システム/制御/情報，Vol. 62, No. 1, pp. 28–33, 2018

解　説

提携の実現に制限のある協力ゲーム

楠木　祥文*

1. はじめに

ゲーム理論とは，複数の意思決定者が相互に影響を及ぼす状況を記述・分析する道具立てであると考えることができる．つまり，ゲーム理論は一つの理論体系ではなく，相互作用する社会的意思決定状況を対象とする複数の異なる分野やアプローチの集まりである．ゲーム理論では，その意思決定状況をゲーム，それに関わる意思決定者をプレイヤーとよぶ．各プレイヤーはその目的のために行動を選択し，意思決定状況の結果に影響を与える．

ゲーム理論には，非協力ゲームと協力ゲームとよばれる，異なるアプローチが存在する．この二つの違いは拘束力のある合意 (binding agreement) の仮定にある．非協力ゲームでは，拘束力のある合意を仮定しない状況で，各プレイヤーがその目的を達成するために，行動をどのように選択するかが主題となる．これに対して，本稿で解説する協力ゲームでは，拘束力のある合意をもつことをプレイヤーに認める．その場合，プレイヤーは集団の利得の総和が最大となるように行動し，合意内容に従ってその利得を分け合う．協力ゲームでは，プレイヤーの行動選択は問題にならず，利得分配に対するプレイヤー間の合意が主題となる．そのような合意は，プレイヤーの交渉力や公平性に基づくような，広く支持されるものでなければならない．

協力ゲームでは，プレイヤー間の交渉によって利得分配が決定されるが，その交渉のために，プレイヤーの一部のグループが，拘束力のある合意に従って，集団的な行動をとることも考えられる．そのようなグループを提携 (coalition) という．提携を基本要素とし，利得分配の交渉のみに着目したゲームの表現形式を提携形という．提携形ゲームはプレイヤー集合と提携の得られる利得を示す特性関数 (characteristic function) で構成される．

提携形ゲームでは，特性関数に対して各プレイヤーの利得を与える（多価）関数によって，交渉過程が表現される．そのような関数をゲームの解という．妥当な解を提案することや，それらを比較・分析することが，提携形ゲームのおもな理論的研究となる．本稿では，重要な解の研究分野として，値 (value) または一点解 (one-point solution) と，その公理的特徴づけ (axiomatic characterization) に着目する．公理的特徴づけとは，交渉過程における行動基準 (standard of behavior) を記述した公理 (axiom) によって値を一意に定めることである．Shapley 値 [17] は最も重要な提携形ゲームの値であり，さまざまな公理系によって特徴づけられている．

従来の提携形ゲームでは，すべてのプレイヤーのグループが提携を形成できると仮定していた．しかし，現実には，提携の形成が不可能なグループも存在すると考えられる．Myerson[14] は，プレイヤーを頂点とするグラフを導入し，そのグラフにおいて連結なプレイヤーの集合を実行可能な提携とみなした．このように，その枝集合によってプレイヤーの協力関係を表すグラフを伝達構造 (communication structure) という．Myerson は伝達構造を伴う提携形ゲームから，制限ゲーム (restricted game) とよばれる提携形ゲームを定義し，その Shapley 値によって Myerson 値を提案し，その公理系を示した．

Gilles ら [8,9] は，伝達構造とは異なる協力を表す構造として，許可構造 (permission structure) を提案した．許可構造は有向グラフによって与えられ，階層的な協力関係を表している．許可構造を反映することで，提携の実行可能性が定義され，伝達構造と同様に制限ゲームが得られる．制限ゲームの Shapley 値によって，許可値 (permission value) が提案され，公理系 [22,23,26] が示された．

本稿では，提携に制限のある提携形ゲームの紹介として，伝達構造と許可構造を伴うゲームについて述べる．その準備のために，まず，**2.** では，提携形ゲームを定義し，その例題を紹介する．さらに，Shapley 値を導入し，その公理系について解説する．**3.** では，伝達構造を伴うゲームと Myerson 値の公理系について解説する．**4.** では，許可構造を伴うゲームと許可値の公理系について解説する．

2. 提携形ゲームと Shapley 値

2.1 提携形ゲーム

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ を n 人のプレイヤー集合とする．N の各部分集合 $S\subseteq N$ は提携とよばれる．とくに N は全体提携 (grand coalition) とよばれる．N に対する特性関数は実数値関数 $v: 2^N \to \mathbb{R}$ で与えられる．各提携 S に

* 大阪大学 大学院 工学研究科
Key Words: cooperative game, communication structure, permission structure, axiomatic value.

