

モデル選択の評価規準に予測平方和 (PSS) を用いる改良形 GMDH[†]

田村 坦之*・近藤 正*

Revised GMDH Algorithm Using Prediction Sum of Squares (PSS) as
a Criterion for Model Selection

Hiroyuki TAMURA* and Tadashi KONDO*

In this paper a revised GMDH (Group Method of Data Handling) algorithm is developed in which we do not require to divide available data into two groups; training data and checking data. In this algorithm, all the data can be used not only as the training data but as the checking data, that is, the Prediction Sum of Squares (PSS) calculated from all the data is used as a criterion for selecting intermediate variables and for stopping the multi-layered calculation. Therefore, the identified results do not depend on the heuristics of dividing the data into two groups. Furthermore, the revised GMDH developed in this paper automatically generates optimal partial polynomials in each selection layer. The revised GMDH, therefore, has flexibility much better than that of the basic GMDH in constructing a complete polynomial. The revised GMDH algorithm is applied to a simple illustrative example and compared with the result obtained by the basic GMDH algorithm.

1. ま え が き

近年、システムの入出力データをもとにして、複雑なシステムのモデル化を行う一手法として GMDH (Group Method of Data Handling)^{1)~5)} が注目されている。これまでに提案されている GMDH では、原データをトレーニングデータとチェックングデータの2組に分割し、トレーニングデータを用いて部分表現式に含まれるパラメータの推定を行い、チェックングデータを用いて中間変数の自己選択および多層構造の層の打ち切りを行っている。このように、分割された2組

のデータを用いる場合、部分表現式を積み重ねて構成されるシステムの完全表現式は、原データの分割方法あるいは分割の割合によって大きく異なる可能性がある。さらに、原データ全体の情報を一度に有効に使用できないため、原データの全体に対して一様によくあてはまる完全表現式を構成することができない。重回帰分析では、予測式を構成する説明変数の選択の評価規準として、予測平方和 (Prediction Sum of Squares, PSS), 2乗平均予測誤差 (Mean Square Error of Prediction, MSEF), 情報量規準 AIC などを用いることが提案されている^{6),7)}。GMDH のアルゴリズムにおいて、最適な部分表現式の自己選択^{3)~5)}、中間変数の自己選択、多層構造の層の打ち切りなどにこれらの評価規準を用いると、原データの分割を行わずに、すべてのデータを用いて予測誤差を評価し、これを最小にするモデルの構造とパラメータを見つけ出す改良形 GMDH を構成することができる。

本論文では、予測平方和 (PSS) を用いる改良形 GMDH のアルゴリズムを議論する。そして、この改良形 GMDH を簡単な同定問題に適用し、Basic GMDH によって得られた結果と比較することによりその有効性を確かめる。

2. Basic GMDH

システムの完全表現式として、Kolmogorov-Gabor の多項式

$$\phi = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j + \dots \quad (1)$$

を想定する。このシステムの部分表現式として、2変数の2次多項式

$$y_1 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2 \quad (2)$$

を用いる GMDH を Basic GMDH^{1),2)} と呼ぶ。この Basic GMDH では、

† 第21回日本自動制御協会学術講演会で発表 (昭52・5)

* 大阪大学工学部 吹田市字山田上

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received November 2, 1977)

(i) 構成されるシステムの完全表現式に含まれる変数が非常に多くなる。

(ii) 部分表現式を構成する際に, ill-condition を起す組合せが数多く発生し, これらの組合せを選択することができない。

(iii) 少ない通過層で完全表現式の次数が大きくなるため, 多数の入力変数を含み, しかも, 比較的次數の低い多項式で表されるシステムは同定できない。

といったかすかすの欠点を含んでいる。

3. 予測平方和 (PSS) を用いた改良形 GMDH

予測平方和 (Prediction Sum of Squares, PSS)⁶⁾ は次式によって定義される。

$$PSS = \sum_{\alpha=1}^n (z_{\alpha} - \hat{z}_{\alpha}^*)^2 \quad (3)$$

ただし,

$$\hat{z}^* = b_{0\alpha} + \sum_{i=1}^m b_{i\alpha} x_i, \quad \alpha=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

