区間効率値による DEA モデル

奥原研究室　M1　小野田成晃

2018/5/2

はじめに

- 本研究ではDEAとIDEAを用いた区間効率値によるモデルを構築する。
- DEAは各支店（DMU）に対して最も有利な重み付け評価を行う手法である。
- IDEAは各APUに対して最も不利な評価を行う手法である。
- しかしこの２つのモデルは本質的には無関係なので、IDEAをDEAと同じ形式にすることによって効率的を区間値をとして解析する手法を提案する。

DEAとIDEA

- DEAとは各DMUに対して利益が**最大**となるように重み付け評価をすることで多次元パラメータの**効率性**を求めるデータ解析手法

$$\left.\begin{array}{rll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} & \\ \text{subject to} & \dfrac{\boldsymbol{u}^tY}{\boldsymbol{v}^tX} & \leq 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{rll} \max\limits_{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o & \\ \text{subject to} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o & = 1 \\ & -\boldsymbol{v}^tX+\boldsymbol{u}^tY & \leq 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

- 上式のようにv^(t)x_0を1と仮定して線形計画問題に持ち込む手法CCRを用いる

DEAとIDEA

- IDEAとは各DMUに対して利益が最小となるように重み付け評価をすることで多次元パラメータの非効率性を求めるデータ解析手法（DEAと仮想入力、仮想出力を逆数を取った物）

$$
\left.\begin{array}{lll}
\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o} & \\
\text{subject to} & \dfrac{\boldsymbol{v}^t X}{\boldsymbol{u}^t Y} & \leq 1 \\
 & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\
 & \boldsymbol{v} & \geq 0
\end{array}\right\} \qquad (4)
$$

$$
\left.\begin{array}{lrl}
\max\limits_{\boldsymbol{v}} & \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_o & \\
\text{subject to} & \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o & = 1 \\
 & \boldsymbol{v}^t X - \boldsymbol{u}^t Y & \leq 0 \\
 & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\
 & \boldsymbol{v} & \geq 0
\end{array}\right\} \qquad (5)
$$

- DEAと同じくu^(t)y_0を1と仮定して線形計画問題に持ち込む手法CCRを用いる

DEAとIDEA

- 表２からA、Jは効率的かつ非効率と特異なDMUと分析される
- さらに図１の通り別の方向から評価関数を近づけている
- =>これら２つの手法は本質的には関係がない

表 2: 効率値と非効率値

DMU	efficiency	inefficiency
A	1.000	1.000
B	0.522	1.000
C	0.824	0.813
D	0.652	0.889
E	1.000	0.591
F	0.696	1.000
G	0.957	0.571
H	0.826	0.909
I	0.957	0.833
J	1.000	1.000

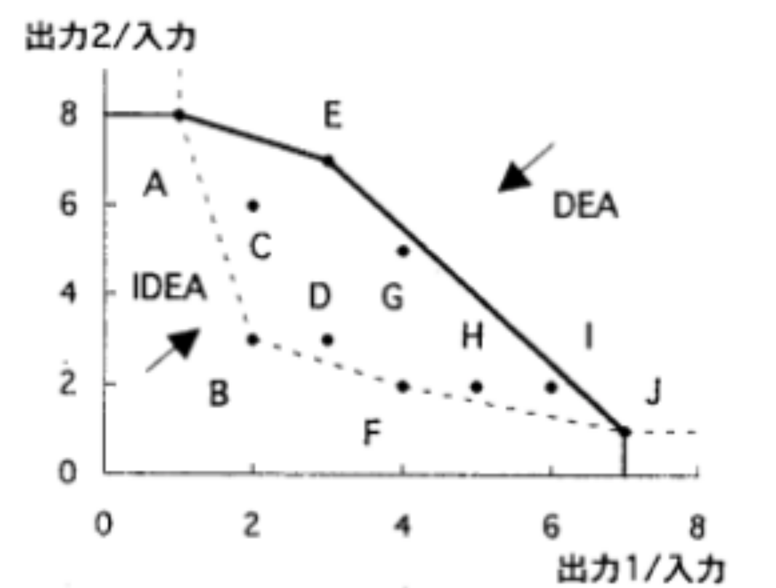


図 1: DEA と IDEA による効率値と非効率値

区間効率値モデル

- 効率値と非効率値を同じ土俵で評価するために以下のモデルを提案

$$\left.\begin{array}{lll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{E^*} & = \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

