収束することをいう．

吸収的あるいは大域的に到達可能な戦略分布は必ず均衡状態です．定義より，吸収的な (大域的に到達可能な) 戦略分布がさらに大域的に到達可能 (吸収的) であるならば，それは唯一の吸収的な (大域的に到達可能な) 戦略分布です．強均衡状態は，十分大きな摩擦度 δ に対して吸収的になります．われわれが興味があるのは，摩擦度 δ が十分小さいとき，すなわち将来期待が重要であるときの吸収的かつ大域的に到達可能な均衡状態です．一般にはそのような均衡状態は存在するとは限りません[注9]．したがって，どのようなゲームのクラスにおいて安定均衡状態は存在するか，また安定均衡状態はどのように特徴づけられるか，が課題となります．次節では，存在が示されているゲームのクラスとして「ポテンシャル・ゲーム」というクラスを考察します．

4．ポテンシャル・ゲームと完全予見動学の下での安定性

「ポテンシャル・ゲーム」(Monderer and Shapley[21]) とは「ポテンシャル関数」をもつゲームのことで，ポテンシャル関数とは言葉でいうと，各プレイヤーの戦略変更による利得の増分がその値の増分に等しくなるような関数，のことです．社会ゲームの文脈では以下のように定義されます[注10]．偏微分によって定義するので，$\eta > 0$ を固定して，Δ を少しふくらませた

$$\bar{\Delta} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid 1-\eta < x_1 + \cdots + x_n < 1+\eta\}$$

を定義域とします．

定義 4. 関数 $v\colon \bar{\Delta} \to \mathbb{R}$ が社会ゲーム u の**ポテンシャル関数** (potential function) であるとは，それが微分可能であって，すべての $i,j=1,\dots,n$ とすべての $x \in \Delta$ に対して

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = u_i(x) - u_j(x) \tag{6}$$

が成り立つことをいう．ポテンシャル関数をもつ社会ゲームを**ポテンシャル・ゲーム** (potential game) という．

これは物理学のポテンシャルと本質的に同じものです[注11]．v がポテンシャル関数ならば，それに定数を加えたものもポテンシャル関数です (また，そのようなものに限ります)．$n=2$ のときはすべての社会ゲームはポテンシャル・ゲームですが，$n \geq 3$ のときはポテンシャ

(注9) δ が小さいときに吸収的な状態も大域定期に到達可能な状態も存在しない例としては，たとえば Oyama[11, Section 6.2]．

(注10) Sandholm[22), 23)]，Oyama[15, Appendix A] を参照のこと．

(注11) 実際，Δ を $\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}_+ \mid \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} \leq 1\}$ と表わして u と v をその座標系で書きかえると，条件 (6) は $\nabla v = u$ と書けます．

ル関数は存在するとは限りません．むしろ,「等式で定義される」ということから (何らかの意味で) non-generic なクラスと考えることもできますが,「よい性質」(以下で述べる内容もそのひとつです) をもっていることと，多くの経済・社会現象がポテンシャル・ゲームとして記述できることから，ゲーム理論的・経済学的に重要なクラスと考えられています．

社会ゲーム u がポテンシャル関数 v をもつとき，Δ におけるポテンシャル関数の最大化元，すなわち，最大化問題

$$\text{maximize} \quad v(x) \tag{7a}$$

$$\text{subject to} \quad x \in \Delta \tag{7b}$$

の解は u の均衡状態となっています．逆は一般に成り立ちません．この問題の KKT 条件を満たす点の集合は u の均衡状態全体の集合と一致します．とくに，強均衡状態は v の局所最大化解になっています．広いクラスの進化ゲーム動学においてポテンシャル関数 v はリャプノフ関数になっていて，v の (孤立した) 局所最大化解はそれぞれ漸近安定です (注12)．したがって，ゲームが強均衡状態を複数もてば，進化ゲーム動学の下では安定均衡は複数存在することになります．それに対して，定理 3 に述べるように，完全予見動学においては実は安定均衡は摩擦度が十分小さいときに一意に定まります．