ここで, n はデータの個数, z_{α} は目的変数の α 番目の観測値, \hat{z}_{α}^* は α 番目のデータを除いた $(n-1)$ 組のデータを用いて得られる重回帰式 (4) から計算される z_{α} の回帰推定値である。(4) 式の偏回帰係数 $b_{i\alpha}$ ($i=1, 2, \dots, m$) は α に依存しているため, PSS を求めるためには, n 重回帰分析を繰返す必要がある。このため, データの個数 n が大きくなると, 計算量が大幅に増加する。しかし, 奥野氏らが (3), (4) 式を代数的に変換することによって導出したつぎの (5), (6) 式を用いると, n 組のすべてのデータを用いて

重回帰分析を1度行うだけで (3) 式と同値の PSS を計算することができる。

$$PSS = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{z_{\alpha} - \hat{z}_{\alpha}}{1 - \mathbf{x}_{\alpha}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_{\alpha}} \right)^2 \quad (5)$$

ただし,

$$\hat{z} = b_0 + \sum_{i=1}^m b_i x_i \quad (6)$$

$$\mathbf{x}_{\alpha}^T = (1, x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, \dots, x_{m\alpha}), \quad \alpha=1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{X}^T = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$$

ここで, \hat{z}_{α} は n 組のすべてのデータを用いて得られる重回帰式 (6) から計算される z_{α} の回帰推定値である。(5) 式を用いることにより, データの個数 n が大きくなった場合にも少ない計算量で PSS を計算することができる。PSS を用いた改良形 GMDH のアルゴリズムは, つぎの三つの部分によって構成することができる。ここで, データは n 個あるものとする。

3.1 最適な部分表現式の自己選択

部分表現式に含まれる変数の組合せを選択する場合, $x_i, x_j, x_i \cdot x_j, x_i^2, x_j^2$ の5変数の31通りの組合せが考えられる。ここでは, この中で予測誤差を最も小さくする組合せを選択するための規準として PSS を用いる。

(2) 式に, PSS を用いた変数の逐次選択法を適用し, 最適な部分表現式を自己選択する。変数の逐次選択法としては変数増減法⁶⁾を用いる。

まず, (2) 式に対応した正規方程式,

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{B} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (7)$$

から, つぎの行列

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{Y}^T \mathbf{X} & \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} & \mathbf{0}^T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} \sum_{\alpha=1}^n 1 & \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha} & \dots & \sum_{\alpha=1}^n x_{j\alpha}^2 & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} & \\ \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha}^2 & \dots & \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha} x_{j\alpha}^2 & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} x_{i\alpha} & \\ \sum_{\alpha=1}^n x_{j\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n x_{j\alpha} x_{i\alpha} & \dots & \sum_{\alpha=1}^n x_{j\alpha}^3 & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} x_{j\alpha} & \\ \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha} x_{j\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha}^2 x_{j\alpha} & \dots & \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha} x_{j\alpha}^3 & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} x_{i\alpha} x_{j\alpha} & \\ \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha}^2 & \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha}^3 & \dots & \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha}^2 x_{j\alpha}^2 & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} x_{i\alpha}^2 & \\ \sum_{\alpha=1}^n x_{j\alpha}^2 & \sum_{\alpha=1}^n x_{j\alpha}^2 x_{i\alpha} & \dots & \sum_{\alpha=1}^n x_{j\alpha}^4 & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} x_{j\alpha}^2 & \\ \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} x_{i\alpha} & \dots & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} x_{j\alpha}^2 & \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha}^2 & \end{array} \right] \mathbf{I} \quad (8)$$

を作る。ただし, $\mathbf{B} = [b_0, b_1, \dots, b_5]^T$ は未知パラメータからなる6次元ベクトル, \mathbf{Y} は原データの出力変数からなる n 次元ベクトル, \mathbf{X} は $(n \times 6)$ の計画行列で

ある。行列 (8) の第7行は残差平方和 (Residual Sum of Squares, RSS) を計算するためにつけ加えたものである。行列 (8) を用いて変数増減法を行う。たとえ

