確率微分方程式を用いたSIR解法とその応用

野口, 和久
九州工業大学大学院情報工学府

廣瀬, 英雄
九州工業大学大学院情報工学府

https://hdl.handle.net/2324/1520971

出版情報：MI lecture note series. 60, pp.15-19, 2014-11-28. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

確率微分方程式を用いたSIR解法とその応用
Solving the SIR Equations via the Stochastic Differential Equations with Some Applications

九州工業大学大学院情報工学府　野口和久　(Kazuhisa Noguchi)
九州工業大学大学院情報工学研究院　廣瀬英雄　(Hideo Hirose)

概　要

The conventional SIR models given by the ordinary differential equations can be solved as an initial value problem. The solution may be obtained deterministically if the initial values are appropriately provided. However, disease spread phenomena show randomness. It would be more natural to deal with such equations incorporating stochastic terms. In this note, we discuss the modeling for such stochastic differential equations adapted to the SIR models

1　はじめに

今日, 感染症の拡大モデルやその終息値を予測する研究は数多い．代表的なものは，1) 生物成長系を基礎としたダイナミックスの常微分方程式形である SIR モデル [1, 2]，2) エージェントを基礎としたモデル [3]，それらを組み合わせたモデル [12]，3) インターネットや SNS を利用したモデルなどがある [4, 5, 6]．通常の SIR モデルは常微分方程式で与えられ, 初期値が定められると解が確定的に定められる. しかし, 一般にランダムな動きを仮定する方が自然であり, SIR モデルに確率微分方程式を用いることが考えられる. ここでは, SARS などのような実例を参考にしながら, 確率微分方程式としてどのようなモデルがふさわしいか議論したい.

2　SIR モデル

感染拡大の推移を推定するために SIR モデルを用いる．感染系に属する総人口を N とするとき

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \tag{2.1}$$

と表現される. 今，時刻 t のパンデミックにおける感染者数を $S(t)$，感受性者数を $I(t)$, 除外者数 (または回復者数という) を $R(t)$ とするとき，以下の連立微分方程式で表現される．

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\
\frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで β は感染率，γ は回復率 (除外率) を表すパラメータである. これらのパラメータは観測値を用いて差分法などを用いることで終息値までの推移を求めることができる．

これらのパラメータを推定するには前進差分，後退差分などが用いられる. 例えば，後退差分は以下で与えられる.

$$\beta(t) = \frac{S(t-1) - S(t)}{S(t)\, I(t)} \tag{2.3}$$

$$\gamma(t) = \frac{R(t) - R(t-1)}{I(t)} \tag{2.4}$$

これをある区間で平均化することで比較的安定した $\hat{\beta}(t)$, $\hat{\gamma}(t)$ を求めることができる.

3　確率微分方程式

時刻 t_i における確率過程 $X = X(t_i)$ について確率微分方程式は以下の式で表される [8].

$$dX(t_i) = \mu(t_i, X(t_i))dt_i + \sigma(t_i, X(t_i))dW(t_i) \tag{3.1}$$

ただし，$\mu(t_i, X(t_i))dt_i$ はドリフト項, $\sigma(t_i, X(t_i))$ d $W(t_i)$ は拡散項とし, $W(t_i)$ は 1 次ウィーナー過程である. このとき $dW(t_i)$ は時間増加量を $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ としたとき

$$dW(t_i) \sim Z(t_i)\sqrt{\Delta t_i} \tag{3.2}$$

となり平均 0, 分散 Δt_i の正規分布に従う.

Skiadas[7] は, 成長方程式の典型例であるロジスティック分布に対する確率微分方程式の解を与えている. 確率微分方程式の解はこのように正確に記述できる場合と数値的なシミュレーションで解を求める場合があるが, ここでは SIR に対しては後者を考える.

