

Original

Analysis of a Multi-Stage Production/Inventory System with an Acceptable Response Time In the Case of Products with Different Processing Times

Ken TAKEDA¹ and Mitsuru KURODA¹

Abstract

This paper deals with the case of manufacturing products with different processing times, and analyses the relation between the target service rate in terms of shipping the products in a specified ratio within an acceptable response time and the planned inventory levels of finished and semifinished products to satisfy the target service rate. Based on the result of the analysis, a mathematical model to determine the optimal inventory configuration is formulated, which minimizes the total planned inventory of finished and semifinished products. The numerical experiments indicate that the optimal inventory configuration weighing much on semifinished products is obtained by the above method. Furthermore, this paper discusses a sensitivity analysis by examining the influence of change in average processing rates used for the above analysis upon the service rate. Lastly, to back up the analysis, production/inventory simulations including machine breakdown are carried out in order to make sure the target service rate can be achieved in the optimal inventory configuration taking into consideration a change in the average processing rates.

Key words : multi-stage production/inventory system, response time, average processing rates, optimal inventory configuration, sensitivity analysis

¹ Aoyama Gakuin University
Received : March 11, 1999
Accepted : November 25, 1999

 論 文

許容応答時間が存在する場合の多段階生産・在庫システムの解析

製品間で加工時間が異なる場合

竹 田 賢¹, 黒 田 充¹

本論文では、加工時間が異なる製品を製造する場合を対象として、許容応答時間内に製品を所定の確率で出荷するという意味の目標サービス率とそのために必要な製品・中間製品の計画在庫量の関係を解析する。つぎに、解析結果を満たす在庫構成の中から、製品と中間製品の計画在庫量の加重和を最小化する最適在庫構成の求め方について述べ、本方法によって中間製品に大きな比重を置いた在庫構成が得られることを数値実験を通して示す。さらに、前述した解析で用いる平均生産速度の変化がサービス率に及ぼす影響を調べる感度分析の方法を提出する。最後に、平均生産速度の変化を見込んだ最適在庫構成の下で目標サービス率が達成できることを機械故障の発生を仮定した生産・在庫シミュレーションによって確かめ、解析の妥当性を裏付ける。

キーワード：多段階生産・在庫システム、応答時間、平均生産速度、最適在庫構成、感度分析

1. 研究の背景と目的

製品の多品種化、短納期化、製品ライフサイクルの短縮などが進んでいる今日、製造業では顧客サービス向上を目的として、柔軟性、即応性、収益性を同時に満たす生産方式の再構築が試みられている。著者はいままでにこの種の生産方式に見られる一般的構造に着目し、その概念化とモデル化を試みてきた〔1〕、〔2〕。受注即応生産方式（QRPS: quick response to orders production system）と呼ぶこの生産方式の基礎になっている考え方は、顧客の注文に対して製品在庫のみによって対応するのではなく、受注後に複数種の製品共通の中間製品を顧客の仕様に基づいて加工し、指定された期間内に出荷するというものである。受注即応生産方式の研究では、この受注から製品を出荷するまでの指定された期間を許容応答時間と呼ぶ。受注即応生産方式では、在庫品目の縮小と在庫費用の削減が期待できるとともに、個々の製品の需要量が不安定であっても中心極限定理によって中間製品の需要分布は正規分布によって近似でき、その結果、中間製品の需要量は安定して在庫管理はより経済的にできる。

受注即応生産方式に関連する研究としては、〔3〕において、原材料と中間製品が1種類、製品品種数が複数種の場合に顧客の注文量と応答時間の長さが比例するという条件の下で、売上高から在庫保管費用を差し

引いて求められる利益が最大となる中間製品および製品の在庫量を決定する方法が提案されている。〔4〕では、複数種の製品に共通する中間製品をあらかじめ生産し、受注が確定した後中間製品を用いて製品を製造する3段階の直列型生産・在庫システムを対象として、在庫費用と応答時間を評価尺度として中間製品の在庫量（製品在庫は0と仮定）を決定する方法を示している。また〔5〕では、 N 段階の直列型生産・在庫システムのどの在庫ポイントまでどれだけの中間製品を先行して製造すればよいかを、顧客への応答時間と在庫費用を評価尺度として決定する方法を示している。このように〔3〕～〔5〕においては、在庫費用と応答時間を評価尺度として取り上げた多段階生産・在庫システムの研究が行われている。