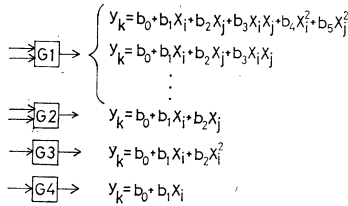


Fig. 1 Generators of intermediate variables

ば、(2)式の m 番目の変数を部分表現式の中に取り込む場合には、行列(8)に Gauss-Jordan の消去法を適用し、第 m 列目の非対角要素を消去する。逆に m 番目の変数を部分表現式の外に取出す場合には、第 $(m+7)$ 列目の非対角要素を Gauss-Jordan の消去法を用いて消去する。これらの操作を交互に繰返して、PSSを最も小さくする変数を逐次部分表現式の中に取り込む。そして、PSSを最小にする変数の組合せを選択し最適な部分表現式を構成する。Fig. 1に、このようにして構成される部分表現式と4種類の間変数の発生器を示す。間変数の発生器 G1, G2 では二つの変数の組合せが行われ、G1, G3 では次数の増加が行われる。G4は前層と同じ間変数を発生する。

3.2 間変数の自己選択

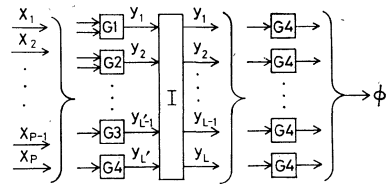
自己選択された最適な部分表現式によって発生される間変数に対して、PSSの値の小さいものを L 個自己選択する。ここで、各選択層では PSS の値が減少する間変数のみを発生しているため、間変数の選択個数 L はなるべく大きくとることが望ましい。また、各選択層では、部分表現式の自己選択を行っているため、いくつかの層を通過すると、出力変数に対してある程度の説明能力をもち、出力変数と類似した特性をもった間変数が現れはじめる。これにより、同一の間変数が発生する割合が高くなり、異なった特性をもつ間変数の個数が次第に減少してくる。この場合、同一の間変数は一つのみを考慮する。この操作を続けると、変数の組合せおよび次数の増加が次第に行われなくなり、これに伴って発生器 G4 の個数が増加してくる。

3.3 多層構造の層の打ち切り

各選択層において、自己選択された部分表現式の発生器がすべて G4 になったとき層の積重ねを打ち切る。これは、さらに層を通過させても変数の組合せおよび次数の増加が行われず、同一の間変数を発生し、PSSの値が改善されなくなるためである。

3.4 予測値の計算

システムの完全表現式は、最終層に残った間変数



I : Self-selection of intermediate variables
G1, G2, G3 : Generators of the optimal partial polynomials

Fig. 2 Block diagram of the revised GMDH

の個数だけ構成することができる。このため、予測値はこれらの完全表現式によって計算される値の重みつき平均値として求める。最終層に残った i 番目の中間変数に対する重み w_i は、

$$w_i = \frac{1/PSS_i}{\sum_{j=1}^l 1/PSS_j} \quad (i=1, 2, \dots, l) \quad (9)$$

によって計算する。ここで、 l は最終層に残った中間変数の個数、 PSS_i は i 番目の中間変数に対する PSS の値を表している。ここで、最終層に残った l 個の完全表現式を用いて予測を行うときに、 l 個の予測値のバラッキ具合を調べることににより、従来の GMDH で問題となっていた異常な予測値を検出することが可能となり、このような予測値を除去することにより安定な予測を行うことができる。

以上によって構成される改良形 GMDH のブロック図を Fig. 2 に示す。従来の GMDH では、原データの分割比、間変数の選択個数などのしきい値を含んでおり、これらの値の最適化を行うためにかなりの量の繰返し計算を必要とした。改良形 GMDH では、これらのしきい値を含まないため、繰返し計算を行う必要はない。