対して，$v(S)$ はそのメンバーが協力することによって得られる (抑えられる) 利得 (コスト) を表し，S の提携値とよばれる．ただし，空集合 $\emptyset$ に対する提携値 $v(\emptyset)$ は 0 とする．N に対する特性関数の全体集合を $\mathcal{G}^N$ で表す．提携形ゲームはプレイヤー集合と特性関数のペア (N,v) で定義される．本稿では提携形ゲームを簡単にゲームとよぶ．また，N を固定し，ゲームをその特性関数と同一視する．

N を添え字とする実数ベクトル $x\in\mathbb{R}^N$ は利得ベクトルとよばれる．x_i はプレイヤー i の利得を表している．ゲームの解とは，各ゲームに対して利得ベクトルを与える（多価）関数である．とくに，各ゲームに対して一つの利得ベクトルを与える解は値とよばれる．ゲームの解は協力して得られる利益をプレイヤー間でどのように分け合うかを示している．この利益分配の過程で，別払い (side payment) が認められている．つまり，貨幣を用いることによって，各プレイヤーが得た利益（効用）を任意の量でやりとりをすることができる．そのため，本稿で扱うゲームは，譲渡可能効用 (transferable utility) をもつ提携形ゲームとよばれる．

以下にゲームの例題を示す．表記を簡単にするため，集合 $\{i_1,\dots,i_k\}$ を $i_1\cdots i_k$ で表す．たとえば，135 は集合 $\{1,3,5\}$ を表す．協力ゲームの実問題への適用については，文献 [15,20,21,27] などを参照されたい．

【例題 1】（手袋ゲーム [18]） 5 人のプレイヤーが集合 $R=123$ と $L=45$ に分割されている．R の各プレイヤーは右の手袋 1 枚を，L の各プレイヤーは左の手袋 1 枚をもっている．右と左の手袋は単独では価値がないが，両方そろっている場合，1 単位の価値がある．このとき，提携 $S\subseteq N=12345$ が得る価値は $v(S)=\min\{|R\cap S|,|L\cap S|\}$ となる．ただし，$|\cdot|$ は集合の基数を表す．たとえば，提携 145 では手袋が 1 セットそろうので $v(145)=1$ となる．この例は単純化された市場モデルを表している．

【例題 2】（空港ゲーム [13]） 空港の滑走路の建設を計画している．滑走路が長いほど建設費は高くなる．飛行機の種類よって必要な滑走路の長さは異なるが，空港の滑走路の長さは，そこを利用する飛行機が必要とする長さの最大となる．いま，その空港を利用する 4 機の飛行機があり，各飛行機をプレイヤーとみなす．各飛行機が必要とする滑走路の建設費に対応した年間の資本費（万円）を，それぞれ，$c_1=600$，$c_2=900$，$c_3=1000$，$c_4=1200$ とする．このとき，提携 $S\subseteq N=1234$ のコストは $v(S)=\max\{c_i\mid i\in S\}$ となる．

【例題 3】（投票ゲーム） 多数決投票によって意思決定が行われる 11 人の集団がある．提出された議案が可決されるためには 6 人以上の賛成が必要となる．集団は四つのグループに分かれており，構成員の数はそれぞれ $w_1=4$, $w_2=1$, $w_3=2$, $w_4=4$ となっている．各グループを 1 人のプレイヤーとして，提携 $S\subseteq N=1234$ によって 6 人以上の賛成が得られる場合，その提携値を 1 とするゲーム v を考える．つまり，$\sum_{i\in S}w_i\geq 6$ ならば $v(S)=1$ であり，それ以外の提携値は 0 である．提携値が 1 となる提携を勝利提携とよび，それ以外を敗北提携とよぶ．この例の勝利提携は 13,14,34,123,124,234,1234 となる．

2.2 Shapley 値

本小節では Shapley 値 [17] を紹介する．N から N への全単射関数を N の置換とよび，Π^N を N の置換の全体集合とする．置換 $\pi\in\Pi^N$ は，プレイヤーの順列を表しており，各 $i\in N$ に対して，$\pi(i)$ は i 番目のプレイヤーを示している．π において，プレイヤー $i\in N$ に先行するプレイヤーの集合 $P(\pi,i)=\{\pi(1),\dots,\pi(k)=i\}$ を定義する．ゲーム $v\in\mathcal{G}^N$ に対して，Shapley 値 $\phi(v)\in\mathbb{R}^N$ は以下の式で定義される．各 $i\in N$ に対して，

$$\phi_i(v)=\frac{1}{|\Pi^N|}\sum_{\pi\in\Pi^N}v(P(\pi,i))-v(P(\pi,i)\setminus\{i\}) \quad (1)$$