定理 3 はつぎの正規性条件の下で示されます．

仮定 1. ポテンシャル関数 v の臨界値は有限個である．

ここで，まず $x^{\mathrm{c}} \in \Delta$ が v の臨界点 (critical point) であるとは，$x_i^{\mathrm{c}} > 0, x_j^{\mathrm{c}} > 0$ なるすべての $i, j = 1, \ldots, n$ に対して

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x^{\mathrm{c}}) = \frac{\partial v}{\partial x_j}(x^{\mathrm{c}})$$

が成り立つことをいい，また，v の臨界点 x^{c} での値 $v(x^{\mathrm{c}})$ を v の臨界値 (critical value) といいます．仮定 1 は，たとえば v が実解析関数であるときに満たされます．

定理 3 (Hofbauer and Sorger[9])**.** 社会ゲーム u がポテンシャル関数 v をもち，仮定 *1* が成り立つとする．戦略分布 $x^* \in \Delta$ が v の Δ における唯一の大域最大化元であるとする．このとき以下が成り立つ．

(1) ある $\bar{\delta} > 0$ が存在して，どんな摩擦度 $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ に対しても x^* は大域的に到達可能である．

(2) どんな摩擦度 $\delta > 0$ に対しても x^* は吸収的である．

したがって，ポテンシャル最大化元は十分小さい摩擦度に対して唯一の吸収的な均衡状態です．

(注12) たとえば Sandholm[22]，Oyama[15, Appendix B] を参照のこと．

証明は Hofbauer and Sorger[9] または Oyama[15, *Appendix C*] を参照してください．ここでは証明の概略を述べます．v を社会ゲーム u のポテンシャル関数，x^* を v の一意最大化元とします．

ポテンシャル関数を用いた手法の肝は，関数 (あるいは対応) の不動点であるところの均衡をポテンシャル関数の最適化問題の解としてとらえることにあります．多くの場合，最適化問題を考察することは不動点を直接扱うより相対的に見て簡単になります．いま考えている完全予見動学においては，ポテンシャル関数 v に対して最大化問題

$$\text{maximize} \quad (\lambda + \theta) \int_0^\infty e^{-\theta t} v(x(t)) \, dt \tag{8a}$$

$$\text{subject to} \quad x(\cdot) \in \Phi_{x^0} \tag{8b}$$

を考えます ($x^0 \in \Delta$ は与えられた初期分布)．v の連続性と Φ_{x^0} のコンパクト性より解の存在は保証されます．この問題のハミルトン関数 $H\colon \bar{\Delta} \times \Delta \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と最大化されたハミルトン関数 $H^*\colon \bar{\Delta} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はそれぞれ

$$H(x, \alpha, q) = (\lambda + \theta) v(x) + q \cdot \lambda(\alpha - x)$$

および

$$H^*(x, q) = (\lambda + \theta) v(x) + \lambda(\bar{q} - q \cdot x)$$

と書けます．ただし $\bar{q} = \max_i q_i$ です．まず，ハミルトン関数 H に最大値原理を適用することで，(i) 最大化問題 (8) の解は完全予見経路である，ということがわかります (一般に逆は成り立ちません)．また，(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\bar{\delta}(\varepsilon) > 0$ が存在して，$\delta = \theta/\lambda \le \bar{\delta}(\varepsilon)$ ならばどんな $x^0 \in \Delta$ に対しても最大化問題 (8) の解 $x(\cdot)$ はある $T \ge 0$ に対して $|x(T) - x^*| \le \varepsilon$ を満たす，ということが成り立ちます．これは「ターンパイク理論 (turnpike theory)」における “Visit Lemma” (Scheinkman[24]) という結果に対応するものです．つぎに，(iii) 任意の完全予見経路 $x(\cdot)$ と，それに対応して (4) で与えられる $V(\cdot)$ について，$H^*(x(t), V(t))$ は t に関して非減少である，また，(iv) $\hat{x}$ が $x(\cdot)$ の集積点ならば，$v(\hat{x}) \ge v(x(0))$ であり，かつ $\hat{x}$ は v の臨界点である，ということが示せます (注13)．