Table 1 Input data in the interpolation points

| No. | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | ϕ |
|-----|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1 | 0.0 | 0.0 | 5.0 | 5.0 | 4.4 |
| 2 | 1.0 | 3.0 | 1.0 | 4.0 | 2.6 |
| 3 | 2.0 | 5.0 | 4.0 | 3.0 | 13.0 |
| 4 | 3.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 4.4 |
| 5 | 4.0 | 0.0 | 3.0 | 1.0 | 4.4 |
| 6 | 5.0 | 4.0 | 2.0 | 0.0 | 9.6 |
| 7 | 0.0 | 5.0 | 4.0 | 1.0 | 10.2 |
| 8 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 2.0 | 1.0 |
| 9 | 2.0 | 0.0 | 5.0 | 3.0 | 6.2 |
| 10 | 3.0 | 2.0 | 0.0 | 4.0 | 1.7 |
| 11 | 4.0 | 5.0 | 4.0 | 5.0 | 16.0 |
| 12 | 5.0 | 3.0 | 1.0 | 4.0 | 5.8 |
| 13 | 0.0 | 0.0 | 3.0 | 3.0 | 1.7 |

Table 2 Input data in the prediction points

| No. | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | ϕ |
|-----|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1 | 1.0 | 1.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 |
| 2 | 2.0 | 5.0 | 3.0 | 1.0 | 10.2 |
| 3 | 3.0 | 4.0 | 1.0 | 0.0 | 5.3 |
| 4 | 4.0 | 0.0 | 4.0 | 1.0 | 6.2 |
| 5 | 5.0 | 3.0 | 0.0 | 2.0 | 4.0 |
| 6 | 0.0 | 5.0 | 5.0 | 3.0 | 13.0 |
| 7 | 1.0 | 2.0 | 1.0 | 4.0 | 1.7 |
| 8 | 2.0 | 0.0 | 4.0 | 5.0 | 4.4 |
| 9 | 3.0 | 4.0 | 2.0 | 4.0 | 7.3 |
| 10 | 4.0 | 5.0 | 3.0 | 3.0 | 13.0 |

4. 簡単な同定問題への適用

入出力関係は次式で表されるものとする。

$$\phi = (0.1 + 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3)^2 \quad (10)$$

入力変数として, $x_1 \sim x_4$ の4変数を用いる。同定に用いる入力データとして, Table 1 に示す13個のデータを用いる。同定されたモデルの評価を行うために, Table 2 に示す10個のデータを用いる。まず初めに, Basic GMDH による数値実験結果を示す。

〈Basic GMDH〉

・中間変数

チェックングデータに対する2乗平均誤差が小さい変数を4個選択する。

・補間点

Table 1 の13個のデータを用いる。トレーニングデータとチェックングデータの分割比は7:6とし、分割の方法によりつぎの二つの場合を考える。

Case 1: トレーニングデータ 1~7 番目のデータ

チェックングデータ 8~13 番目のデータ

Case 2: トレーニングデータ 奇数番目のデータ

チェックングデータ 偶数番目のデータ

・同定された予測式

Case 1: 通過層は1層

$$y_1 = 4.277 + 0.762x_1 - 3.386x_2 + 0.239x_1x_2 - 0.161x_1^2 + 0.900x_2^2$$

ここで, 通過層の数を増すことによってモデルが複雑になる度合いを示すために, Case 1' として2層まで計算した予測式を示す。

Case 1': 通過層は2層

$$z_1 = 1.100 - 1.301y_3 + 2.025y_4 - 0.226y_3y_4 + 0.273y_3^2 - 0.068y_4^2$$

$$y_3 = -13.80 + 2.642x_2 + 9.713x_3 - 0.605x_2x_3 + 0.195x_2^2 - 1.214x_3^2$$

$$y_4 = -3.847 - 1.929x_1 + 9.115x_3 + 0.177x_1x_3$$

Table 3 Change of mean square error in the interpolation points

(a) Case 1, 1'

| | 1-st layer | 2-nd layer |
|---------------|------------|-----------------------|
| Training data | 0.335 | 8.57×10^{-7} |
| Checking data | 2.37 | 40.7 |

