

# 多目的最適化手法

青木 洋一

多目的最適化というテーマで解説記事を書くことをお引受けし、いざ筆を執りながら随分うかつであったと反省している次第である。解説記事ではないが昨年の6月号の数理計画特集号で慶應大学の志水先生が「多目的システムにおける意志決定と最適化」について基礎となる理論を中心述べておいでになるので、本稿では利用する立場からの解説に重点を置いて話をすすめることとしたい。

私たちの日頃の分析業務で多目的最適化は一つ避けては通れない対象となっている。とくに減速成長、資源の有効利用、住民参加など多目的最適化の必要性は非常に高いと思われる。日頃数理計画にはなじみのうすい方にも興味をもっていただるために厳密性はあまり注意せずに話をすすめることとした。理論的基礎や、さらに進んだ内容は先の志水先生の記事もしくは末尾の引用文献などご覧いただきたい。

## 1. 多目的最適化とは

多目的最適化という言葉にはいろいろな意味が含まれている。文字どおりに解釈すれば、一つの計画が多用途の目的で立案実施される場合、これらの複数の目的をどのようにして最適達成するかという問題である。水利、発電、治水を目的とした多目的ダムはこの典型である。別の考え方としては、一つの目的をもった計画ないしはシステムに対して、システムの評価の基準が複数個あります。これらの複数の評価基準に照らしてシステムを最適化する場合である。たとえば航空輸送システムを考えれば、早いこと、安全性が高いこと、確実であることなどが評価基準になるといった具合である。この例でさらに考えると航空会社は利益を一つの評価関数とし、利用者は運賃の低廉さを評価関数とするように立場の異なる複数の主体がそれぞれいくつかの評価関数をもっている場合も考えられる。

このように多目的最適化は問題のとらえ方がいくつか

のタイプにわけられるが、数学的に記述すると後述するように、ベクトル評価関数をもつ制約条件のもとで最適化（何らかの意味で）するという問題に帰着されてしまう。

## 2. 例題

ここで簡単な多目的最適化の例となり得る例題を考えておく。(想定は相当簡略化しており実態は反映していないことをあらかじめお断りしておく。)以後の話はこの例題を引き合いに出しながらすすめていくものとする。

〔例題〕ある地域にバス以外の交通機関がなく、バス会社がバスを運行しその地域の人の便を供しているとしよう。バスの路線は片道  $L$  km で、この地域の利用者は 1 時間平均  $D$  人/時とし、1 日  $H$  時間運行されているものとする。運賃は均一で利用者数は運賃によらないと仮定し、運賃の話は最初から除いておく。

バス会社は(運賃収入は一定であるから)なるべく投資コストや、運営費が安くなるような運行をしようとするであろう。地域の人は(他の交通機関が無いので)運行頻度を高くしてもらうとかサービス向上を要求するであろう。地域の交通行政担当者は両者の間にはいって最適な解を見出さなければならない。

### (1) 決定変数

行政者が変数として動かし得るものとしてつぎの三つの変数を考える。

バスの運転間隔	$x_1$ (分)
バスの最高速度	$x_2$ (km/時)
バスの大きさ(定員)	$x_3$ (人/両)

ここで決定変数  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  がとり得る値の範囲が制約される。運転間隔は、あまり短くするとバスが連なってしまうので最少 1 分とする。また、運転間隔があまり間違ではサービスが悪くなるので最低 15 分に 1 回はバスが運転されるとしている。バスの最高速度は法令で 60 km/時、低公害化などいろいろな事情で最高速度を下げても

40km/時は確保できることにする。つぎにバスの大きさであるが、一般乗合バスであるからくらか小さくしても定員15人以上程度とし最大な車両の大きさの制約から100人としておこう。さらに乗車できる客の数は定員と運転間隔で制約をうける。すなわち定員の $c_1$ 倍以上は法律で輸送できないものとする。

$$\begin{aligned} 1 &\leq x_1 \leq 15 \\ 40 &\leq x_2 \leq 60 \\ 15 &\leq x_3 \leq 100 \\ D &\leq \frac{60}{x_1} \cdot x_3 \cdot c_1 \end{aligned} \quad (1)$$

