

搜索理論とその応用

宝崎 隆祐*

1. はじめに

搜索理論 [1] とは、搜索対象物（以下、目標という）をいかに効率的に発見するかの理論である。搜索理論の重要な適用分野として、遭難した人や航空機、船舶等を発見するための搜索救難活動がある。多国間での協同救難活動で使用される搜索救難マニュアル [2] が国際民間航空機関 (ICAO) と国際海事機関 (IMO) により制作されているが、そこに記載される数々の指標の基礎概念は搜索理論から提供されたものである。

搜索理論は、第二次世界大戦の大西洋における海上輸送に大打撃を与えたドイツの U ボートに対し、米海軍が対潜水艦戦（対潜戦という）の効果的な実施を模索する過程で、当時英国から輸入した作戦研究としてのオペレーションズ・リサーチ (OR) を対潜戦に応用し発展させた実学的理論である。この活動に参加したクーブマンが著したのが『搜索と直衛』（直衛とは船団護衛を表す）[3] であり、OR のバイブルとなったモース、キンボールの『OR の方法』[4] が書かれた二次大戦直後の同じ時期に著され、搜索理論の出発点となった。

OR の中で最適資源配分問題 [5] は有名な研究分野であるが、その嚆矢となったのがクーブマンの戦後の研究 [6] であった。彼が出発点としたのが、後にクーブマン問題とよばれる次の問題である。一次元実数値空間 $R = (-\infty, \infty)$ 上での目標の存在確率分布が $\{p(x), x \in R\}$ で与えられている。ここに全体で Φ の量の搜索資源を任意に分割して投入する。 $x \in R$ に目標がいた場合、そこに投入した密度 y の資源により目標を探知する確率は $1 - \exp(-\alpha(x)y)$ である。パラメータ $\alpha(x)$ は、位置 x における単位資源密度の探知効率の指数であり、大きいほど資源の探知効果が高い。このときの目標探知確率を最大にする資源配分密度 $\{\varphi(x), x \in R\}$ を問う問題がクーブマン問題である。 $\varphi(x)$ は点 $x \in R$ に投入する資源密度である。この問題はつぎのように定式化できる。

$$\begin{aligned} \max_{\varphi} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \{1 - \exp(-\alpha(x)\varphi(x))\} dx \quad (1) \\ \text{s.t.} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \Phi, \quad \varphi(x) \geq 0, x \in R \quad (2) \end{aligned}$$

(1) 式は全体の目標探知確率であり、(2) 式は投入資源に関する総量制約と非負性を表している。これは最適な関数 $\{\varphi^*(x)\}$ を求める簡単な変分問題であり、答えは次式で与えられる。

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \left[\log \frac{\alpha(x)p(x)}{\lambda} \right]^+ \quad (3)$$

ただし、 $[f(x)]^+ \equiv \max\{0, f(x)\}$ であり、係数 λ は制約 (2) の等式制約から一意に決まる。現在では、最適資源配分問題に対する解法は最適化手法とよばれる手法群の一つと見なされる [7]。

つぎに、搜索理論とゲーム理論の出会いによる搜索ゲームについて言及したい。クーブマン問題を思い返していただきたい。そこでは、目標の存在分布 $\{p(x), x \in R\}$ は与えられた情報として扱われていたが、目標が潜水艦であれば、搜索者とは相反する利害関係をもつ意思決定者として、みずからの存在分布 $p(x)$ を決定する立場にある。ゲーム理論 [8,9] は複数の意思決定者の合理的な意思決定と問題の帰結を推測・分析する学問であり、当初、目標の存在をパラメータとして搜索者の合理的な搜索要領を議論していた搜索理論でも、目標の意思決定も考慮する搜索ゲームへの理論展開がなされた。実際には、その簡単なケースの言及が『搜索と直衛』ですでになされていたが、本格的な議論は 1960 年代に入ってからである [10]。以上で、搜索理論と搜索ゲームに関するまえがきの説明を終わることにする。

上述した搜索救難はもとより、近年における日本の環境では、搜索理論に対するニーズは災害対処やセキュリティ対策、国防にあるように思われる。そこで、近頃は災害対処への活用が期待されているドローン、あるいは無人航空機 (Unmanned Aerial Vehicle, UAV) の経路決定と密輸船対処への搜索理論の応用例を以下で紹介する。

2. UAV の最適経路決定問題

数理的な UAV の経路決定では、整数計画 (IP) 問題による解法と動的計画法 (DP) によるものがある [11,12]。前者は、定式化において複雑な目的関数は設定できないが、近年の洗練された離散最適化解法アルゴリズムのおかげで相当大きなサイズの問題まで解くことができる。一方の DP による解法では、漸化式を用いた逐次計算がや

* 防衛大学校 電気情報学群 情報工学科

Key Words: search theory, game theory, UAV, smuggling.