(b) Case 2

| | 1-st layer | 2-nd layer |
|---------------|------------|-----------------------|
| Training data | 3.22 | 7.32×10^{-2} |
| Checking data | 60.7 | 4.06×10^4 |

$$+ 0.241x_1^2 - 1.423x_3^2$$

Case 2: 通過層は1層

$$y_1 = 18.74 + 3.929x_1 - 9.910x_4 + 1.089x_1x_4 - 1.619x_1^2 + 1.409x_4^2$$

・予測式に含まれる変数

Case 1: $x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2, x_2^2$

Case 1': $x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2, x_1x_2x_3^2, x_1x_2^2x_3, x_1x_3^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1^2x_2x_3, x_1^2x_2^2, x_1^2x_3^2, x_1^4, x_1^3, x_1^3x_3, x_2x_3^2, x_2^2x_3, x_2x_3^3, x_2^2x_3^2, x_2^4, x_2^3, x_2^3x_3, x_3^3, x_3^4$

Case 2: $x_1, x_1^2, x_4, x_1x_4, x_4^2$

ここで, アンダーラインをつけた変数は真のモデル(10)式に含まれている変数を示す。Case 1 と Case 1' の結果を比べることにより, Basic GMDH では通過層を重ねると予測式が非常に複雑になることがわかる。Case 2 の予測式は(10)式とはまったく異なったものになっている。

・補間点における精度

Case 1, 1': トレーニングデータとチェックングデータに対する2乗平均誤差を Table 3(a) に示す。

Case 2: 同様に Table 3(b) に示す。

Table 3(a) より, 予測式のトレーニングデータへのあてはまりは非常に良いが, チェックングデータへのあてはまりは非常に悪いことがわかる。Table 3(b) より, Case 2 では同定が正しく行われていないことがわかる。

・予測点における精度

Table 2 の10個のデータに対する予測結果を示す。予測精度は次式によって評価する。

$$J = \left(\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left| \frac{\phi_i - \hat{\phi}_i}{\phi_i} \right| \right) \times 100 \quad (11)$$

$\hat{\phi}_i$: 予測値

Table 4 Changes of RSS and PSS

| | 1-st layer | 2-nd layer | 3-rd layer | 4-th layer | 5-th layer |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| RSS/13 | 1.29 | 0.642 | 0.450 | 0.450 | 0.450 |
| PSS/13 | 2.26 | 1.00 | 0.689 | 0.574 | 0.574 |

Case 1: J=30%

Case 1': J=129%

Case 2: J=175%

○ 計算時間

Case 1: 0.4 秒/層

Case 2: 0.3 秒/層

つぎに改良形 GMDH による数値実験結果を示す。

〈改良形 GMDH〉

○ 中間変数

PSS の値の小さい変数を 4 個選択する。

○ 補間点

Table 1 の 13 個のデータを用いる。

○ 同定された予測式

最終層に残った中間変数は 2 個である。

予測式 1 重み $w_1=0.520$

$$v_1 = -0.080 + 0.571z_1 + 0.442z_2$$

$$z_1 = -0.534 + 0.932y_1 + 0.060y_2y_4 - 0.033y_2^2$$

$$z_2 = -0.935 + 0.868y_1 + 0.282y_4$$

$$y_1 = 4.171 - 3.632x_2 + 0.258x_1x_2 + 0.973x_2^2$$

$$y_2 = 0.237 + 0.996x_3 + 0.365x_2^2$$

$$y_4 = 1.198 + 0.960x_3 + 0.461x_1x_3$$

予測式 2 重み $w_2=0.480$

$$v_2 = -0.113 + 0.707z_1 + 0.311z_4$$

$$z_1 = -0.534 + 0.932y_1 + 0.060y_2y_4 - 0.033y_2^2$$

$$z_4 = 0.000 + 1.000y_1$$

$$y_1 = 4.171 - 3.632x_2 + 0.258x_1x_2 + 0.973x_2^2$$

$$y_2 = 0.237 + 0.996x_3 + 0.365x_2^2$$

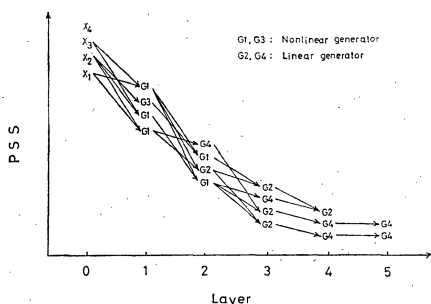


Fig. 3 Combinations of intermediate variables in each selection layer

$$y_4 = 1.198 + 0.960x_3 + 0.461x_1x_3$$

○ 予測式に含まれる変数

$$\underline{x_2}, \underline{x_3}, \underline{x_2^2}, \underline{x_3^2}, \underline{x_1x_2}, \underline{x_1x_3}, \underline{x_1x_3^2}, \underline{x_2^2x_3}, \underline{x_1x_2^2x_3}, \underline{x_2^4}$$