Shapley 値は次のように解釈できる．n 人のプレイヤーが順列 $\pi\in\Pi^N$ に従って提携に加わる状況を考える．そのとき，プレイヤー $i\in N$ が加わることで増加する利得は $v(P(\pi,i))-v(P(\pi,i)\setminus\{i\})$ となるので，i にその値を支払うとする．i の Shapley 値 $\phi_i(v)$ はそのようにして得られた利得の順列に関する平均値となっている．

つぎに満場一致ゲーム (unanimity game) と Harsanyi 係数 (Harsanyi dividend) を導入する．これらは，Shapley 値の公理系を理解するうえで重要となる．$\emptyset\neq S\subseteq N$ の満場一致ゲーム $u_S\in\mathcal{G}^N$ はつぎのように定義される．各 $T\subseteq N$ に対して，

$$u_S(T)=\begin{cases}1, & \text{if } S\subseteq T\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad (2)$$

u_S は，S のメンバーすべてが賛成すれば議案が可決される投票ゲームと解釈することができる．ゲームの集合 $\mathcal{G}^N$ を 2^n-1 次元の線形空間ととらえると，満場一致ゲームの集合 $\{u_S\}_{\emptyset\neq S\subseteq N}$ はその基底となる．したがって，任意のゲーム $v\in\mathcal{G}^N$ に対して，$v=\sum_{\emptyset\neq S\subseteq N}d_S(v)u_S$ となる係数 $d_S(v)$, $\emptyset\neq S\subseteq N$ が一意に定まる．この係数は Harsanyi 係数とよばれる．Harsanyi 係数を用いると，Shapley 値はつぎのように表現できる．

$$\phi_i(v)=\sum_{S\ni i}\frac{d_S(v)}{|S|},\quad i\in N \quad (3)$$

つまり，$\phi_i(v)$ は，i を含む各提携の Harsanyi 係数の等配分を足し合わせたものとなる．

【例題 4】（Shapley 値） **例題 1** と**例題 2** の Shapley 値を求める．**例題 1** では，後に述べる Shapley 値の対称性から，$\phi_1(v)=\phi_2(v)=\phi_3(v)$, $\phi_4(v)=\phi_5(v)$ となるので，R と L からプレイヤーを 1 人ずつ選び，その Shapley 値を計算すればよい．各 $i\in R$ または $i\in L$ に対して，置

換 $\pi\in\Pi^N$ で得られる利得は 1 か 0 となるので，i の利得が 1 となる置換を数えることで Shapley 値が計算でき，その値は $\phi(v)=(0.23,0.23,0.23,0.65,0.65)$ となる．

例題 2 では，まず v の双対ゲーム $v^*\in\mathcal{G}^N$ を考える．双対ゲームは各 $S\subseteq N$ に対して，$v^*(S)=v(N)-v(N\setminus S)$ で定義される．双対変換に対して，Shapley 値は不変: $\phi(v)=\phi(v^*)$ であるので，v^* の Shapley 値を計算する．v^* の Harsanyi 係数は，提携 4,34,234,1234 に対しては $d_4=c_4-c_3=200$, $d_{34}=c_3-c_2=100$, $d_{234}=c_2-c_1=300$, $d_{1234}=c_1=600$ となり，そのほかの提携 S では $d_S=0$ となるので，Shapley 値は $\phi(v)=(150,250,300,500)$ と求まる．

Shapley 値の公理系を述べる．ゲームの値 $f:\mathcal{G}^N\to\mathbb{R}^N$ に対する四つの公理をあげる．

【公理 E (efficiency)】 任意の $v\in\mathcal{G}^N$ に対して $\sum_{i\in N}f_i(v)=v(N)$ が成り立つ．

この公理は利得ベクトル $f(v)$ が全体提携の利得 $v(N)$ を分割したものになっていることを要求している．つまり，全体提携が形成されると仮定して，その利得が過不足なくプレイヤーに分けられることを意味している．

【公理 A (additivity)】 任意の $v,w\in\mathcal{G}^N$ に対して $f(v+w)=f(v)+f(w)$ が成り立つ．

この公理は，あるゲームが二つゲーム v と w の和で与えられている場合，そのゲームに対する利得ベクトルも，v と w に対する利得ベクトルの和となることを要求している．