や重いものの、複雑な目的関数まで扱うことができ、それぞれに一長一短がある。

いくつかの移動シナリオが想定される目標の発見確率を最大にするための UAV の飛行経路を求める問題を、整数計画問題に定式化して解く方法では、複数 UAV の任務飛行領域を離散セルに分割するとともに、時間軸も各時点が時間 Δ の幅をもつように離散化し、各時点における各 UAV の位置を 0-1 変数 x_{uat} で表す。 $x_{uat}=1$ は UAV u が時点 t にセル a を飛行することを表し、そうでなければ $x_{uat}=0$ である。UAV 利用の搜索では、搭載された CCD カメラの視覚情報による発見を目指すことが通例かと思われる。ある環境の中で CCD カメラのようなセンサによる目標発見を定式化する第 1 歩として、搜索理論では有効搜索幅という概念を使う。有効搜索幅 w をもつセンサは、目標と距離 $w/2$ 以内で行き会えばこれを必ず探知し、それ以後では決して探知しないとする理想的センサに対応させられるが、有効搜索幅の計算方法は搜索理論で与えられている。さまざまな環境下でのセンサと目標の組合せに対応する現実的な有効搜索幅は実験によって得られ、上述した国際的な搜索救難マニュアルにも記載されている。センサを搭載した搜索者による搜索法にはさまざまなものがあり、最も簡単なものとしてランダム搜索とよばれるものがある [1]。ランダム搜索では、搜索者が搜索区域内をランダムに移動して搜索する。搜索理論によれば、面積 A の領域内を有効搜索幅 w のセンサをもつ搜索者が速度 v で搜索時間 τ のランダム搜索を行えば、目標を確率 $1 - \exp(-\tau vw/A)$ で探知できる。セル a の面積を A_a とし、UAV u の速度とセル a での有効搜索幅を v_u , w_{ua} とする。また、シナリオ s に従って移動する目標は、時点 t でセル a を時間 $\tau_{sat}\Delta$ を掛けて通り抜けるとすれば、飛行時間内における目標の探知確率は次式で表される。ただし、シナリオ s の確実度（確率）を $q(s)$ とした。

$$1 - \sum_s q(s) \exp \left(- \sum_u \sum_a \sum_t \frac{\tau_{sat} \Delta v_u w_{ua}}{A_a} x_{uat} \right)$$

これが目的関数である。制約条件としては、個々の UAV はある時点では一カ所にしか飛行できないとする制約 $\sum_a x_{uat}=1$ ($\forall u, t$) のように、0-1 変数に必須の条件以外にもさまざまな式が必要とされ、それらの詳細を述べることはできない。特定の UAV を 1 対 1 で制御を行う陸上制御ユニット (GCU) や全 GCU とのデータ通信を行う主制御ユニット (MCC) がある大規模 UAV システムを対象とする場合、たとえば、各 UAV の稼働時間、空間機動性、複数 UAV 間の衝突防止、複数 GCU の配置可能地域、GCU 間の干渉予防、通信可能範囲、MCC の配置可能地域、その通信可能範囲といった制約条件のほか、UAV の搜索セルをできるだけ変更させないように変更発生によるペナルティを目的関数に組み込んだりす

る。また、複数シナリオの重み $\{q(s)\}$ は目標探知失敗の結果からベイズの定理により時々刻々更新する。第 1 図は、この問題を解いて求めた飛行経路上を 1 機の UAV を飛ばした場合のある時点でのシミュレーション画面であり、目標とした車両をうまく上空から捉えている。