ここまでの準備で定理 3 はつぎのように証明されます．x^* は v の一意最大化元なので仮定 1 より，すべての $x \in B_{\bar{\varepsilon}}(x^*)$ とすべての臨界点 $x^{\mathrm{c}} \neq x^*$ に対して $v(x) > v(x^{\mathrm{c}})$ となるような (λ と θ に依存しない) $\bar{\varepsilon} > 0$ がとれます．(iv) より，$B_{\bar{\varepsilon}}(x^*)$ 内の点を初期分布とする任意の完全予見経路 $x(\cdot)$ に対して $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$ が成り立ちます．これは x^* が吸収的であることを意味します．また，(ii) で $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ とすると，(i) と合わせて，

(注13) とくに，(iv) より，v の臨界点がすべて孤立点であるようなケースにおいては，任意の完全予見経路は必ず収束することがいえます．

$\delta \le \bar{\delta}(\bar{\varepsilon})$ ならば，任意の $x^0 \in \Delta$ に対して x^0 を初期条件とする完全予見経路 $x(\cdot)$ が存在してある T について $x(T) \in B_{\bar{\varepsilon}}(x^*)$ が成り立ちます．$B_{\bar{\varepsilon}}(x^*)$ は x^* の吸収域だったので，けっきょく $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$ がしたがいます．これで $\delta \le \bar{\delta}(\bar{\varepsilon})$ に対する x^* の大域到達可能性が示されました．

5．おわりに

経済学は「人々の行動は，彼らの世の中の動きに関する予想に依存する」という視点から人間社会の現象を考察します．そして，予想が行動を決め，かつ行動が予想を決める，あるいは時間が入った設定でいうと，将来が現在を決め，かつ現在が将来を決める，という双方向の因果関係の不動点として理論モデルの解 (帰結) を定めます．本稿で紹介した完全予見動学の理論も，このような経済学ならではの考え方を進化ゲーム理論的な環境に組み込んだものです．そこでは，通常の微分方程式とは異なり，初期条件に対する解経路の一意性は成り立たず，このことが安定性の概念を強めることにつながります．実際，ポテンシャル・ゲームにおいては，強均衡状態が複数存在しても，ポテンシャル関数を大域的に最大化するもののみが (十分小さい摩擦度に対して) 安定になることを見ました．

最後に，著者自身がかかわっている関連研究をいくつか紹介します．より広いクラスのゲームについて安定性の特徴づけを与えている研究としては Oyama et al.[12)]，Oyama and Tercieux[25)] などがあります．また，将来予想の与え方として「正しい予想を全員一致してもつ」という完全予見の要請を緩めた「合理化可能予見動学 (rationalizable foresight dynamics)」という理論を提案しました (Matsui and Oyama[26)]，松井[17, 第 13 章)])．現在は，空間経済成長理論への応用[27)] や，本論の連続体プレイヤーのモデルを，有限人プレイヤーのモデルの人数が十分大きいときのケースの近似として導く研究[28)] を行っています．

(2016 年 2 月 25 日受付)