いままで同様にCCRを適用

$$\left.\begin{array}{lll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{E^*} & = \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} \\ \text{subject to} & \max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j} & = 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

- すべての DMU に対する (仮想出力 / 仮想入力) の最大値を
- 基準にして, DMU_{O} にとって最も有利な評価という観点からその比を最大化するというように DEA を解釈した

区間効率値モデル

- 次に効率値を得るモデルとして以下のようになる

$$\left.\begin{array}{lll} \cancel{\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}} & \theta_o^E{}_* & = \dfrac{\frac{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_o}}{\max_j \frac{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_j}} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^E{}_* & = \frac{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_o} \\ \text{subject to} & \max_j \frac{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_j} & = 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

- しかしこのモデルは線形計画に変形できないので

- 次にn個の問題を考える

区間効率値モデル

- 次に効率値を得るモデルとして以下のようになる

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\cancel{\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}} & \theta_{o*}^{E} & = \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_{j} \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\
\text{subject to} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\
 & \boldsymbol{v} & \geq 0
\end{array}
\right\} \qquad (9)
$$

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_{o*}^{E} & = \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} \\
\text{subject to} & \max\limits_{j} \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j} & = 1 \\
 & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\
 & \boldsymbol{v} & \geq 0
\end{array}
\right\} \qquad (10)
$$

- しかしこのモデルは線形計画に変形できないので

- 次にn個の問題を考える

区間効率値モデル

- 全jについて $\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_j / \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_j = 1$ のように考えn個の問題とする
- さらに $\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_o = 1$ という制約を課して線形計画問題化する

$$\left.\begin{array}{lll} \min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_{oj} & = \dfrac{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_o} \\ \text{subject to} & \dfrac{\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_j} & = 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \min\limits_{\boldsymbol{u}} & \theta_o j^E & = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o \\ \text{subject to} & \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_o & = 1 \\ & \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_j & = 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

- これの最小値が効率値の下界となる

区間効率値モデル

- 入出力ベクトルによる区間効率値は以下のようになる

$$\theta_o^E \in \left[\theta_{o*}^E, \theta_o^{E*}\right] \tag{14}$$

- ここで効率的DMUの定義は上界、下界両方が他DMUに劣ってないDMUとする
- またあるDMUの下界は他DMUとの類似度を表す

区間効率値モデル

- 同様に区間非効率値を基準にしたモデルも以下の様に定義できる

上界

$$
\left.\begin{array}{rrl}
\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{IE*} & = \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o} \\
\text{subject to} & \max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j} & = 1 \\
 & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\
 & \boldsymbol{v} & \geq 0
\end{array}\right\} \quad (16)
$$

下界

$$
\left.\begin{array}{rrl}
\min\limits_{\boldsymbol{v}} & \theta_{oj}^{IE} & = \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o \\
\text{subject to} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o & = 1 \\
 & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j & = 0 \\
 & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\
 & \boldsymbol{v} & \geq 0
\end{array}\right\} \quad (j \neq o) \qquad (19)
$$

- 上式は線形計画問題で解ける形に変換した後の式

区間データによる区間効率値

- 需要、景気、季節等データは変動しているのでこれを区間データとして扱う

$$x_{ij} \in \left[x_{ij_*}, x_{ij}{}^*\right], \quad y_{rj} \in \left[y_{rj_*}, y_{rj}{}^*\right]$$