決定変数  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  が値を取ることを許される  $l = 3$  次元空間内の上記領域を許容域  $T$  と書く。すなわち、

$$T = \left\{ x \mid 1 \leq x_1 \leq 15, 40 \leq x_2 \leq 60, 15 \leq x_3 \leq 100, \frac{x_3}{x_1} \geq \frac{D}{c_1 \times 60} \right\}$$

## (2) 利用者の評価関数

利用者は乗車時間を短く、なるべく待たずに、車内の混雑も少なく快適に目的地に行きたいと願望する。乗車時間の長短、待ち時間の長短、車内混雑度をそれぞれ、 $f_{p1}$ ,  $f_{p2}$ ,  $f_{p3}$  とする。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{乗車時間} & f_{p1}(x_1, x_2, x_3) \text{ (分)} \\ \text{待ち時間} & f_{p2}(x_1, x_2, x_3) \text{ (分)} \\ \text{混雑度} & f_{p3}(x_1, x_2, x_3) \text{ (定員に対する比率)} \end{aligned}$$

いま、 $f_{p1}$ ,  $f_{p2}$ ,  $f_{p3}$  はつぎのように書かれるものとする。

$$f_{p1}(x) = d / (x_2 \cdot c_2) \quad (2)$$

$$f_{p2}(x) = x_1 / 2 \quad (3)$$

$$f_{p3}(x) = D / (x_3 \times 60 / x_1) \quad (4)$$

ここで  $d$  は平均乗車距離、 $c_2$  は係数

## (3) 運営者の評価関数

バス会社の経営者は投資コストの低下と、維持運営費の低下を考える、すなわち運営者の評価関数はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \text{投資コスト} & f_{01}(x_1, x_2, x_3) \\ \text{維持運営コスト} & f_{02}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

投資コスト  $f_{01}$  はバスの購入代金のみを考え、しかもつぎのようにバスの大きさ  $x_3$  に比例して値段が高くなり、さらに最適速度が高くなるとそれに比例し原動機のコストが高くなり全体の値段も割り増しになるものとする。

$$\begin{aligned} f_{01} &= \left\{ \frac{B_{100} - B_{15}}{100 - 15} (x_3 - 15) + B_{15} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{M_{60} - M_{40}}{60 - 40} (x_2 - 40) + M_{40} \right\} \times n \quad (5) \end{aligned}$$

ここで  $n$  は必要バス台数で次式で計算できる。

$$n = \left( \frac{2L}{c_2 x_2} \right) \times (60 / x_1) \quad (6)$$

維持運営費は、バスの走行距離に比例してかかる燃料代と、バス台数に比例する人件費であらわされるものとしよう。すなわち、

$$\text{燃料代} = 2.0 \times L \times \frac{60}{x_1} \times H \times GAS \times 365 \quad (7)$$

$$\text{人件費} = n \times w \times c_L$$

$w$  : 年間 1 人当たり賃金 (円/人)

$c_L$  : 運転要員係数 (人/台)

$GAS$  : 車キロ当りガソリン代 (実は  $x_2$ ,  $x_3$  の関数)

よって、

$$\begin{aligned} f_{02} &= 2.0 \times L \times \frac{60}{x_1} \times H \times GAS \times 365 \\ &\quad + n \times w \times c_L \end{aligned} \quad (9)$$

以上で、利用者、運営者の評価関数がすべて用意できた。これらの評価関数をならべてベクトル評価関数として最適化の問題を定式化することもできるが、ここではひとまず効用関数なるものを考え、利用者、運営者の評価関数をそれぞれ一つの指標に統合化することから考えよう。

## 3. 効用関数

先の例でバスの利用者は、乗車時間、待ち時間、混雑度を評価基準とした。これらの量はバス利用に係る物理的指標でありこれを利用者が受けとめるときは、乗車による時間の負担や、待つ心理的負担、混雑に対する心理的肉体的負担であると考えられる。これらの負担を一つの尺度に統合するものが効用関数<sup>注1)</sup> (この場合は不効用) である。すなわち利用者がバスを利用することにより受けれる負担量は、効用関数  $u(\cdot)$  を用いて、スカラー値、すなわち、