第 1 図 UAV が目標を捉えたシミュレーション画像

DP による定式化においては複雑な評価尺度を用いることができるが、ここでは航空機からの搜索活動でよく使用される逆 3 乗発見法則に基づく視認度を採用する [1]。それは、救命筏などの目標の発見のしやすさは、見張員の目に対して張る目標の立体角に比例することを利用したものである。立体角は、見張員の視線に対する垂直面に射影した目標物体の面積 (A) を目標までの距離 (ℓ) の自乗で割った A/ℓ^2 により定義される値で、物理学ではお馴染みの値である。この定義を使うと、二次元平面上で面積 S をもつ目標を、水平距離 r 離れた高度 h の航空機から見る見張員からの立体角は $Sh/(r^2+h^2)^{3/2}$ となり、直線距離 $\sqrt{r^2+h^2}$ の 3 乗に反比例する。これが上記の発見法則の名称の由来である。この基本式のほかに目標視認に影響する要素として、目標位置の視程（環境係数）や山その他の障害物により目標が見えるか（可視性）があり、これらを掛け合わせたものを視認度と定義する。以下では、ルート上での視認度の総和を最大とする UAV の飛行ルートを DP により求めよう。

ここでも、時間を離散時点空間 T で、1 機の UAV の飛行ルートを設定するためのネットワークをノード集合 N 、アーク集合 A で表す。UAV の出発ノードを S 、帰投ノードを E とする。ただし、ノード $i \in N$ の座標を v_i 、時点数 1 を要して i から移動可能なノード群を $N(i)$ とする。このネットワークと関係なく、地上平面上を移動する目標がシナリオ s をとる確率を $q(s)$ 、時点 t での位置を $p_s(t)$ 、面積を $A_s(t)$ とする。目標が、車から徒歩といったように形態を変え、面積が変化するかもしれないからである。位置 r での環境係数を $\alpha(r)$ 、位置 r を高度 h で飛ぶ UAV が、時刻 t にシナリオ s を移動中で位置 $p_s(t)$ にいる目標を可視できるかできないか（1 か 0 の値）の可視性 $\delta_s(r, h, t)$ は計算幾何学により計算する。ノード i, j 間の飛行所要時点数 n_{ij} や、その各時点 $k = \{1, \dots, n_{ij}\}$ での飛行位置 $v_{ij}(k)$ はノード i, j 間で

の内挿法により計算できる。以上を考慮して、地点 \mathbf{r} の高度 h の UAV から、時刻 τ の目標の期待視認度は、

$$E(\mathbf{r}, h, \tau) = \sum_s q(s) \frac{\alpha(\mathbf{r}) \delta_s(\mathbf{r}, h, \tau) A_s(\tau) h}{(\|\mathbf{r} - \mathbf{p}_s(\tau)\|^2 + h^2)^{3/2}} \quad (4)$$

で評価できる。また、ノード i, j 間でノード i を時点 z_i に出発して以降 k 時点経過後の期待視認度は次式となる。

$$D_k^{ij}(z_i, h) = E(v_{ij}(k), h, z_i + k) \quad (5)$$

以上の計算式のほか、UAV が停止せずにノード j へ到達する最短飛行時間 F_j と、ノード j を出発後の帰投ノード E までの最短飛行時間 M_j を、最短経路法により計算しておく。以上の準備のもとに DP による定式化を行うため、UAV が時点 t にノード j を出発する場合、それまでの最適なスケジュールにより得られるその出発までの最大総期待視認度を $f_j(t)$ で表す。最終的に $f_E(t)$ ($F_E \leq t \leq T$) を求めるのが目的であり、この値が計算されればそれを実現する最適飛行ルートも得られる。動的計画法による定式化は、ノード j での最適値 $f_j(t)$ と隣接ノード i での値 $f_i(\cdot)$ を関連づける漸化式で表現され、この関係を使った逐次計算により $f_E(t)$ を求める。

$$f_j(t) = \max_{i \in N(j)} \max_{F_i \leq z \leq t - n_{ij} - 1} \left[f_i(z) + \sum_{k=1}^{n_{ij}} D_k^{ij}(z, h) + \sum_{\tau=z+n_{ij}+1}^t E(v_j, h, \tau) \right], \quad t = F_j, F_j + 1, \dots, T - M_j, j \in V \quad (6)$$

$$f_j(t) = \max_{i \in N(j), \text{変針制約}} \left[f_i(t - n_{ij} - 1) + \sum_{k=1}^{n_{ij}} D_k^{ij}(t - n_{ij} - 1, h) \right], \quad t = F_j, F_j + 1, \dots, T - M_j, j \in V \quad (7)$$