区間データの定義

- 例によって定式化（線形計画問題化）すると以下のようになる

$$\left.\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{u}} \quad & \theta_o^{E^*} && = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o{}^* \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_{o_*} && = 1 \\
& \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_{j_*} - \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_j{}^* && \leq 0 \quad (j \neq o) \\
& \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o{}^* - \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_{o_*} && \leq 0 \\
& \boldsymbol{u} && \geq 0 \\
& \boldsymbol{v} && \geq 0
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$\left.\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{v}} \quad & \theta_{oj_*}^{IE} && = \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_{o_*} \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_o{}^* && = 1 \\
& \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{x}_j{}^* - \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_{j_*} && = 0 \\
& \boldsymbol{u} && \geq 0 \\
& \boldsymbol{v} && \geq 0
\end{aligned}\right\} \quad (j \neq o) \qquad (33)$$

$$\theta_{o_*}^{IE} = 1 \wedge \min_{j \neq o} \theta_{oj}^{IE} \qquad (34)$$

区間データによる区間効率値

- 表１のデータを表４のように区間データ化

表 1: データ

DMU	input x	output1 y_1	output2 y_2
A	1	1	8
B	1	2	3
C	1	2	6
D	1	3	3
E	1	3	7
F	1	4	2
G	1	4	5
H	1	5	2
I	1	6	2
J	1	7	1

表 4: 区間データ

DMU	input x	output1 y_1	output2 y_2
A	1	[0.8,1.2]	[7.5,8.5]
B	1	[1.8,2.2]	[2.4,3.6]
C	1	[1.7,2.3]	[5.7,6.3]
D	1	[2.5,3.5]	[2.7,3.3]
E	1	[2.8,3.2]	[6.7,7.3]
F	1	[3.8,4.2]	[1.8,2.2]
G	1	[3.4,4.6]	[4.6,5.4]
H	1	[4.7,5.3]	[1.5,2.5]
I	1	[5.6,6.4]	[6.7,7.3]
J	1	[1.7,2.3]	[0.8,1.2]