【公理 NP (null-player property)】 任意の $v\in\mathcal{G}^N$ と，v における任意の null プレイヤー $i\in N$ に対して $f_i(v)=0$ が成り立つ．ここで，v において，i が null であるとは，すべての $S\subseteq N$ に対して $v(S)=v(S\setminus i)$ となることをいう．

null プレイヤーとは，どの提携に参加してもその利得を変化させないプレイヤーであり，この公理は，そのようなプレイヤーの利得は 0 とすること要求している．

【公理 S (symmetry)】 任意の $v\in\mathcal{G}^N$ と任意の置換 $\pi\in\Pi^N$ に対して，$f_{\pi(i)}(\pi v)=f_i(v)$, $i\in N$ が成り立つ．ここで，$S\subseteq N$ に対して，$\pi S=\{\pi(i)\,|\,i\in S\}$ とすると，πv は，$\pi v(\pi S)=v(S)$ で定義されるゲームである．

この公理は，ゲーム v において，同じ働きをするプレイヤーは同じ利得を得ることを要求している．

Shapley 値は以上の四つの公理を満たし，さらに，これらをすべて満たすゲームの値は Shapley 値のみである．

【定理 1】 Shapley 値は，公理 E, A, NP, S を満たす唯一のゲームの値である．

この公理系の十分性について簡単に述べる．ゲームの値 f が四つの公理を満たすと仮定すると，まず，公理 A から，v に対する利得ベクトルは $f(v)=\sum_{\emptyset\neq S\subseteq N}f(d_S(v)u_S)$ となる．つぎに，公理 NP から，$i\notin S$ に対して $f_i(d_S(v)u_S)=0$ となり，公理 S から，ある定数 α_S が存在して，$i\in S$ に対して $f_i(d_S(v)u_S)=\alpha_S$ となる．最後に，公理 E から，$\alpha_S=\dfrac{d_S(v)}{|S|}$ と定まる．したがって，f は Shapley 値である．

この証明からわかるように，加法性 (additivity) を公理に採用すると，満場一致ゲームの定数倍に対する値のみを定めるように残りの公理系を設計すればよいことになる．加法性は値を限定するうえで強力な公理であるが，ほかの公理と比べるとやや不自然に感じられるだろう．加法性を用いないものも含め，Shapley 値のほかの公理系については文献 [8,16] などを参照されたい．

3. 伝達構造を伴うゲーム

3.1 伝達構造を伴うゲームと Myerson 値

伝達構造は，プレイヤー集合 N を頂点集合とするグラフ (N,E) で与えられる．ただし，$E\subseteq\{\{i,j\}\,|\,i,j\in N, i\neq j\}$ は枝集合である．枝 $\{i,j\}$ が E に含まれることはプレイヤー i と j が協力できることを表している．伝達構造を伴うゲームは (N,v,E) で定義される．本稿では N を固定して考え，伝達構造をその枝集合と同一視する．枝集合の全体を $\mathcal{E}^N$ で表す．伝達構造を伴うゲームを議論するために，(単純）路，(単純）閉路，連結などの，グラフ理論における基本的な概念 [12] を用いる．

伝達構造を伴うゲーム (N,v,E) では，グラフ (N,E) において連結な提携 $S\subseteq N$ が実行可能であると定義される．この定義は，たとえ $i,j\in S$ が直接の協力関係をもたなくても，S のほかメンバーの仲介があれば，i と j は協力できるという考えに基づいている．実行可能（つまり連結）な提携の集合を $\mathcal{F}_E$ で表す．

Myerson[14] は，伝達構造を伴うゲームから，制限ゲームとよばれる提携形ゲームを定義した．(N,v,E) の制限ゲーム $v^E\in\mathcal{G}^N$ は以下のように定義される．各 $S\subseteq N$ に対して，

$$v^E(S)=\sum_{T\in C_{\mathcal{F}_E}(S)}v(T) \tag{4}$$

ここで，$C_{\mathcal{F}_E}(S)$ は，S に含まれ，かつ，包含関係に関して極大な $\mathcal{F}_E$ の要素の集合である．つまり，S の提携値は，S の含まれる実行可能な極大集合の提携値の和によって与える．

$C_{\mathcal{F}_E}(S)$ は S の分割となるため，各提携 $T\in C_{\mathcal{F}_E}(S)$ は独立に行動できることに注意する．一般に，実行可能な提携の集合 $\mathcal{F}$ とそれを伴うゲームが与えられたとき，任意の $S\subseteq N$ に対して，$C_{\mathcal{F}}(S)$ の要素が互いに共通部分をもたないなら，(4) 式と同様に制限ゲームを定義できる．そのための必要十分条件は $\mathcal{F}$ が弱和閉集合族 [1] となることである [5]．