初期値： $f_S(t) = 0, t = 1, \dots, T - M_S$

(6) 式が同じ場所にホバリングできる回転翼 UAV の場合の漸化式で、最適飛行ルートとともに、いつノード j を通過すべきかのスケジュールも同時に得られる。式中 [] 内の第 2 項はノード i, j 間飛行中の視認度、第 3 項はノード j でホバリング中での視認度を表す。(7) 式が固定翼 UAV の場合で、飛行ルートのみ求まるが、ノード j への隣接ノードからの飛来には最小旋回径といった変針制約が課される。実際の計算では、これらの漸化式の利用法によりさまざまな解法アルゴリズムが作成できるが、最短経路問題でお馴染みのダイクストラ法的計算も十分現実的である。もちろん、シナリオのもっともらしさ $\{q(s)\}$ も時々刻々見直した方がよい。

上の説明では、一つの移動目標の搜索任務に UAV を活用することを念頭に置いたが、何らかの目標位置情報を得た後の目標情報収集・監視任務にこの手法を転用することも容易である。

3. 密輸取締ゲーム

ここでは、目標が密輸船で、搜索者が税関などの密輸取締機関である搜索ゲームを紹介する。実は、密輸取締ゲームとよばれる OR の研究分野がすでにあり、そこでは、ある日に密輸をするかどうかの密輸者の意思決定と、経費を掛けて取締りに出掛けるかどうかの取締機関の合理的な選択を議論する多段階ゲームによるモデルが数多く提案されている [13]。その起源は、軍縮条約や核不拡散条約 (NPT) の条約国に対する効果的な査察実施を目的とした 1960 年代から始まった研究 [14] にある。今回は、それとは異なり、密輸船の密輸ルートや取締側の監視航空機のスケジュールを合理的に決定できるモデルで、搜索ゲームに分類されるモデル [15] を紹介する。紹介の前に、ゲームにおける解とはなにか、また理論的な解の導出方法について簡単に概説する。

ゲームの問題は、大きく非協力ゲームと協力ゲームに分類される。非協力ゲームでは、参加者であるプレイヤーはそれぞれが自分の評価尺度で意思決定する。評価尺度を利得 (支払) といい、自らの利得を最大にするように複数の純粋戦略から一つの戦略を選択して行動する。ゲームに参加する意思決定者であるプレイヤーの集合を $N = \{1, \dots, n\}$ 、プレイヤー $i \in N$ の戦略の集合を S_i で、また全プレイヤーの戦略の組 $\mathbf{s} = \{s_i \in S_i, i \in N\}$ に対するプレイヤー i の利得 (支払) を $R_i(\mathbf{s})$ としよう。ゲームの解の一つに均衡解とよばれるものがある。 $\mathbf{s}^* = \{s_j^*, j \in N\}$ が均衡解であるとは、任意のプレイヤー $i \in N$ の任意の戦略 s_i に対し、

$$R_i(\mathbf{s}^*) \geq R_i(\{s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*\})$$

が成り立つことである。このとき、どのプレイヤー i も、1 人だけ戦略をどのように変えても自分の利得は大きくならないから、均衡解の戦略 s_i^* を変える動機のない状態となっていて、 s_i^* をプレイヤー i の最適戦略という。

非協力ゲームの中で最もシンプルなモデルが 2 人ゼロ和ゲームである。プレイヤーは 2 人で、2 人の利得を足せばゼロである。したがって、自らの利得を大きくすることは相手の利得を小さくすることであるから、両プレイヤーの利害は完全に相反する。2 人ゼロ和ゲームでは $R_2(s_1, s_2) = -R_1(s_1, s_2)$ であるから、一般に $R_1(s_1, s_2)$ を共通の支払とする。プレイヤー 1 はこれを最大にしたいプレイヤーなのでマキシマイザーといい、プレイヤー 2 は支払を最小にしたいミニマイザーである。端的に 2 人ゼロ和ゲームの均衡解を求めたければ、まず、一般的に成立する次の不等式で等式が成り立つことを確認する。

$$\max_{s_1} \min_{s_2} R_1(s_1, s_2) \leq \min_{s_2} \max_{s_1} R_1(s_1, s_2) \quad (8)$$