○ 補間点における精度

トレーニングデータに対する 2 乗平均誤差 (RSS/13)

と PSS の値 (PSS/13) を Table 4 に示す。Table

4 より RSS と PSS の差は層を重ねるごとに小さくなっていくことがわかる。

○ 予測点における精度

Table 2 の 10 個のデータに対する予測結果を示す。

予測精度は (11) 式によって評価する。

$$J=10.8\%$$

○ 各選択層における中間変数の組合せ

Fig. 3 に各選択層における中間変数の組合せを示す。通過層が多くなると、線形の発生器 (G2, G4) が増加していくことがわかる。計算は第 5 層まで行っている。

○ 計算時間

1.4 秒/層

以上の数値実験結果よりつぎのことが明らかになった。

(1) Case 1 と Case 1' の結果から明らかなように、Basic GMDH では、通過層を重ねると予測式が非常に複雑になる。また、Case 1 と Case 2 の結果より、データの分割方法が異なると得られる予測式はまったく異なる。Case 2 ではトレーニングデータとして奇数番目のデータのみしか使用できないため、データに含まれている情報を有効に使用できず、予測式としてまったく誤った結果を得ている。また、Basic GMDH では、トレーニングデータに対するあてはまりは非常に良いが、チェックデータに対するあてはまりは非常に悪いことがわかる。

(2) 改良形 GMDH では、5 層を通過しているにもかかわらず、予測式はあまり複雑になっていない。さらに、データの全体に対して一様に良い精度が得られている。予測精度は Basic GMDH と比べて大幅に改善されている。

5. む す び

原データの分割を行わずに、すべてのデータを用いてモデルの予測誤差を評価し、これを最小にするモデルの構造とパラメータを決定する改良形 GMDH を提案し、Basic GMDH との比較を行うことにより、つぎのような有効性を確かめることができた。

(1) 原データの分割を必要としないため、分割の差異による完全表現式の構造の差異が生じない。また、原データに対してすべての情報を有効に使用でき、原データの全体に対して一様な精度をもつ完全表現式を構成することができる。

(2) 各選択層で最適な部分表現式を自己選択するため、完全表現式が不必要に複雑化されたり、数値的に不安定に陥ったりすることを防止することができる。また、同定できるシステムの範囲は広がっている。

(3) 原データの分割比、中間変数の選択個数などのしきい値を含まないため、最適なしきい値をみつけるための繰返し計算を必要としない。

改良形 GMDH における 1 層あたりの計算量は Basic GMDH の約 4 倍を必要とするが、繰返し計算を必要としないので全計算量は Basic GMDH とほぼ同等と考えられる。

参 考 文 献

- 1) A. G. Ivakhnenko: Polynomial Theory of Complex Systems, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, **SMC-1**, 364/378 (1971)
- 2) A. G. Ivakhnenko, et al.: Group Handling of Data in Identification of the Static Characteristic of a Multi-Extremal Plant, Soviet Automatic Control, **14**, 30/37 (1969)
- 3) J. Duffy and M. Franklin: A Learning Identification Algorithm and Its Application to an Environmental System, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, **SMC-5**, 226/240 (1975)
- 4) 遠藤明男, 畑中 浩: GMDH による非線形制御系の同定, 制御理論シンポジウム資料, 93/98 (1974)
- 5) 田村坦之, 近藤 正: 部分表現式の次数を自己選択する改良形 GMDH とその広域大気汚染濃度パターンの同定への応用, 計測自動制御学会論文集, **13-4**, 39/45 (1977)
- 6) 奥野忠一ほか: 統多変量解析法, 日科技連 (1976)
- 7) 赤池弘次: 情報量規準 AIC とは何か, 数理科学, **14-3**, 5/11 (1976)