4　確率微分方程式型の SIR モデル

SIR モデル, $S(t), I(t), R(t)$ の 3 式に確率項を導入した確率微分方程式型の SIR モデルにはいくつか考えられる. 例えば,

$$\begin{aligned} dS(t_i) &= -\beta S(t_i)I(t_i)dt_i + \sigma_S dW_S(t_i) \\ dI(t_i) &= \beta S(t_i)I(t_i)dt_i - \gamma I(t_i)dt_i + \sigma_I dW_I(t_i) \\ dR(t_i) &= \gamma I(t_i)dt_i + \sigma_R dW_R(t_i) \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} dS(t_i) &= -\beta S(t_i)I(t_i)dt_i + \sigma_S dW_S(t_i) \\ dI(t_i) &= N - S(t_i) - R(t_i) \\ dR(t_i) &= \gamma I(t_i)dt_i + \sigma_R dW_R(t_i) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} dS(t_i) &= -\beta S(t_i)I(t_i)dt_i + \sigma_S dW_S(t_i) \\ dI(t_i) &= \beta S(t_i)I(t_i)dt_i - \gamma I(t_i)dt_i + \sigma_I dW_I(t_i) \\ dR(t_i) &= N - S(t_i) - I(t_i) \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} dS(t_i) &= -\beta N - I(t_i) - R(t_i) \\ dI(t_i) &= \beta S(t_i)I(t_i)dt_i - \gamma I(t_i)dt_i + \sigma_I dW_I(t_i) \\ dR(t_i) &= \gamma I(t_i)dt_i + \sigma_R dW_R(t_i) \end{aligned} \tag{4.4}$$

である [10]. あるいは,

$$\begin{aligned} dS(t_i) &= -\beta I(t_i)S(t_i)dt_i + \sigma_S dW(t_i) \\ dI(t_i) &= \{\beta S(t_i) - \gamma\} I(t_i)dt_i + \sigma_I dW(t_i) \\ dR(t_i) &= \gamma I(t_i)dt_i + \sigma_R dW(t_i) \end{aligned} \tag{4.5}$$

以下，この最後のモデルについて議論する.

5　確率微分方程式型の **SIR** モデルのパラメータ推定

5.1　拡散項のパラメータ推定

拡散係数 σ_S, σ_I について, パラメータ推定の計算を行う. まず σ_S について

$$dS(t_i) = -\beta I(t_i)S(t_i)dt_i + \sigma_S dW(t_i)$$

の両辺を 2 乗する.

$$\begin{aligned} \{dS(t_i)\}^2 &= \{-\beta I(t_i)S(t_i)dt_i + \sigma_S dW(t_i)\}^2 \\ &= \{\beta I(t_i)S(t_i)\}^2(dt_i)^2 + \{2\beta I(t_i)S(t_i)\sigma_S\}dt_i dW(t_i) + \sigma_S^2\{dW(t_i)\}^2 \end{aligned}$$

ここで伊藤の公式

$$dW(t_i)dt = dt dW(t_i) = (dt_i)^2 = 0 \tag{5.1}$$

$$\{dW(t_i)\}^2 = dt_i \tag{5.2}$$

より次の関係式が導かれる.

$$\begin{aligned} \{dS(t_i)\}^2 &= \sigma_S^2\{dW(t_i)\}^2 \\ &= \sigma_S^2 dt_i \end{aligned}$$

$dS(t_i) \cong S(t_{i+1}) - S(t_i)$, $dt_i \cong t_{i+1} - t_i$ と近似できると仮定すると拡散係数 $\sigma_S(t_i)$ は

$$\sigma_S(t_i) \cong \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \tag{5.3}$$

と算出される. この式に期待値を取ると拡散係数 σ_S の最尤推定値 $\hat{\sigma_S}$ は以下のように得られる.

$$\hat{\sigma_S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \tag{5.4}$$

同様の計算で拡散係数 σ_I, σ_R の最尤推定値 $\hat{\sigma_I}, \hat{\sigma_R}$ も得られる.

$$\hat{\sigma_I} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{I(t_{i+1}) - I(t_i)}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \tag{5.5}$$

$$\hat{\sigma_R} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{R(t_{i+1}) - R(t_i)}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \tag{5.6}$$

$S(t_i) + I(t_i) + R(t_i) = N$ より拡散係数の最尤推定値 $\hat{\sigma_I}, \hat{\sigma_I}, \hat{\sigma_R}$ の総和は 0 になる.

5.2 ドリフト項のパラメータ推定

次にドリフト項に存在する β, γ のパラメータ推定方法について述べる. これらのパラメータを推定するには通常の SIR モデルと同様に後退差分を用いる.

$$\begin{aligned} \beta(t_i) &= \frac{S(t_{i-1}) - S(t_i) - \sigma_S dW(t_i)}{S(t_i)I(t_i)dt_i} \qquad (5.7) \\ \gamma(t_i) &= \frac{R(t_i) - R(t_{i-1}) - \sigma_R dW(t_i)}{I(t_i)dt_i} \qquad (5.8) \end{aligned}$$