等式が成立すれば、それを実現する s_1^* と s_2^* が均衡解である。成立しなければ、戦略を混合戦略に広げる。混合戦略とは純粋戦略を確率的に採ることであり、たとえ

ば、プレイヤー i の純粋戦略の集合が $S_i = \{s_1^i, \dots, s_{m_i}^i\}$ であれば、戦略 s_k^i を確率 π_k^i でとるとする。混合戦略 $\pi^i = \{\pi_k^i, k=1, \dots, m_i\}$ では $\sum_{k=1}^{m_i} \pi_k^i = 1$, $\pi_k^i \geq 0$ を満たす任意の設定が可能である。このとき、プレイヤーの評価尺度は混合戦略による支払の期待値（期待支払という）

$$R_1(\pi^1, \pi^2) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \pi_i^1 R(s_i^1, s_j^2) \pi_j^2$$

となる。プレイヤー 1 はこれを最大に、プレイヤー 2 は最小にするように混合戦略をとる。(8) 式で等式が成立しなければ、混合戦略を用いた等式

$$\max_{\pi^1} \min_{\pi^2} R_1(\pi^1, \pi^2) = \min_{\pi^2} \max_{\pi^1} R_1(\pi^1, \pi^2) \quad (9)$$

をチェックするが、実は両プレイヤーが混合戦略をとる場合はこの等式は必ず成立し、プレイヤー 1 の最適戦略は (9) 式の左辺のマックスミニ最適化問題の最適解 π^{*1} により、プレイヤー 2 の最適戦略は右辺のミニマックス最適化問題の最適解 π^{*2} により得られる。以上のように両プレイヤーの混合戦略のペアに対する期待支払ではなく、ともに純粋戦略、あるいは一方が純粋戦略、もう片方が混合戦略のペアに対する期待支払が上式のような等式を満たせば、そこで均衡解が見つかったことになる。

つぎに、密輸取締ゲームを説明しよう。密輸船は、密輸品の積卸し港から荷揚げ港までの海上ルートを選択する。一方の取締側は、監視航空機を運用でき、限られた運用時間（搜索資源）を各海域に分割して監視を行う。また、密輸船発見後に、その臨検や立ち入り調査を行うための一隻の取締船を海上に待機させる。まず、この問題を次の前提によりモデル化しよう。

- A1. 搜索の地理空間を離散セル空間 $K = \{1, \dots, K\}$ 、搜索時間空間も離散時点集合 $T = \{1, \dots, T\}$ とする。
- A2. 密輸船は、地理空間上で選択可能なパス全体 Ω から一つのパスを選択して移動する。パス $\omega \in \Omega$ の時点 $t \in T$ での位置はセル $\omega(t)$ である。
- A3. 取締側は、まず取締船を位置 $z \in K$ に待機させる。また、搜索は時点 τ_0 以降の時間帯 $\hat{T} \equiv \{\tau_0, \dots, T\}$ でしか実施できず、各時点 t での資源総量 $\Phi(t)$ を各セルに分割・投入して密輸船を探知しようと図る。密輸船を探知した場合、探知時点 t 、密輸船位置 j および取締船の待機位置 z に依存した確率 $C_t(z, j)$ （条件付き捕捉確率とよぶ）で密輸船を捕捉できる。
- A4. 密輸船探知は、各時間での密輸船存在セルに搜索資源投入をした場合にのみ発生し、時点 t でセル i に存在する密輸船に対する搜索資源量 x の投入による探知確率は、次式で与えられる。

$$1 - \exp(-\alpha_i x) \quad (10)$$

パラメータ α_i は単位搜索資源の探知効率を示す。

- A5. 取締側と密輸船は搜索活動の実施前にその戦略を決定するが、取締船の待機位置 z は密輸船側にも知られる。支払を密輸船の捕捉確率とする。取締側はこれを大きく、密輸船は小さくするように行動する。

以上の 2 人ゼロ和ゲームに対し、プレイヤーの戦略を定義し、支払の式を求める。まず、取締側の純粋戦略として、取締船の位置を $z \in K$ で、搜索資源配分計画を $\varphi = \{\varphi(i, t), i \in K, t \in \hat{T}\}$ で表す。 $\varphi(i, t)$ は、時点 t 、セル i への搜索資源投入量である。密輸船の純粋戦略は 1 本のパス $\omega \in \Omega$ を選択することであるが、ここでは混合戦略 $\pi = \{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$ を考える。 $\pi(\omega)$ はパス $\omega \in \Omega$ を選択する確率である。