近年、市場競争の激化により製造業では顧客満足が最重要課題になってきており、サービス率と応答時間を取り上げた研究が見られるようになり始めた。〔6〕では、原材料から複数種の製品を製造する2段階の生産・在庫モデルを対象として、総製品在庫量に制限があつて許容応答時間が与えられている条件の下でサービス率を最大にする製品在庫構成を待ち行列理論によって求める方法を提案するとともに、スケジューリングがサービス率に及ぼす影響をシミュレーションによって検討している。また著者は、1種類の原材料と中間製品、同じ加工時間を持つ複数種類の製品からなる3段階の生産・在庫モデルを対象として、許容応答時間内に製品を所定の確率で出荷できるという意味の目標サービス率とそのために必要な製品および中間製品の生産期首における在庫量（以下、計画在庫量と呼ぶ）の関係を解析によって明らかにした〔2〕。本研究

¹ 青山学院大学

受付：1999年3月11日、再受付（2回）

受理：1999年11月25日

では前報で取り上げたモデル（以下、基本モデルと呼ぶ）を拡張し、加工時間が異なる場合における両者の関係を解析し、それに基づき製品と中間製品の計画在庫量の加重和を最小化する最適在庫構成法を提案する。

本論文の構成は以下の通りである。まず、新たに行う解析の基礎になっている同じ加工時間を持つ複数種の製品を単一のラインで生産する場合の解析結果について要約した後、平均生産速度の概念を導入して、複数の生産ラインで加工時間が異なる製品を製造する場合に前述の解析結果を適用する方法について述べる。つぎに、製品計画在庫量をなるべく少なく保ちながら目標サービス率を達成する計画在庫の最適構成（以下、最適在庫構成と呼ぶ）の求め方を提案する。その後、取り上げた例題について最適在庫構成を求め、在庫管理担当者の考え方をよく反映していると思われるヒューリスティックな方法による在庫構成と比較し、最適在庫構成が中間製品により大きな比重を置いた構成であることを示す。最後に、解析で用いる平均生産速度の変化がサービス率に及ぼす影響を定式化し、その変化が予想される場合、それを見込んだ最適在庫構成の下で目標サービスが達成できることを機械故障の発生を仮定した生産・在庫シミュレーションによって確かめ、解析の妥当性を裏づける。

2. 多段階生産・在庫モデル

2.1 同じ加工時間を持つ複数種の製品を単一のラインで生産する場合の解析

2.1.1 解析の条件

基本モデルの解析にあたって設定した条件を以下に示す。

- (1) 原材料、中間製品、製品の3段階からなる直列型の多段階生産・在庫システムを対象とする。
- (2) 原材料および中間製品の品種数はそれぞれ1種類であり、中間製品から複数種の製品を製造して出荷する。
- (3) 原材料から中間製品、中間製品から製品までの製造は、それぞれ単一の生産ラインによって行われ、複数の製品を同時に作ることはいできないものとする。また、設備稼動時間は24時間とする。
- (4) 各生産期における生産オーダは、注文に応じるためのもの（緊急度の高い生産オーダ）と次期の需要に応じるために在庫量を計画在庫水準に戻すためのもの（緊急度の低い生産オーダ）からなり、前者の生産オーダを優先し

て行うこととする。

- (5) 製品需要量は正規分布に従い、製品間で独立であるものとする。
- (6) 顧客からの注文は各生産期の期首にまとめて示される。
- (7) 許容応答時間は注文にかかわらず一定である。
- (8) 中間製品および製品の生産指示サイクルは1日とし、生産指示方式はプルタイプである。
- (9) 顧客の注文に許容応答時間内で対応できない場合でも生産は行うものとする。
- (10) 生産ラインの加工能力はそれぞれ、製品または中間製品の1日あたりの平均需要に応じられる大きさを持つものとする。
- (11) 原材料の品切れはないものとする。

図1は、基本モデルで扱った製品構成と生産ラインの関係を表わしている。

2.1.2 解析の概要

(a) 製品の計画在庫量決定について

基本モデルの解析では、製品の計画在庫量を求めるために以下の3つの量に着目した。

- ① 製品の計画在庫で対応可能な注文の平均量 U 。
- ② 製品の計画在庫で対応できないが、中間製品からの加工によって許容応答時間内に対応できる注文の平均量 Q 。
- ③ 目標サービス率を満たすために必要な平均対応量。

明らかに、目標サービス率を実現するためには①と②の和が③以上となる必要がある。まず初めに、製品の計画在庫で対応可能な注文の平均量 U は、製品の平均需要量から計画在庫で対応できない注文の平均量を差し引いて求められるため、次のように表わされる。

$$U = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{\infty} x_i f_i(x_i) dx_i - \int_{I_i}^{\infty} (x_i - I_i) f_i(x_i) dx_i \right\} \quad (1)$$