区間データによる区間効率値

- クリスプデータと区間データの区間効率比較（点線：クリスプ、実線：区間データ）

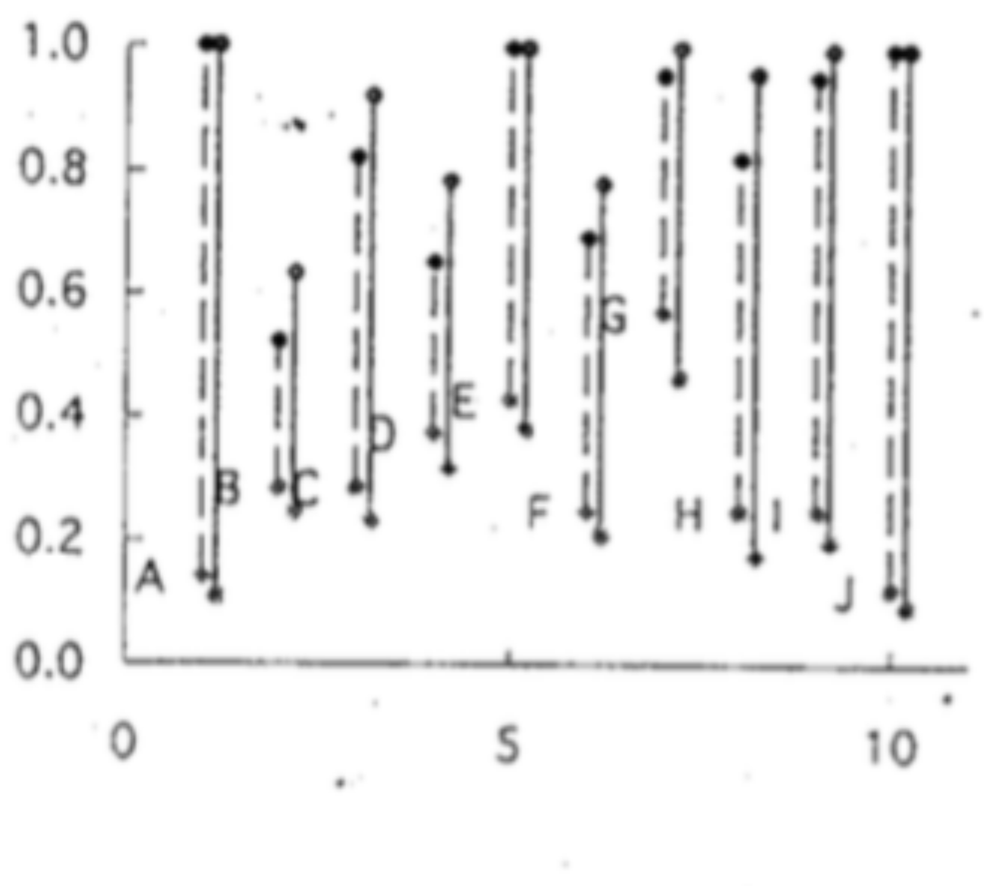