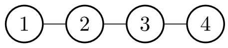
伝達構造を伴うゲーム (N,v,E) に対する Myerson 値

[1] $S,T\in\mathcal{F}$ かつ $S\cap T\neq\emptyset$ ならば $S\cup T\in\mathcal{F}$ となる．

$\mu(v,E)$ は制限ゲーム v^E の Shapley 値によって定義される [14]．すなわち，

$$\mu(v,E)=\phi(v^E) \tag{5}$$

【例題 5】　**例題 3** のプレイヤー間に第 1 図のような直線の伝達構造があるとする．その枝集合は $E=\{12,23,34\}$ となる．実行可能提携の集合は $\mathcal{F}_E=\{1,2,3,4,12,23,34,123,234,1234\}$ となり，制限ゲーム v^E における勝利提携は 34,123,134,234,1234 となる．プレイヤー 3 はすべての勝利提携に含まれているため，3 のいない提携は必ず敗北提携となる．このようなプレイヤーは拒否権 (veto) をもつという．



第 1 図　伝達構造

例題 3 の Shapley 値を求めると，$\phi(v)=\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ であるが，この例の Myerson 値は，$\mu(v,E)=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{7}{12},\frac{1}{4}\right)$ となる．**例題 3** では，プレイヤー 1,3,4 は同じ影響力をもつが，第 1 図の伝達構造を考慮すると，拒否権をもつプレイヤー 3 の影響力が最も大きくなり，3 と直接協力して提携を形成できる 4 がつぎに大きい影響力をもつ．プレイヤー 1 は 2 の仲介がないと 3 と提携を形成できないので，4 と比較して影響力が小さい．**例題 3** では 2 は null プレイヤーであったが，この例では勝利提携の形成に貢献することができる．

3.2　Myerson 値の公理系

本節では Myerson 値の公理系を解説する．Myerson[14] による公平性 (fairness) を用いた公理系が有名だが，ここでは，閉路をもたない伝達構造を伴うゲームに対する，Borm ら [6] の加法性 (additivity) を用いた公理系を紹介する．$f:\mathcal{G}^N\times\mathcal{E}^N\to\mathbb{R}^N$ を伝達構造を伴うゲームの値とする．つぎの四つの公理を導入する．

【公理 CE (component-efficiency)】　任意の $(v,E)\in\mathcal{G}^N\times\mathcal{E}^N$ と $S\in C_{\mathcal{F}_E}(N)$ に対して $\sum_{i\in S}f_i(v,E)=v(S)$ が成立する．

この公理は，各極大実行可能提携 S に対して，そのメンバーの利得の合計が $v(S)$ と一致することを要求している．つまり，最終的に提携構造 $C_{\mathcal{F}_E}(N)$ が形成されると仮定して，各提携 $S\in C_{\mathcal{F}_E}(N)$ について，その利得が過不足なくそのメンバーに分けられることを意味する．

【公理 A (additivity)】　任意の $(v,E),(w,E)\in\mathcal{G}^N\times\mathcal{E}^N$ に対して $f(v+w,E)=f(v,E)+f(w,E)$ が成立する．

【公理 SA (superfluous-arc property)】　任意の $(v,E)\in\mathcal{G}^N\times\mathcal{E}^N$ と superfluous となる $e\in E$ に対して $f(v,E)=f(v,E\setminus\{e\})$ が成立する．ここで，$e\in E$ が superfluous であるとは，任意の $A\subseteq E$ に対して，$v^A(N)=v^{A\cup\{e\}}(N)$ となることをいう．

枝 $e\in E$ が superfluous であるとは，すべての部分グラフ $A\subseteq E$ について，e が全体提携の利得に影響しないことをいう．この公理では，superfluous な枝は利得ベクトルに影響しないことを要求している．

【公理 CA (communication-ability property)】　任意の point anonymous となるゲーム $(v,E)\in\mathcal{G}^N\times\mathcal{E}^N$ に対して，ある $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在して，

$$f_i(v,E)=\begin{cases}\alpha, & \text{if } i\in N(E)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{6}$$

が成立する．ここで，$N(E)=\bigcup_{ij\in E}\{i,j\}$ であり，伝達構造を伴うゲーム (v,E) が point anonymous であるとは，ある関数 $h:\{0,1,\ldots,|N(E)|\}\to\mathbb{R}$ が存在して，$v^E(S)=h(|S\cap N(E)|)$ となることをいう．

この公理では，少なくとも 1 人のプレイヤーと協力関係をもつ（つまり伝達が可能な）プレイヤー集合を $N(E)$ と定義し，制限ゲームが $N(E)$ に関して対称なゲームとなるならば，$N(E)$ のメンバーの利得はすべて等しく，それ以外の利得は 0 となることが要求される．