ただし、 n は製品品種数、 I_i は製品 i の計画在庫量、 x_i は製品 i の需要量を表わす確率変数、 $f_i(x_i)$ はその

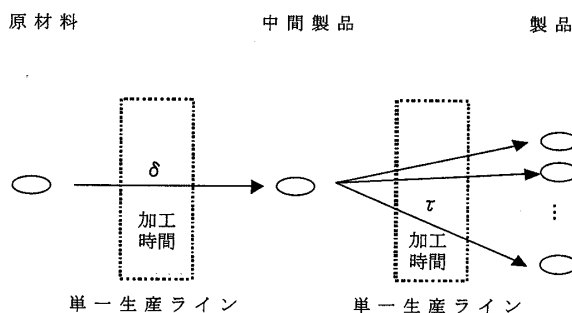


図1 製品構成と生産ラインの関係（基本モデル）

確率密度関数を表わす。

また、 Q も U と同様にして求められるため、製品全体に対する目標サービス率を S 、製品の計画在庫で対応できず、中間製品を加工して対応しなければならない注文量を表わす確率変数を z 、その確率密度関数を $h(z)$ とすれば、製品の計画在庫量が満たすべき関係式は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{\infty} x f_i(x) dx - \int_{I_i}^{\infty} (x - I_i) f_i(x) dx \right\} \\ & + \left\{ \int_0^{\infty} z h(z) dz - \int_P^{\infty} (z - P) h(z) dz \right\} \\ & \geq S \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} x f_i(x) dx \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 P は許容応答時間内に製品の加工工程で利用可能な中間製品量であり、許容応答時間 A と製品の加工時間 τ との間に次式で示す関係が成立するものとする。

$$P = \frac{A}{\tau} \quad (3)$$

このように、製品ごとの需要分布は異なっていないが、中間製品が共通であって中間製品の加工時間も製品間で共通であるため、製品の計画在庫量が満たすべき関係式は単純なものになる。

(b) 中間製品の計画在庫量決定について

中間製品への生産オーダーは、当期の注文に応じるためと次期の需要に対応するために製品の在庫量を計画在庫水準に戻すための2種類からなり、前者の生産オーダーはサービス率に影響する。ここで、目標サービス率を達成するには、式(3)によって求められる中間製品の量 P が許容応答時間内に製品の加工工程で利用できなければならない。いま、中間製品の加工時間を δ とすれば、許容応答時間内に中間製品として供給可能な量 G は次式で求められる。

$$G = \frac{A}{\delta} \quad (4)$$

したがって、中間製品の計画在庫量 I は、許容応答時間内に製品の加工に用いられる中間製品量 P と中間製品として供給可能な量 G の差から求められる。

$$I = \max(P - G, 0) \quad (5)$$

2.2 加工時間が異なる製品を複数の生産ラインで製造する場合の解析

最初に、本論文で取り上げるモデルは、基本モデルをどの点で一般化しているのかについて示す。

- (ア) 原材料から中間製品、中間製品から製品の製造はそれぞれ単一の生産ラインではなく、同じ加工能力を持つ複数の生産ラインで行われる。
- (イ) 加工時間が異なる複数の製品および中間製品を

対象とする。

- (ウ) 原材料から1種類ではなく、複数種の中間製品が作られる。

以下に、2.1.1 に述べた解析の条件と合わせた本モデルの前提条件を示す。

- (1) 原材料、中間製品、製品の3段階からなる直列型の多段階生産・在庫システムを対象とする。
- (2) 原材料の品種数は1種類、中間製品および製品は加工時間が異なる複数種類とし、原材料から複数種の中間製品を製造し、それを加工することによって製品を出荷する。
- (3) 原材料から中間製品、中間製品から製品までの製造はそれぞれ、同じ加工能力を持つ複数の生産ラインで行われる。また、設備稼働時間はどの生産ラインも24時間とする。
- (4) 各生産期における生産オーダーは、注文に応じるためのもの（緊急度の高い生産オーダー）と次期の需要に応じるために在庫量を計画在庫水準に戻すためのもの（緊急度の低い生産オーダー）からなり、前者の生産オーダーを優先して行うものとする。
- (5) 製品需要量は正規分布に従い、製品間で独立であるものとする。
- (6) 顧客からの注文は各生産期の期首にまとめて示される。
- (7) 許容応答時間は注文にかかわらず一定である。
- (8) 中間製品および製品の生産指示サイクルは1日とし、生産指示方式はプルタイプである。
- (9) 顧客の注文に許容応答時間内で対応できない場合でも生産は行うものとする。
- (10) 生産ラインの加工能力はそれぞれ、製品または中間製品の1日あたりの平均需要に応じられる大きさを持つものとする。
- (11) 原材料の品切れはないものとする。