密輸船がパス ω を選択した場合、各時点での密輸船存在セルへの投入資源量を考えることにより、 $[\tau_0, t]$ 間での探知確率は、

$$P_t(\varphi; \omega) = 1 - \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^t \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau)\right) \quad (11)$$

で与えられる。したがって、 $P_{\tau_0-1}(\varphi, \omega) = 0$ の約束のもと、時点 $t \in \hat{T}$ での探知は確率 $P_t(\varphi, \omega) - P_{t-1}(\varphi, \omega)$ で起こり得て、このとき、時点 t 、密輸船位置 $\omega(t)$ および取締船位置 z による確率 $C_t(z, \omega(t))$ で捕捉できる。したがって、全搜索時間 \hat{T} での捕捉確率 $R(z, \varphi; \omega)$ は、

$$\begin{aligned} R(z, \varphi; \omega) &= \sum_{t=\tau_0}^T (P_t(\varphi, \omega) - P_{t-1}(\varphi, \omega)) C_t(z, \omega(t)) \\ &= \sum_{t=\tau_0}^T P_t(\varphi, \omega) \delta_t(z, \omega) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ただし、 $\delta_t(z, \omega)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \delta_t(z, \omega) &\equiv \begin{cases} C_t(z, \omega(t)) - C_{t+1}(z, \omega(t+1)), & t = \tau_0, \dots, T-1 \\ C_T(z, \omega(T)), & t = T \end{cases} \end{aligned}$$

さらに、密輸船の混合戦略 π に関する期待支払は、次式で計算できる。

$$R(z, \varphi; \pi) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{t=\tau_0}^T P_t(\varphi, \omega) \delta_t(z, \omega)$$

関数 $P_t(\varphi, \omega)$ は変数 φ の凹関数であり、 $\delta_t(z, \omega)$ は区間 $[-1, 1]$ の実数値をとるから、 $R(z, \varphi; \omega)$ および $R(z, \varphi; \pi)$ は変数 φ の DC (difference of convex functions) 関数である。

以上でこのゲームの均衡解を求める準備ができた。(9) 式の左辺のように、期待支払 $R(z, \varphi; \pi)$ のマックスミニ最適化を行うことで取締側の最適戦略 φ^* が、ミニマックス最適化により密輸船の最適戦略 π^* が求められるが、通常の最適化問題と同じく、実際の解法ではそれぞれに工夫を要する。ここでは、途中の過程は省略して、最終

的な結果のみを記述する．取締船の位置 z は与えられたとし，取締側の最適資源投入戦略 φ^* はつぎの DC 計画問題を解くことで得られる．

$$\begin{aligned}
 P_S(z): \quad & \eta^*(z) = \max_{\eta, \varphi} \eta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in K} \varphi(i, t) \leq \Phi(t), t \in \hat{T}, \\
 & \varphi(i, t) \geq 0, i \in K, t \in \hat{T}, \\
 & \sum_{t=\tau_0}^T \delta_t(z, \omega) \\
 & \times \left\{ 1 - \exp \left(- \sum_{\tau=\tau_0}^t \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) \right) \right\} \geq \eta, \omega \in \Omega
 \end{aligned}$$

また，密輸船の最適戦略 π^* を求める定式化として次式のような線形計画問題が得られる．ただし，定式化中の φ^* は問題 $P_S(z)$ を解いて得た解である．また，記号 $\Omega_{it} = \{\omega | \omega(t) = i\}$ を使っている．