Myerson 値は上記の四つの公理を満たす．閉路を含まない伝達構造に限定すると，この四つの公理によって，値が一意に定まる．

【定理 2】　非閉路伝達構造を伴うゲームに対して，Myerson 値は公理 CE, A, SA, CA を満たす唯一の値である．

Myerson 値とは異なる値として，Borm ら [6] は position 値を提案しており，その公理的特徴づけもなされている [6,19]．また，Herings ら [11] は非閉路伝達構造を伴うゲームに対して，平均木解 (average tree solution) を提案し，その公理的特徴づけを行った．伝達構造の一般化である弱和閉集合族を伴うゲームについては [2–5] で研究されている．

4.　許可構造を伴うゲーム

4.1　許可構造を伴うゲームと許可値

許可構造はプレイヤーを頂点とする有向グラフ (N,D) で与えられる．ただし，$D\subseteq\{(i,j)\mid i,j\in N,i\neq j\}$ は有向枝の集合である．有向枝 (i,j) が D に含まれることは，プレイヤー j が行動するためにはプレイヤー i の許可が必要であることを表している．許可構造を伴うゲームを (N,v,D) で表す．本稿では N を固定して考え，許可構造をその枝集合と同一視する．有向枝の全体を $\mathcal{D}^N$ で表す．**3.1** と同様に，許可構造を伴うゲームを議論するために，（単純）有向路，（単純）有向閉路などの，グラフ理論における基本的な概念を用いる．$\hat{D}$ を D の推移的閉包とする．つまり，$i,j\in N$ に対して，i から j への (N,D) における有向路が存在するとき，$(i,j)\in\hat{D}$ となる．

許可構造 (N,D) において，$(i,j)\in D$ $((i,j)\in\hat{D})$ となるとき，i を j の上位 (間接的上位) プレイヤーとよび，j

を i の下位 (間接的下位) プレイヤーとよぶ．i の上位と下位プレイヤーの集合をそれぞれ $\Gamma_D^-(i)$ と $\Gamma_D^+(i)$ で表し，i の間接的上位と間接的下位プレイヤーの集合をそれぞれ $\hat{\Gamma}_D^-(i)$ と $\hat{\Gamma}_D^+(i)$ で表す．

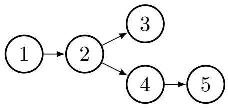
さて，伝達構造のときと同様に，許可構造を伴うゲームにおける実行可能な提携を定義する．実行可能の定義に対して，連言的 (conjunctive) と選言的 (disjunctive) の二つのアプローチ [8,24] があるが，本稿では連言的アプローチのみを述べる．連言的アプローチでは，ある提携が実行可能となるためには，そのメンバーの上位プレイヤーすべてがその提携に参加する必要があると仮定する．したがって，許可構造を (N,D) とすると，実行可能な提携の集合は $\mathcal{F}_D=\{S\subseteq N \mid \Gamma_D^-(i)\subseteq S, \forall i\in S\}$ と定義される [24]．$\mathcal{F}_D$ は和集合と共通集合に関して閉じていることがわかる．各 $S\subseteq N$ に対して，S に包含される最大の実行可能提携を $\bar{S}$ とすると，(N,v,D) に対する制限ゲーム v^D は以下のように定義される．各 $S\subseteq N$ に対して，

$$v^D(S)=v(\bar{S}) \tag{7}$$

許可構造を伴うゲーム (N,v,D) に対する（連言的）許可値 $\rho(v,D)$ は制限ゲーム v^D の Shapley 値によって定義される．

$$\rho(v,D)=\phi(v^D) \tag{8}$$

【例題 6】　$N=12345$，$a=(1,2,3,3,4)$ とし，各 $S\subseteq N$ に対して，提携値を $v(S)=\sum_{i\in S}a_i$ で与える．プレイヤー間に第 2 図のような根付き木の許可構造 $D=\{(1,2),(2,3),(2,4),(4,5)\}$ があるとする．実行可能提携の集合は $\mathcal{F}_D=\{1,12,123,124,1234,1245,12345\}$ となる．この例は tree-connected peer group situation[7] とよばれる．



第 2 図　許可構造

制限がない場合，Shapley 値は $\phi(v)=a=(1,2,3,3,4)$ となる．許可値 $\rho(v,D)$ を求める．制限ゲーム v^D の Harsanyi 係数は，$S\in\{1,12,123,124,1245\}$ に対しては，$d_1=1$, $d_{12}=2$, $d_{123}=3$, $d_{124}=3$, $d_{1245}=4$, それ以外の提携 S では $d_S=0$ となるため，許可値は $\rho(v,D)=(5,4,1,2,1)$ となる．許可構造を考慮することで上位のプレイヤーに利得が集中することがわかる．