図 4: 区間データによる区間効率値

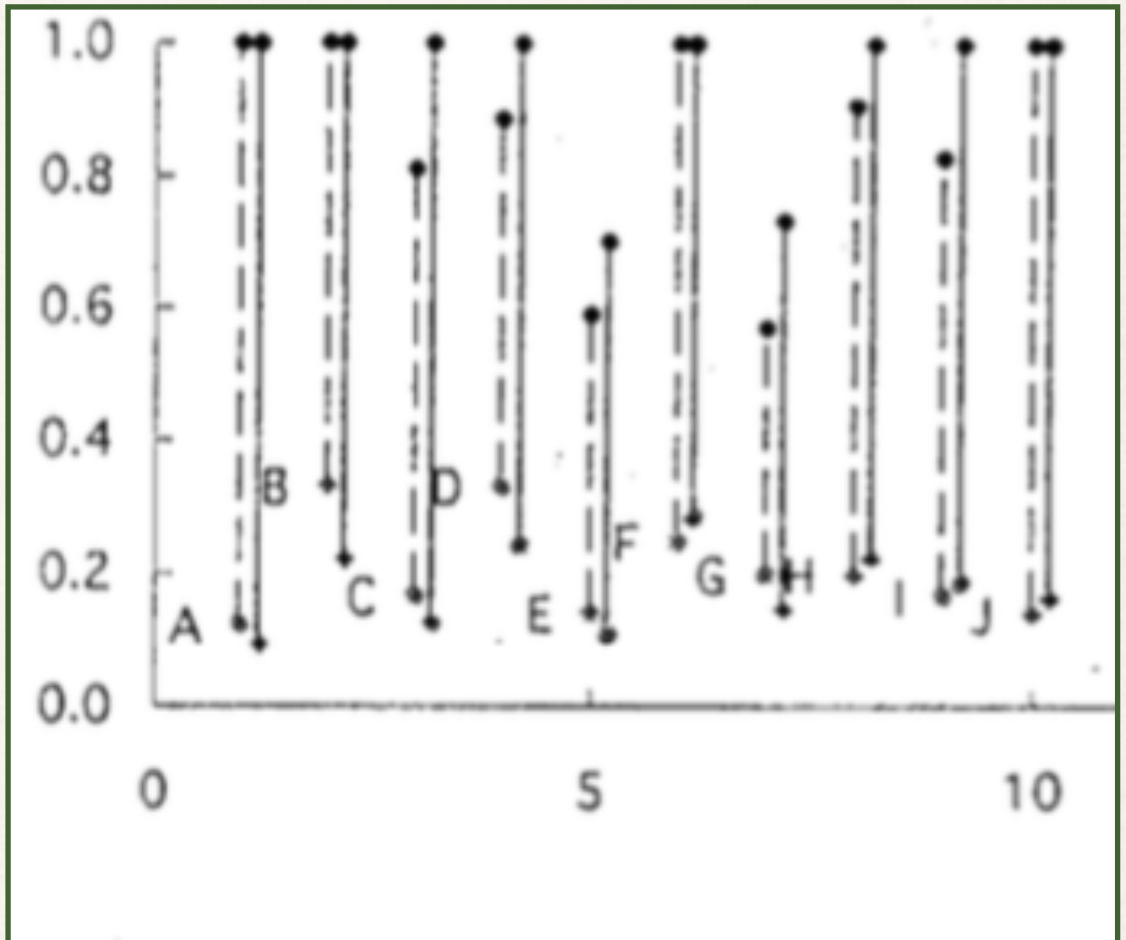
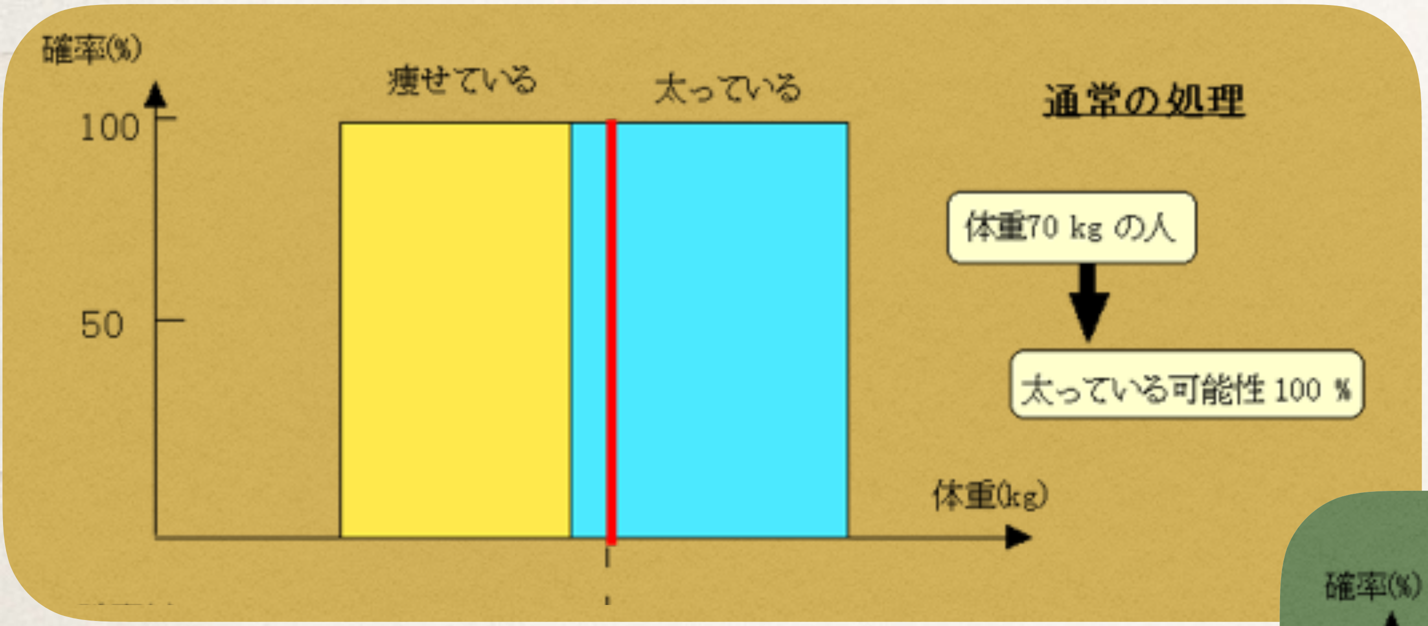