$$\begin{aligned}
 P_T(z): \quad & \min_{\pi, \lambda} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{t=\tau_0}^T \delta_t(z, \omega) \\
 & \times \left\{ 1 - \exp \left(- \sum_{\tau=\tau_0}^t \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) \right\} \\
 \text{s.t.} \quad & \varphi^*(i, t) > 0 \text{ なる } (i, t) \in K \times \hat{T} \text{ に対し,} \\
 & \alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \sum_{\xi=t}^T \delta_{\xi}(z, \omega) \\
 & \times \exp \left(- \sum_{\tau=\tau_0}^{\xi} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) = \lambda(t), \\
 & \varphi^*(i, t) = 0 \text{ なる } (i, t) \in K \times \hat{T} \text{ に対し,} \\
 & \alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \sum_{\xi=t}^T \delta_{\xi}(z, \omega) \\
 & \times \exp \left(- \sum_{\tau=\tau_0}^{\xi} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) \leq \lambda(t), \\
 & \lambda(t) \geq 0, t \in \hat{T}, \\
 & \sum_{i \in K} \varphi^*(i, t) < \Phi(t) \text{ なる } t \in \hat{T} \text{ に対し } \lambda(t) = 0, \\
 & \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1, \pi(\omega) \geq 0, \omega \in \Omega
 \end{aligned}$$

問題 $P_S(z)$ と $P_T(z)$ は同じ最適値 $\eta^*(z)$ をもち，この値をできるだけ大きくしたい取締側は，取締船の最適な待機位置 z^* を次式によって決める．

$$z^* = \operatorname{argmax}_{z \in K} \eta^*(z) \quad (13)$$

以上のような数理計画問題への定式化による解法以外にも，目標が現在の状況に応じて次の移動セルを確率的に決めるマルコフ移動を用いた解法があり，時間数によるパスの組合せ爆発的な増大を回避することができる．

以下では，現在でも盛んに麻薬の密輸が行われている

中米沖海域での密輸取締の数値例を取り上げる．時間空間は $T = \{1, \dots, 8\}$ で，第2図のように海域を16個のセルに分割する．密輸船は時点1でセル1または2を出航し，時点 $T=8$ までにメキシコ沿岸のセル13～16のいずれかに入港しようとする．密輸船は第2図の右上に描いた3方向にエネルギー1を消費して1セルずつ移動できる．初期エネルギー7があるとし，セル1から417本，セル2から486本の目標パス Ω がある．



第2図 中米沖海域での密輸監視海域

取締側は密輸船出航の情報を得て監視航空機を飛ばし，時点 $\tau_0=2$ から搜索を開始し，搜索時間 $\Phi(t)=1$ を分割して各海域の搜索に充てる．搜索時間に対する各セルの探知効率 α_i は，到着セル13～16ではゼロ，その他のセルでは0.5である．時点 t で探知した場合の条件付き捕捉確率 $C_t(z, j)$ は，残り時間内に待機セル z から探知場所まで取締船が到達できるか否かの1か0とする．ただし，取締船は1時点で1セルだけ移動できるとする．

(13) 式で決まる最適待機セルは $z^*=6, 7, 8$ のいずれかで，捕捉確率は0.352となる．第1表は，密輸船の最適なパス選択 π^* から求めた各時点，各セルでの密輸船存在確率 $p(i, t) = \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi^*(\omega)$ である．

第1表 最適な密輸船存在分布

セル	時 点						
	2	3	4	5	6	7	
1	.250	.167	.009	0	0	0	
2	.250	.167	.063	.007	0	0	
3	.250	.167	.122	.028	0	0	
4	.250	.167	.158	.088	.035	0	
5	0	.167	.148	.091	.037	0	
6	0	.167	.167	.143	.071	.071	
7	0	0	.167	.143	.071	0	
8	0	0	.103	.130	.071	.071	
9	0	0	0	.089	.071	0	
10	0	0	0	.063	.069	.130	
11	0	0	0	0	.068	0	
12	0	0	0	0	.035	.108	

第 2 表 最適な搜索資源配分

セル	時 点					
	2	3	4	5	6	7
1	.250	.048	0	0	0	0
2	.250	.048	0	0	0	0
3	.250	.048	0	0	0	0
4	.250	.104	0	0	0	0
5	0	.134	0	0	0	0
6	0	.619	.515	.571	.571	.571
7	0	0	.485	.429	.143	0
8	0	0	0	0	.143	.429
9	0	0	0	0	.143	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0

第 2 表は最適な搜索資源配分である。ただし、搜索が行われない時点 1 と密輸船が目的セルに入ってしまう時点 8、さらには目的セル 13~16 は省いている。

密輸船はできるだけ広範囲で均等な存在分布を心掛け、搜索資源の集中投入による効果的な搜索を防ごうとするものの、目的セル群への到達のため分布に偏りが生じる。取締側は比較的密輸船存在確率の高いセルへ資源投入を行うが、目的セルへの入口に位置するセル 6, 7, 8 が航空機による監視のための重要セルであることがわかる。これらのセルは、探知密輸船を遅い時点でも拿捕可能な取締船の重要待機セルでもあることが z^* の値からわかる。