4.2　許可値の公理系

van den Brink ら [26] によって提案された許可値の公理系を解説する．$f:\mathcal{G}^N\times\mathcal{D}^N\to\mathbb{R}^N$ を許可構造を伴うゲームの値とする．任意の $S,T\subseteq N$ に対して，$S\subseteq T$ ならば $v(S)\leq v(T)$ となるゲーム v を単調とよび，単調なゲームの全体集合を $\mathcal{G}_M^N$ で表す．

【公理 E (efficiency)】　任意の $(v,D)\in\mathcal{G}^N\times\mathcal{D}^N$ に対して $\sum_{i\in N}f_i(v,D)=v(N)$ が成立する．

【公理 A (additivity)】　任意の $(v,D),(w,D)\in\mathcal{G}^N\times\mathcal{D}^N$ に対して $f(v+w,D)=f(v,D)+f(w,D)$ となる．

【公理 IP (inessential player property)】　任意の $(v,D)\in\mathcal{G}^N\times\mathcal{D}^N$ に対して，$i\in N$ が (v,D) において inessential であるならば，$f_i(v,D)=0$ となる．ここで，$i\in N$ が (v,D) において inessential であるとは，$\{i\}\cup\hat{\Gamma}_D^+(i)$ に含まれるすべてのプレイヤーが null であることをいう．

この公理は，自身も含めて i の間接的下位プレイヤーがすべて null ならば，i の利得は 0 となることを要求している．

【公理 NP (necessary player property)】　任意の $(v,D)\in\mathcal{G}_M^N\times\mathcal{D}^N$ に対して，$i\in N$ が v において necessary であるならば，すべての $j\in N$ に対して $f_i(v,D)\geq f_j(v,D)$ となる．ここで，$i\in N$ が v において necessary であるとは，すべての $S\subseteq N\setminus\{i\}$ に対して，$v(S)=0$ となることをいう．

この公理は，単調ゲームにおいて，i を含まない提携の利得がすべて 0 であるならば，i の利得はほかのプレイヤーの利得以上になることを要求している．

【公理 SM (structural monotonicity)】　任意の $(v,D)\in\mathcal{G}_M^N\times\mathcal{D}^N$ と $i,j\in N$ に対して，$j\in\Gamma_D^+(i)$ であるならば，$f_i(v,D)\geq f_j(v,D)$ となる．

この公理は，単調ゲームにおいて，各プレイヤーの利得はその間接的下位の利得以上となることを要求している．

許可値 ρ はこの五つの公理を満たし，これらの公理を満たす値は許可値のみとなる．

【定理 3】　許可構造を伴うゲームに対して，許可値は公理 E, A, IP, NP, SM を満たす唯一の解である．

有向閉路をもたず，$\Gamma_D^+(i_0)=N\setminus\{i_0\}$ となるプレイヤー $i_0\in N$ が存在する許可構造 D を階層的 (hierarchical) という．階層的許可構造を伴うゲームに対する連言的許可値と選言的許可値の公理系はそれぞれ [23] と [22] で提案されている．根付き木となる許可構造を許可木 (permission tree) というが，許可木を伴うゲームに対する許可値の公理系は [25] にある．また，Algaba ら [1] は許可値の公理系をもとに，アンチマトロイド (antimatroid) を伴うゲームの公理系を提案した．許可構造を伴うゲームとその応用に関するサーベイとして文献 [24] を紹介する．

5.　おわりに

本稿では，提携に制限のあるゲームの紹介として，伝達構造と許可構造を伴うゲームとそれらの値を解説した．ここでは，Shapley 値型の解のみを述べたが，当然，ほ

かの種類の解も研究されている．とくに，Grabisch は文献 [10] でコアに関する研究をまとめている．伝達構造や許可構造以外のプレイヤー間の協力構造については，文献 [5,10] を参照されたい．本稿をきっかけに協力ゲーム的なモデリングと分析にご興味をもたれれば幸いである．

(2017 年 9 月 11 日受付)

参 考 文 献

[1] E. Algaba, J. M. Bilbao, R. van den Brink and A. Jiménez-Losada: Axiomatizations of the Shapley value for cooperative games on antimatroids; *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 57, No. 1, pp.49–65 (2003)

[2] E. Algaba, J. M. Bilbao, P. Borm and J. J. López: The position value for union stable systems; *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 52, No. 2, pp. 221–236 (2000)