より $\beta(t_i)$, $\gamma(t_i)$ の最尤推定値 $\hat{\beta}(t_i)$, $\hat{\gamma}(t_i)$ はこれらの式の期待値をとることで得られる. このとき, $dW(t_i)$ は平均 0, 分散 Δt の正規分布に従うことから

$$E[dW(t_i)] = 0 \qquad (5.9)$$

$dt_i \cong t_{i+1} - t_i$ と近似すると

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(t_i) &= E[\beta(t_i)] \\ &\cong \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{S(t_{i-1}) - S(t_i)}{S(t_i)I(t_i)(t_{i+1} - t_i)} \qquad (5.10) \\ \hat{\gamma}(t_i) &= E[\gamma(t_i)] \\ &\cong \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{R(t_i) - R(t_{i-1})}{I(t_i)(t_{i+1} - t_i)} \qquad (5.11) \end{aligned}$$

5.3 オイラー・丸山法

確率微分方程式の数値計算の手法してとオイラー・丸山法 [9] を使用する. なお, dW_t は正規疑似乱数により再現する．平均 0，分散 Δt_i の正規分布に従うとする. Δt_i は時間増加量である.

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_i, X(t_i))\Delta t_i + \sigma(t_i, X(t_i))Z(t_i)\sqrt{\Delta t_i} \qquad (5.12)$$

本モデルの更新式は以下のように表される.

$$\begin{aligned} S(t_{i+1}) &= S(t_i) - \hat{\beta}(t_i)I(t_i)S(t_i)\Delta t_i + \hat{\sigma_S}(t_i)Z(t_i)\sqrt{\Delta t_i} \\ I(t_{i+1}) &= I(t_i) + \{\hat{\beta}(t_i)S(t_i) - \hat{\gamma}(t_i)\}I(t_i)\Delta t_i + \hat{\sigma_I}(t_i)Z(t_i)\sqrt{\Delta t_i} \qquad (5.13) \\ R(t_{i+1}) &= R(t_i) + \hat{\gamma}(t_i)I(t_i)\Delta t_i + \hat{\sigma_R}(t_i)Z(t_i)\sqrt{\Delta t_i} \end{aligned}$$

6 議論

パンデミック予測を目的として, SIR モデルに確率微分方程式型の数値解法を組み合わせたモデリングについて議論した. 今後は, 適切なモデル選定に加え各パラメータを適切に決定法する方法を組み立てていき, 数値シミュレーションなどを通して適用性や妥当性について検討しながら, パンデミックの実例にも適用させていきたい.

参考文献

[1] Kermack, W. O., McKendrick, A. G., 1933. Contributions to the mathematical theory of epidemics-iii. further studies of the problem of endemicity. Proceedings of the Royal Society 141A, 94-122.

[2] R. Anderson and R.May, Infectious diseases of humans: Dynamics and control, Oxford University Press, 1991.

[3] S. Eubank, Scalable, efficient epidemiological simulation, Proceedings of the 2002 ACM symposium on Applied computing, (2002) 139-145.

[4] J. Ginsberg, et.al., “Detecting influenza epidemics using search engine query data,” Nature 457, 1012-1014, 2009.

[5] A. Culotta, “Detecting influenza outbreaks by analyzing Twitter messages,” Science, 16, Issue: May, 1-11, 2010.

[6] Hideo Hirose, Liangliang Wang, ”Prediction of Infectious Disease Spread using Twitter: A Case of Influenza,” the 5th International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Programming (PAAP’12), pp.100-105, 2012.

[7] Skiadas, C.H.:*Exact Solution of Differential Equation: Gompertz and Generalized Logistic*, Methodology and Computing in Applied Probability, Vol.12 (2009), pp.261270.

[8] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1998). （谷口説男 訳：確率微分方程式, シュプリンガー・ジャパン株式会社 (2009)）.

[9] Y. Saito, The Modified Heun Method for Stochastic Differential Equations, Transaction on JSIAM, vol.21, no.4, pp.323-333, 2011.

[10] 廣瀬, 牧, SIR 確率微分方程式によるパンデミック解析, 日本応用数理学会 2011 年度年会, 14p-G3-3, p.121-122 (2011)

[11] 廣瀬英雄, パンデミックの予測と統計学, 数学セミナー増刊 統計学ガイダンス, 2014.8.

[12] H. Hirose, Pandemic Simulations by MADE: A combination of Multi-agent and Differential Equations, with Novel Influenza A(H1N1) , Information, Vol.16, No.7B, pp.5365-5390 (2013)

[13] Yoshihiro Maki, Hideo Hirose, ”Infectious Disease Spread Analysis Using Stochastic Differential Equations for SIR Model, ” the 4th International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation (ISMS 2013), pp.152-156, 2013.

[14] WHO(World Health Organization), Cumulative Number of Reported Probable Cases of Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS),

http://www.who.int/csr/sars/country/en/index.html