4. おわりに

今回は、読者にはあまり馴染みがないと思われる搜索理論の概説を交えながら、その応用例として、UAV の経路決定法と密輸取締ゲームについて解説した。紙数の関係でここでは述べられなかったが、災害対策やインフラネットなどのネットワーク防護、さらには警備に対する搜索理論、ゲーム理論応用についてもいくつかの研究がある [16–18]。

謝 辞

本稿を寄稿する機会を与えてくださった新潟大学の山田修司先生に感謝申し上げます。

(2019 年 2 月 25 日受付)

参 考 文 献

- [1] 宝崎, 飯田: 搜索理論における確率モデル, コロナ社 (2019)
- [2] International Aeronautical and Maritime Search and Rescue Manual; Vol. 1~3, ICAO/IMO publications (2003)
- [3] B. O. Koopman: *Search and Screening*, Pergamon (1980) (原著: OEG Report, No.56, 1946)
- [4] P. Morse and G. Kimball: *Methods of Operations Re-*

search, Technology Press (1950) (原著: OEG Report, No. 54, 1946)

- [5] T. Ibaraki and N. Katoh: *Resource Allocation Problems: Algorithmic Approaches*, The MIT Press (1988)
- [6] B. O. Koopman: The theory of search III: the optimum distribution of searching effort; *Operations Research*, Vol. 5, pp. 613–626 (1957)
- [7] 宝崎: 搜索理論と最適化手法; 電子情報通信学会論文誌, Vol. J91-A, pp. 997–1005 (2008)
- [8] 西田: ゲームの理論, 日科技連 (1979)
- [9] 岡田: ゲーム理論 (新版), 有斐閣 (2011)
- [10] R. Hohzaki: Search games: Literature and Survey; *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 59, pp. 1–34 (2016)
- [11] M. Kress and J. O. Royset: Aerial search optimization model (ASOM) for UAV in special operation; *Military Operations Research*, Vol.13, pp. 23–33 (2008)
- [12] 中村: 運用環境に応じた無人航空機の経路決定法; 防衛大学校理工学研究科第 51 期修士論文 (2014)
- [13] R. Hohzaki: Inspection games; *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, John Wiley & Sons (Online-version), pp. 1–9 (2013)
- [14] M. Drescher: A sampling inspection problem in arms control agreements: A game-theoretic analysis; Memorandum RM-2972-ARPA, The RAND Corporation (1962)
- [15] 黒須, 宝崎, 佐久間, 鶴飼, 山田: 捕捉者のある搜索ゲーム; 第 61 回自動制御連合講演会 (2018)
- [16] 宝崎: 搜索救難における探索理論の役割; オペレーションズ・リサーチ, Vol. 56, No. 12, pp. 705–710 (2011)
- [17] 宝崎: 社会の安全とネットワーク阻止モデル; オペレーションズ・リサーチ, Vol. 60, No. 5, pp. 266–273 (2015)
- [18] 宝崎: ネットワークを考慮した警備ゲームのモデルあれこれ; オペレーションズ・リサーチ, Vol. 61, No. 4, pp. 226–233 (2016)

著 者 略 歴

ほう ぎき りゅう すけ
宝 崎 隆 祐



1955 年 1 月生。1978 年 3 月京都大学理学部物理学学科卒業。1978 年 4 月海上自衛隊入隊。1985 年 3 月防衛大学校理工学研究科修士課程修了, 1991 年 3 月神戸大学大学院自然科学研究科博士課程修了。1992 年 3 月防衛大学校講師, 2004 年 4 月防衛大学校教授となり, 現在に至る。オペレーションズ・リサーチ (OR), 搜索理論の研究に従事。学術博士 (神戸大学)。2001 年 3 月山崎賞受賞 (防衛大学校学術・教育振興会), 2002 年 6 月 The MOR Journal Award 受賞 (The Military Operations Research Society)。日本 OR 学会フェロー。日本 OR 学会, 電子情報通信学会, 情報処理学会の会員。