$$u(f_{p1}(x), f_{p2}(x), f_{p3}(x))$$

に直すことができる<sup>注2)</sup>。

効用の加法性が成立すれば<sup>注3)</sup>

$$u(f) = u_1(f_1) + u_2(f_2) + u_3(f_3) \quad (10)$$

となり、さらに線形性を仮定すれば、

$$u(f) = w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3 \quad (11)$$

となる。実用的観点からは考えている問題状況の範囲を限り線形加法性をともかくも仮定し、不都合が生じた場合に直すというアプローチをすることをまず考える。

交通機関に関する利用者の選好に関してはある程度満足のいく結果が得られている[4][5]。

そこで利用者の評価関数はつぎのように一つの不効用値に統合されるでしょう。

$$f_1 = w_1 f_{p1} + w_2 f_{p2} + w_3 f_{p3} \quad (12)$$

つぎに運営者の評価関数の統合を考えよう。運営者は資本費  $f_{01}$  と、維持運営費  $f_{02}$  を評価関数として考えていた。幸いなことにこれらはいずれも金額という同一尺度ではかられる。資金が少なければ前者に重みを置くということも考えられるが、通常  $f_{01}$  を耐用年数など考慮し年間の費用に換算する方法がとられる注4)。

これにより運営者の評価関数はつぎのようになる。

$$f_2 = kf_{01} + f_{02} \quad (13)$$

いよいよこれで行政担当者は  $f_1, f_2$  であらわされる利用者、運営者の目的関数を見ながら最適な決定変数  $x \in T$  を見出さなければならない。ここに多目的最適化問題が立ち上がってくる。

#### 4. 多目的最適化

ここでは前項を受けて、まず多目的最適化問題の定式化を行ない、つぎに多目的最適化において重要な役割をはたす非劣解について説明する。

##### (1) 多目的最適化問題

(14)式で与えられるベクトル関数を(15)式の制約条件のもとで最適化する問題を多目的最適化問題とよぶ。

$$\min_x \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \quad (14)$$

$$g_k(x) \leq 0 \quad k=1, 2, \dots, m \quad (15)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  は決定変数ベクトル

$f_i(x), i=1, 2, \dots, n$  は目的関数、 $g_k(x), k=1, 2, \dots, m$  は制約条件式である。

バス会社の例では、目的関数、制約条件はつぎのとおりになっている。

目的関数  $f_1(x)$  : 利用者の不効用

$f_2(x)$  : 運営者の年間費用

制約条件  $1 \leq x_1 \leq 15$

$40 \leq x_2 \leq 60$

$15 \leq x_3 \leq 100$

$D \leq (60/x_1) \cdot x_3 \cdot c_1$

一般に目的関数が複数個存在する場合、それらを同時に最小化できる場合はほとんどないといえる。バス会社の例でも利用者を完全に満足させよう ( $x_1=1, x_2=60, x_3=100$ ) とすれば運営者は多大の投資と維持運営費を負担しなければならない、逆に運営者を完全に満足させよう ( $x_1=15, x_2=40, x_3=15$ ) とすれば利用者からの多大の苦情が出るが需要が輸送力を上まわるという結果になる。意志決定者はこれらの間に最適点を見出す必要がある。

##### (2) 非劣解(パレート解)

多目的最適化において非常に重要な概念である非劣解(パレート解)について説明する。非劣解とは、いずれの

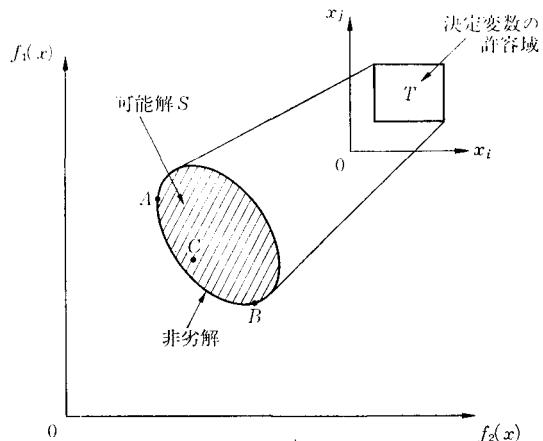


図 1 例題における非劣解

目的関数  $f_1, f_2, \dots, f_n$  の減少も、他の目的関数を増加されることなしには不可能な  $x \in T$  をいう。すなわち、非劣解は一般に唯一ではなくバス会社の例では図 1 に示すような集合(弧AB)となる。