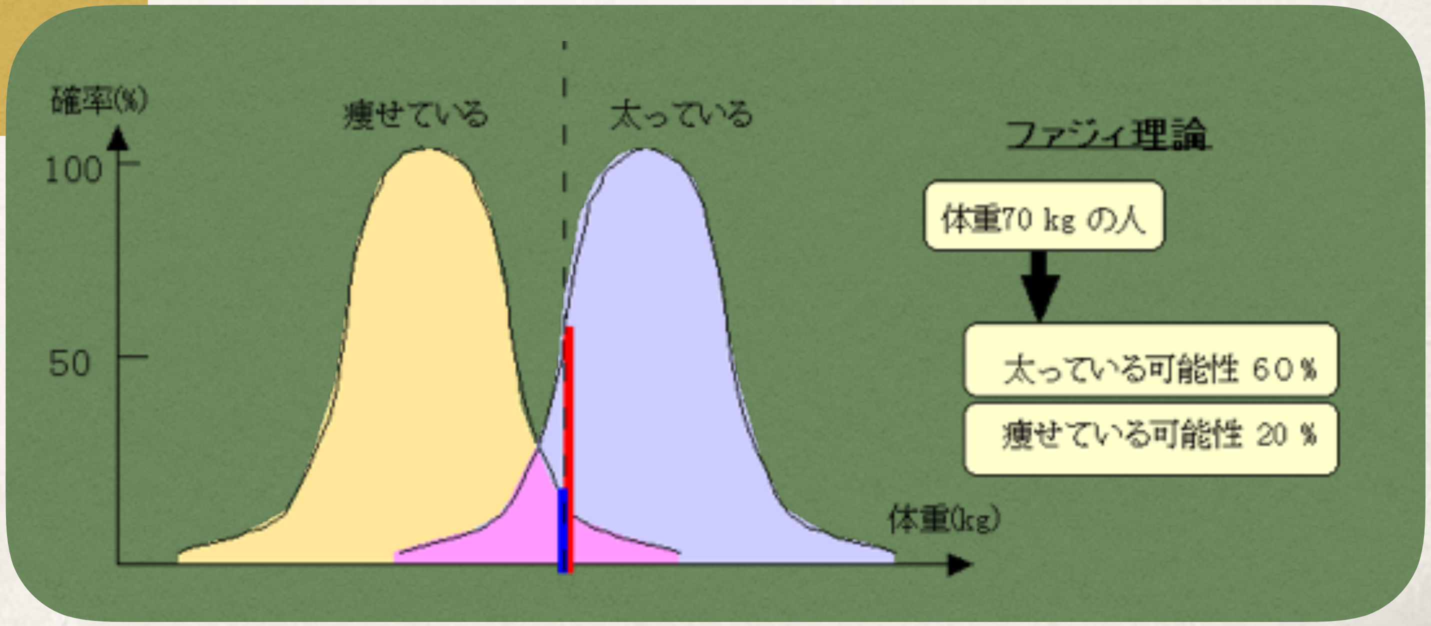
図 5: 区間データによる区間非効率値

区間データの方がクリスプよりも大きくなっている

ファジィデータ

- ファジィ集合とは
- 通常の集合（クリスプ集合）に対して曖昧さを表現した集合





ファジィデータ

- 分解定理を用いて区間データと区間効率値をファジィ化すると以下表６となる（橙：効率的、紫：非効率、緑：特異点）

ファジィ効率値

表 6: ファジィデータ

DMU	input	output1	output2
A	1	(1.0,0.2)	(8.0,0.5)
B	1	(2.0,0.2)	(3.0,0.6)
C	1	(2.0,0.3)	(6.0,0.3)
D	1	(3.0,0.5)	(3.0,0.3)
E	1	(3.0,0.2)	(7.0,0.3)
F	1	(4.0,0.2)	(2.0,0.2)
G	1	(4.0,0.6)	(5.0,0.4)
H	1	(5.0,0.3)	(2.0,0.5)
I	1	(6.0,0.3)	(2.0,0.3)
J	1	(7.0,0.3)	(1.0,0.2)

ファジィ非効率値

表 6: ファジィデータ

DMU	input	output1	output2
A	1	(1.0,0.2)	(8.0,0.5)
B	1	(2.0,0.2)	(3.0,0.6)
C	1	(2.0,0.3)	(6.0,0.3)
D	1	(3.0,0.5)	(3.0,0.3)
E	1	(3.0,0.2)	(7.0,0.3)
F	1	(4.0,0.2)	(2.0,0.2)
G	1	(4.0,0.6)	(5.0,0.4)
H	1	(5.0,0.3)	(2.0,0.5)
I	1	(6.0,0.3)	(2.0,0.3)
J	1	(7.0,0.3)	(1.0,0.2)

おわりに

- DEA効率値とIDEA効率値は関係ない
- そこで区間効率モデルを用いて効率値を区間として表すことにより意思決定者により多くの情報を提示できた
- また、区間データやファジィデータへの拡張も提案できた

おまけ

- α=$\{0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$とすると
- 分解定理とは右図のようになる
- これは、クリスプ集合A_{α}を
- ファジィ集合αA_{α}に分解できている