参　考　文　献

1) J.F. Nash: Equilibrium Points in n-Person Games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36**, 48/49 (1950)
2) J.F. Nash: Non-Cooperative Games, Ph.D. dissertation, Princeton University (1950)
3) J. Nash: Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics*, **54**, 286/295 (1951)
4) 神取道宏：ゲーム理論による経済学の静かな革命，伊藤元重，岩井克人 (編)，現代の経済理論，東京大学出版会 (1994)
5) J. Hofbauer and K. Sigmund: Evolutionary Games and Population Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge (1998)
6) J. Hofbauer and K. Sigmund: Evolutionary Game Dynamics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **40**, 479/519 (2003)
7) W.H. Sandholm: Population Games and Evolutionary Dynamics, MIT Press, Cambridge (2010)
8) A. Matsui and K. Matsuyama: An Approach to Equilibrium Selection, *Journal of Economic Theory*, **65**, 415/434 (1995)
9) J. Hofbauer and G. Sorger: Perfect Foresight and Equilibrium Selection in Symmetric Potential Games, *Journal of Economic Theory*, **85**, 1/23 (1999)
10) J. Hofbauer and G. Sorger: A Differential Game Approach to Evolutionary Equilibrium Selection, *International Game Theory Review*, **4**, 17/31 (2002)
11) D. Oyama: p-Dominance and Equilibrium Selection under Perfect Foresight Dynamics, *Journal of Economic Theory*, **107**, 288/310 (2002)
12) D. Oyama, S. Takahashi, and J. Hofbauer: Monotone Methods for Equilibrium Selection under Perfect Foresight Dynamics, *Theoretical Economics*, **3**, 155/192 (2008)
13) S. Takahashi: Perfect Foresight Dynamics in Games with Linear Incentives and Time Symmetry, *International Journal of Game Theory*, **37**, 15/38 (2008)
14) K. Matsuyama: Increasing Returns, Industrialization, and Indeterminacy of Equilibrium, *Quarterly Journal of Economics*, **106**, 617/650 (1991)
15) D. Oyama: Agglomeration under Forward-Looking Expectations: Potentials and Global Stability, *Regional Science and Urban Economics*, **39**, 696/713 (2009)
16) 尾山大輔，松井彰彦：社会ゲームの理論：最適反応動学と完全予見動学，今井晴雄，岡田 章 (編)，ゲーム理論の新展開，勁草書房 (2002)
17) 松井彰彦：慣習と規範の経済学，東洋経済新報社 (2003)
18) R.A. Fisher: The Genetical Theory of Natural Selection, Clarendon Press, Oxford (1930)
19) M. Beckmann, C.B. McGuire, and C.B. Winsten: Studies in the Economics of Transportation, Yale University Press, New Haven (1956)
20) J.-P. Aubin and A. Cellina: Differential Inclusions, Springer-Verlag, Berlin (1984)
21) D. Monderer and L. Shapley: Potential Games, *Games and Economic Behavior*, **14**, 124/143 (1996)
22) W.H. Sandholm: Potential Games with Continuous Player Sets, *Journal of Economic Theory*, **97**, 81/108 (2001)
23) W.H. Sandholm: Large Population Potential Games, *Journal of Economic Theory*, **144**, 1710/1725 (2009)
24) J.A. Scheinkman: On Optimal Steady States of n-Sector Growth Models When Utility Is Discounted, *Journal of Economic Theory*, **12**, 11/30 (1976)
25) D. Oyama and O. Tercieux: Iterated Potential and Robustness of Equilibria, *Journal of Economic Theory*, **144**, 1726/1769 (2009)
26) A. Matsui and D. Oyama: Rationalizable Foresight Dynamics, *Games and Economic Behavior*, **56**, 299/322 (2006)
27) S. Fujishima and D. Oyama: Equilibrium Dynamics in a Model of Growth and Spatial Agglomeration (in preparation)
28) R. Iijima and D. Oyama: Mean-Field Approximation of Forward-Looking Population Dynamics (in preparation)

［著　者　紹　介］

尾(お)山(やま)大(だい)輔(すけ)　君

2003 年東京大学大学院経済学研究科博士課程修了，博士 (経済学)．03 年日本学術振興会特別研究員 (PD)．06 年一橋大学経済学研究科講師．10 年東京大学経済学研究科講師．13 年同准教授，現在に至る．