$x^* \in T$  が非劣解  $\Leftrightarrow$  つぎなる  $x \in T$  が存在しない。

$$f_i(x) \leq f_i(x^*) \text{ and } f_i(x) < f_i(x^*) \text{ for some } i$$

##### (3) 選好解

意志決定者は図 1 の  $f_1-f_2$  平面の集合  $S$  の中から適当な点を選びそれに対応する決定変数  $x_1, x_2, x_3$  の値を求めるべき。利用者をもっとも満足させる点はAであり、運営者をもっとも満足させる点はBである。したがって弧AB上のいずれかの点を選び両者を納得させることが最適となる。ABの内側の点Cが選ばれることはないことは当然である。このような非劣解の中より意志決定者のもと別の基準により選ばれる解を選好解とよぶ。

#### 5. 多目的最適化の方法

ここではいくつかある多目的最適化の方法について簡単に述べることにする。

##### (1) 効用関数法

効用関数についてはすでに述べた。この例では利用者、運営者の目的関数を意志決定者がもっている効用関数によって1次元の尺度に変換する方法である。その場合多目的最適化は通常のスカラーの最適化となる。すなわち、

$$\min_{x \in T} \{u(f_1, f_2)\}$$

バス会社の例で考えてもわかるように、このような効用関数を求めるることはなかなかむずかしい話である。仮りに加法的な効用関数を考えるとした場合でも利用者の不効用1に対してバス会社の費用いくらとを等価と考える

か判断に迷うであろう。新幹線、高速道路などにおいて、利用者がこれらの施設を利用することにより従来より早く目的地に到着できることによる時間短縮効果を時間価値という重みで金額換算することなどは通常よく行なわれている。

### (2) Lexicographic 法

この方法では意志決定者がまず目的関数に順位づけを行ない、順位の高い目的関数から優先的に最適化をはかる。すなわち、 $f_1(x)$  がもっとも重要と考えた場合まず(16)式の最小化を行なう。

$$\min_{x \in T} f_1(x) \quad (16)$$

(16)式を満足する  $x \in T$  の集合を  $Y_1$  とする。すなわち、

$$Y_1 = \{x \mid \min_{x \in T} f_1(x)\} \quad (17)$$

つぎに 2 番目に重要な評価関数  $f_2(x)$  を  $x \in Y_1$  に関し最小化する。すなわち、

$$\min_{x \in Y_1} f_2(x) \quad (18)$$

この手続をこのような集合  $x \in T$  が 1 点となるまで続ける。個人は重要な評価基準から満足させていくとする行動をしばしばとるのでその場合に応用が可能である。バス会社の例では  $f_1$  をもっとも重要とすれば解がただちに定まるがこれでは運営者が満足しない。このような例には適用できない。

### (3) パラメトリック法

$n$  個の目的関数の重要度がわかっていてかつ定数である場合、選好解をつぎの形で求める。

$$\min_{x \in T} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \quad (\text{一般性を失うことなく } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1) \quad (19)$$

これはちょうど線形加法的効用関数を仮定した場合にあたる。通常  $\alpha_i$  は  $f_i$  のみによって決まるばかりでなく  $f_j (j \neq i)$  の水準にもよると考えられる場合が多い。バス会社の例では利用者のサービス水準がかなり高い水準に達していれば、 $f_1$  と  $f_2$  の重みは当然  $f_2$  にあると考えるのが普通でありまたその逆もいえる。したがって一律に  $\alpha_i$  を定め最適化をはかると不都合が生じやすい。しかしながら利用者のサービス水準、運営者の費用の水準がわかっていて、その水準において両者の重み、 $\alpha_i : \alpha_j$  を与え、最適化した結果、目的関数の値の変化がわざかであればこの結果を採用することができる。バス会社の例で  $\alpha_1=0.2, \alpha_2=0.8$  の場合と  $\alpha_1=0.8, \alpha_2=0.2$  の場合について最適化する場合を図 2 で見てみよう。

A 点は実は非劣解のカーブと、傾き  $-\alpha_2/\alpha_1 = -4$  の直線が接する点であり B 点は同様に傾き  $-0.25$  の直線が接する点になっている。凸問題に関して  $\alpha_i$  をパラメトリックに変化することによりすべての非劣解が求まる[6]。