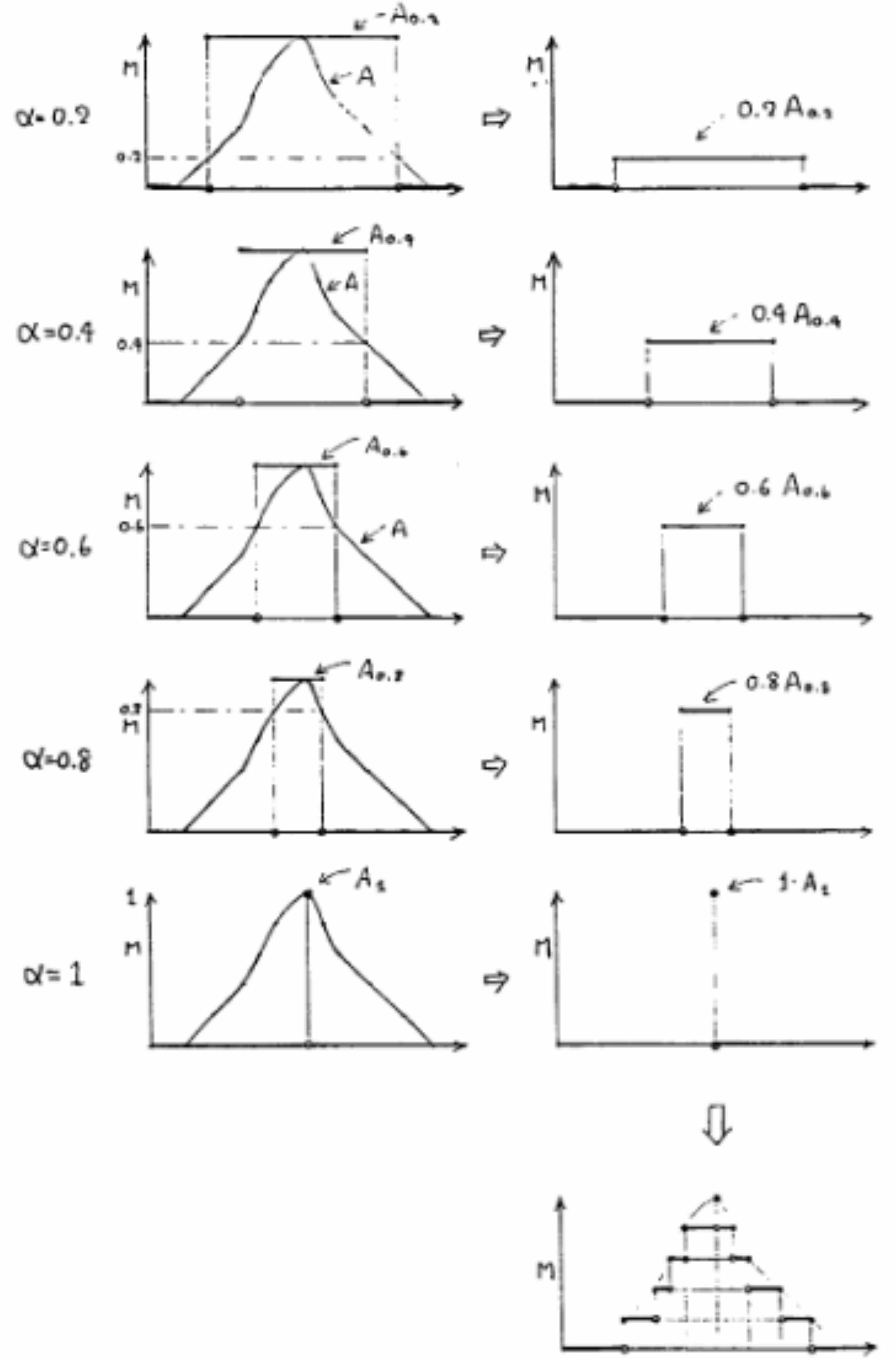


図 4.22　分解定理

http://sagaweb.csse.muroran-it.ac.jp/htdocs_fuzzy/fuzzy1/node22.html