[3] E. Algaba, J. M. Bilbao, P. Borm and J. J. López: The Myerson value for union stable structures; *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 54, No. 3, pp. 359–371 (2001)

[4] E. Algaba, J. M. Bilbao, R. van den Brink and J. J. López: The Myerson value and superfluous supports in union stable systems; *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 155, No. 2, pp. 650–668 (2012)

[5] J. M. Bilbao: *Cooperative Games on Combinatorial Structures*, Kluwer Academic Publishers (2000)

[6] P. Borm, G. Owen and S. Tijs: On the position value for communication situations; *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 5, No. 3, pp. 305–320 (1992)

[7] R. Brânzei, V. Fragnelli and S. Tijs: Tree-connected peer group situations and peer group games; *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 55, No. 1, pp. 93–106 (2002)

[8] R. P. Gilles: *The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies*, Springer Berlin Heidelberg (2010)

[9] R. P. Gilles, G. Owen and R. van den Brink: Games with permission structures: The conjunctive approach; *International Journal of Game Theory*, Vol. 20, No. 3, pp. 277–293 (1992)

[10] M. Grabisch: The core of games on ordered structures and graphs; *Annals of Operations Research*, Vol. 204, No. 1, pp. 33–64 (2013)

[11] P. J. J. Herings, G. van der Laan and D. Talman: The average tree solution for cycle-free graph games; *Games and Economic Behavior*, Vol. 62, No. 1, pp. 77–92 (2008)

[12] 茨木・永持・石井: グラフ理論, 朝倉書店 (2010)

[13] S. C. Littlechild and G. Owen: A simple expression for the Shapley value in a special case; *Management Science*, Vol. 20, No. 3, pp. 370–372 (1973)

[14] R. B. Myerson: Graphs and cooperation in games; *Mathematics of Operations Research*, Vol 2, No. 3, pp. 225–229 (1977)

[15] F. Patrone, I. García-Jurado and S. Tijs (eds.): *Game Practice: Contributions from Applied Game Theory*, Kluwer Academic Publishers (2000)

[16] B. Peleg and P. Sudhölter: *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Kluwer Academic Publishers (2003)

[17] L. S. Shapley: A value for n-person games; H. Kuhn and A. W. Tucker (eds.) *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 2, pp. 307–317, Princeton University Press (1953)

[18] L. S. Shapley and M. Shubik: Pure competition, coalitional power, and fair division; *International Economic Review*, Vol. 10, No. 3, pp. 337–362 (1969)

[19] M. Slikker: A characterization of the position value; *International Journal of Game Theory*, Vol. 33, No. 4, pp. 505–514 (2005)

[20] P. D. Straffin: Power and stability in politics: R. J. Aumann and S. Hart (eds.) *Handbook of Game Theory*, Vol. 2, pp. 1127–1151, Elsevier Science B.V. (1994)

[21] 鈴木: 新ゲーム理論, 勁草書房 (1994)

[22] R. van den Brink: An axiomatization of the disjunctive permission value for games with a permission structure; *International Journal of Game Theory*, Vol. 26, No. 1, pp. 27–43 (1997)

[23] R. van den Brink: An axiomatization of the conjunctive permission value for games with a hierarchical permission structure; H. de Swart (ed.) *Logic, Game Theory and Social Choice*, pp. 125–139 (1999)

[24] R. van den Brink: Games with a permission structure - A survey on generalizations and applications; *TOP*, Vol. 25, No. 1, pp. 1–33 (2017)

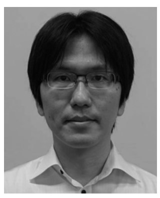
[25] R. van den Brink, C. Dietz, G. van der Laan and G. Xu: Comparable characterizations of four solutions for permission tree games; *Economic Theory*, Vol 63, No. 4, pp. 903–923 (2017)

[26] R. van den Brink and R. P. Gilles: Axiomatizations of the conjunctive permission value for games with permission structures; *Games and Economic Behavior*, Vol. 12, No. 1, pp. 113–126 (1996)

[27] H. P. Young: Cost allocation; R. J. Aumann and S. Hart (eds.) *Handbook of Game Theory*, Vol. 2, pp. 1193–1235, Elsevier Science B.V. (1994)

著 者 略 歴

楠木 祥文 (くすのき よしふみ) (正会員)



1983 年 2 月 13 日生．2010 年 3 月大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻博士課程修了．同年 4 月大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻助教となり現在に至る．協力ゲーム理論，機械学習などの研究に従事．オペレーションズ・リサーチ学会，計測自動制御学会，日本知能情報ファジィ学会などの会員．