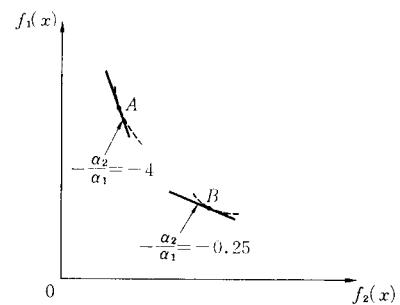


図 2 パラメトリック法による非劣解

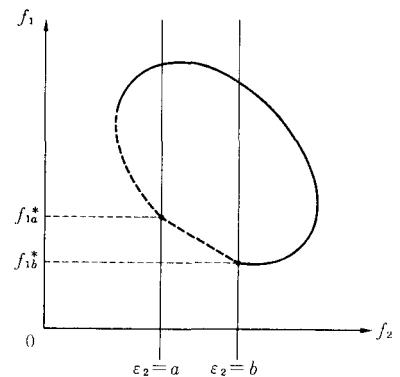


図 3  $\epsilon$ -制約法による多目的最適化

### (4) $\epsilon$ -制約法

$\epsilon$ -制約法では、 $n-1$  個の目的関数に許容できる最大値 ( $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ ) を与え選好解をつぎの形で求める。

$$\min_{x \in T} f_i(x) \quad (20)$$

$$f_i(x) \leq \epsilon_i \quad i=2, \dots, n$$

$f_1(x)$  は何番目の目的関数であってもよいことはいうまでもない。バス会社の例にあてはめるとつぎのようになる。利用者のサービス水準としてシビルミニマムのようなものがあれば、その水準を  $\epsilon_1$  とし、 $f_2$  を最小にする。また、逆に運営者の利益のある水準に保つことを条件として利用者の不効用を最小にすることを考えることもできる。この方法はこのように目的関数について外部要因により許容される水準が定められる場合利用できる。この方法で  $\epsilon_i$  をパラメトリックに変化されると非劣解が求められる。この様子を表 1 および図 3 に示す。

### (5) ゴールプログラミング

この方法は各目的関数に達成すべき目標を定め、その差がなるべく小さくなるように最適化をはかる方法である。

表 1  $\epsilon$ -制約法による最適解

	$\epsilon_2$	$\min f_1$	$\min f_1$ subject to $f_2 \leq \epsilon_2$
Case 1	$a$	$f_{1a}^*$	の解。
Case 2	$b$	$f_{2a}^*$	

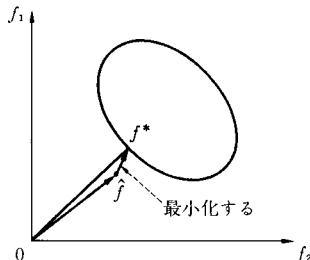


図 4 ゴールプログラミング

る。たとえば(21)式のように適当なノルムを考えそれを最小化する。

$$\min_{x \in T} \|f(x) - \hat{f}\| \quad (21)$$

$\hat{f}$  は  $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n)$  なる目標ベクトルである。バス会社の例では  $\hat{f}_1$  として利用者にとって理想的な状態  $\hat{f}_2$  として経営状況からぜひ達成させたい費用目標を選ぶなどのことができる。この様子を図 4 に示す。

ゴールプログラミングの方法はいくつかの変形が考えられるがここでは省略する。

#### (6) Surrogate Worth Trade-off 法

Surrogate Worth Trade-off 法(SWT 法と略す)は Haimes 等 [6] によって提案され水資源開発などの問題に応用されている比較的新しい方法である。この方法は、多目的最適化においては、それぞれ目的関数がある水準にあり、そこからどれだけ増減するかに重点があるという立場に立っている。さらに意志決定者にとって各目的関数の絶対値の評価をするより、ある水準点における増分に対するトレードオフを評価するほうが容易と考えられるとするものである。

したがって最適化は目的関数  $f_1$  の水準、 $f_2$  の水準が与えられた場合、その点において  $f_1$  の変化分  $\Delta f_1 (= \lambda_{12})$  の、 $f_2$  变化分  $\Delta f_2 (= 1)$  に対する選好具合を意志決定者に質問することにより行なう。意志決定者はもしそのトレードオフを喜んで受け入れる場合 + の評点をし、受け容れ難い場合に - の評価を与える。両者が同等と考えた場合評価は 0 が与えられ、その点が選好解となる。

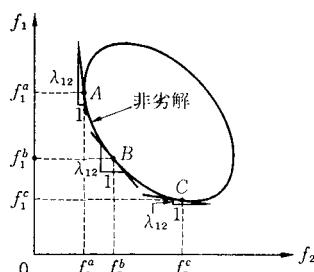


図 5 SWT 法による選好解の求め方

表 2 SWT 法における Worth Score  $W_{12}$  の与え方  
(図 5 参照のこと)

点	$f_1$	$f_2$	$\Delta f_1$	$\Delta f_2$	意志決定者の判定	$W_{12}$
A	$f_1^a$	$f_2^a$	$\lambda_{12}^a$	1	よろこんで受け入れる	$\sim +10$
B	$f_1^b$	$f_2^b$	$\lambda_{12}^b$	1	どちらともいいがたい	0
C	$f_1^c$	$f_2^c$	$\lambda_{12}^c$	1	拒否する	$-10 \sim$

バス会社の例について SWT 法の手順を図 5 で示す。図 5 の A では  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  にはそれぞれ水準が与えられている。A は非劣解の一つであるからここで、 $f_1$  を  $\lambda_{12}(a)$  だけ改善するために  $f_2$  を 1 だけ悪化させる必要がある。ここで  $f_1$ 、 $f_2$  この間でトレードオフが行なわれるところになり意志決定者はそれを受け入れるか否か判断する。受け入れる場合、Worth Score  $W_{12}$  に + の値を与える。B、C について同様のことを行なう。これらをまとめて表 2 に示す。

SWT 法について数理計画的意味づけをするためにバス会社の例にそってつぎの問題を考える。

$$\min_x f_1(x) \quad (22)$$

$$f_2(x) \leq \epsilon_2 \quad (23)$$

$$g_k(x) \leq 0 \quad k=1, \dots, m$$

$$\epsilon_2 = f_2^0 + \bar{\epsilon}_2 \quad \bar{\epsilon}_2 > 0$$

$$f_2^0 = \min_{x \in T} f_2(x)$$

これに対して Lagrange 関数(24)式を考える。

$$L = f_1(x) + \sum_1^m \mu_k g_k(x) + \lambda_{12}(f_2(x) - \epsilon_2) \quad (24)$$

このとき Kuhn-Tucker 条件から [6]、

$$\lambda_{12}(f_2(x) - \epsilon_2) = 0 \quad (25)$$

$$\lambda_{12} \geq 0$$

(25)式より、 $\lambda_{12}=0$  もしくは  $f_2(x) - \epsilon_2=0$

または、 $\lambda_{12}=0$  および  $f_2(x) - \epsilon_2=0$

もし  $f_2(x) - \epsilon_2 < 0$  であれば、 $\lambda_{12}=0$

この場合制約式は不活性である。

制約式が活性の場合  $f_2(x) = \epsilon_2$  であるから、

$$\lambda_{12} = -\frac{\partial L}{\partial \epsilon_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial f_2}$$

となり  $\lambda_{12}$  は  $f_1$  と  $f_2$  のトレードオフ 関数となっている。

SWT 法を用いて実際に問題を解く場合、先に述べた  $\epsilon$ -制約法もしくはパラメトリック法が用いられる。 $\epsilon$ -制約法では  $\epsilon_2$  を仮定し  $f_2(x) \leq \epsilon_2$  の制約条件のもとで  $\min_{x \in T} f_1(x)$  を解く。

このときの解  $f_1^*(\epsilon_2)$ 、 $\lambda_{12}(\epsilon_2)$ 、 $f_2^*(x) (= \epsilon_2)$  に対して意志決定者は Worth Score  $W_{12}$  を記入し  $W_{12}=0$  となる点をもって選好解とする。

パラメトリック法の手順を図 6 に示す。この方法では

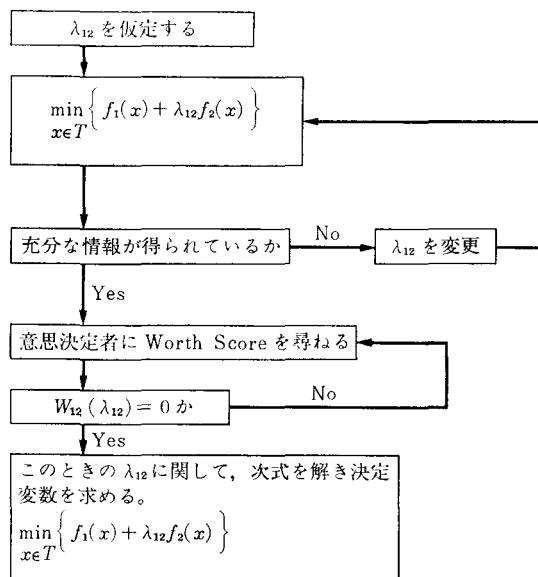


図 6 パラメトリック法による SWT フローチャート

$\lambda_{12}$  を仮定し  $f_0(x) = f_1(x) + \lambda_{12} f_2(x)$  を  $x \in T$  で最小化する。このときの  $f_1^*(\lambda_{12})$ ,  $f_2^*(\lambda_{12})$ ,  $\lambda_{12}^*$  に対して意思決定者は Worth Score  $W_{12}$  を記入し、前と同様  $W_{12}=0$  となる点をもって選好解とする。

### おわりに

以上多目的最適化について述べてきたが、必ずしも充分に説明がなされていないのでわかりにくい点も多いと思われる。われわれが多目的最適化を必要とする問題に遭遇した場合、個々の目的関数の性質を調べたり、効用関数の構成の可能性を検討したり、非劣解の性質を調べたりしながら最適解を見出す努力をしている。このような一つ一つの過程が多目的最適化においては重要であると考える。

#### 注 1) 効用関数

選好関係  $(X, \preceq)$  に対して、関数  $u: X \rightarrow R^1$  が次式を満たすとき  $X$  上の  $\preceq$  に関する順序保存の効用関数という。

$$\forall x, y \in X, x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y), x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y), x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$$

注 2) 任意の集合  $X$ 、その上での選好関係  $\preceq$  とした場合  $\langle X, \preceq \rangle$  が弱順序でかつ同値類の集合  $X/_\sim$  が可算であるならば効用関数  $u(\cdot)$  が存在する。

存在する  $\forall x, y \in X, x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$

注 3) 加法的であるためにはさらに  $x \in X$  に対し  $e < x$  ならば  $(e = \{e | u(e) = 0\}) \forall y \in X$  に対し  $y < nx$  となる自然数が存在するなど、さらに厳しい条件が必要となる。

注 4) (13) 式で  $R = \frac{(1+r)^m r}{(1+r)^{m+1} - 1}$   $r$ : 割引率,  
 $m$ : 耐用年数

### 参考文献

- [1] 市川:“意志決定の数理 I”, 計測と制御, Vol. 13, No. 11 (1974).
- [2] P. C. Fishburn: *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley, 1970.
- [3] 志水清孝:“多目的システムにおける意志決定と最適化”, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 22, No. 6 (1977).
- [4] K. Kobayashi, Y. Aoki, A. Tani:“A Method for Evaluating Urban Transportation Planning in Terms of User Benefit”, Transpn. Res., Vol. 9 (1975).
- [5] 谷明良, 宮武信春:“通勤径路選好特性の計量化手法”, 土木学会論文報告集, Vol. 267 (1977).
- [6] Y. Y. Haimes, W.A. Hall & H.T. Freedman: *Multiobjective Optimization in Water Resources Systems*, Elsevier, 1975.

(あおき・よういち 三菱総合研究所)

### “これ読めますか”的答(6月号, 374ページの訂正と補記)

矢島 敬二

この答は参考のために掲げたもので、なんら権威のあるものではないことの記載がなく、またミスプリントがあったことをお詫びします。これに関して、国立国語研究所の林大所長より、下記の連絡をいただきましたので、参考に掲げます。

79-64 △エイ	72-65 シ	めなもみ
60-16 ○しで	51-85 ソウ	ソ
58-83 △ヒ	65-07	○でしぐらむ
52-63 △テン	83-03	○いかるが
83-27 イツ しげ	60-14 △ヘイ	
59-37 ロ はじ, はぜ	48-54	○まま
52-60 ○まま	74-12 △ジョウ	
54-06 △アツ	66-72 ○コウ	
57-43 △ク うすい	64-82 ○エイ	○あきらか
72-75 ○シユウ	59-28	○そま

○は妥当と思われるもの、△ははっきりしないものの、下線は訂正、追加です。