以上より、本解析の対象にするモデルは図2のように表わせる。

なお、本モデルでは中間製品 j から製造する複数種

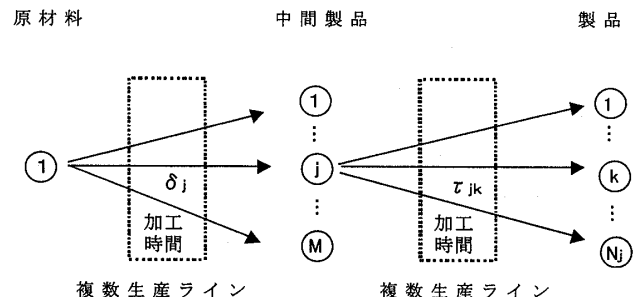


図2 製品構成と生産ラインの関係

の製品を製品グループ j と呼ぶ。

(a) 製品の計画在庫量決定の解析

基本モデルの解析では、(3), (4)式つまり、(許容応答時間/加工時間)を用いて許容応答時間内に加工可能な製品と中間製品の量が計算できると仮定したが、本モデルでは複数の生産ラインで加工時間が異なる製品と中間製品を製造するため、生産量をより一般的な形式で表現する必要がある。そこで、セル生産やジョブ・ショップ生産においても適用できる生産工程の形態に依存しない生産量あるいは生産能力の表現方法として、単位時間あたりの生産量を表わす平均生産速度の概念を用いる。本研究では、ランダム生産、1個流し生産を仮定し、生産オーダが加工工程に課する総負荷量を製品グループごとの生産量で除した値の逆数として平均生産速度(理論値)を定義する。以下に、緊急度の高い生産オーダに基づいた平均生産速度の求め方を示す。

いま、中間製品 j から作られる k 番目の製品の計画在庫量を $I_{j,k}$ 、需要量を表わす確率変数を $x_{j,k}$ 、その確率密度関数を $f_{j,k}(x_{j,k})$ 、加工時間を $\tau_{j,k}$ 、中間製品 j から加工可能な製品品種数を N_j とした場合、製品の計画在庫 $I_{j,k}$ で対応できない注文量 $B_{j,k}$ の平均値 $E(B_{j,k})$ は式(6)で求められ、製品グループ j に関し、緊急度の高い生産オーダが加工工程に課する負荷量 F_j は式(7)によって示される。

$$E(B_{j,k}) = \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \quad (6)$$

$$F_j = \sum_{k=1}^{N_j} \tau_{j,k} E(B_{j,k}) \quad (7)$$

したがって、中間製品の品種数を M とすれば、製品グループ全体の緊急度の高い生産オーダが加工工程に課する総負荷量 F は式(8)で求められる。

$$F = \sum_{j=1}^M F_j \quad (8)$$

他方、製品の計画在庫で対応できず、中間製品 j を加工して対応しなければならない注文量 z_j (以後、中間製品 j の変換需要量と呼ぶ) の平均値 $E(z_j)$ は、製品グループ j に関する緊急度の高い生産オーダの総和として式(9)で与えられる。

$$E(z_j) = \sum_{k=1}^{N_j} E(B_{j,k}) = \sum_{k=1}^{N_j} \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \quad (9)$$

したがって、 L_f を中間製品から製品を加工するために使用される生産ライン数、 μ_j を製品グループ j の平均生産速度とすれば、負荷量がライン間で均衡していて各種の製品の生産が一様に分散して行われると仮定する場合、 μ_j は緊急度の高い生産オーダの総和

$E(z_j)$ をラインあたりの平均負荷量 $\left(\frac{1}{L_f}\right) \sum_{j=1}^M F_j$ で割った式(10)で求められる。

$$\mu_j = \frac{E(z_j)}{\left(\frac{1}{L_f}\right) \sum_{j=1}^M F_j} = \frac{L_f E(z_j)}{\sum_{j=1}^M F_j} \quad (10)$$

したがって、許容応答時間 A の間に製品の加工工程で生産可能な製品グループ j の量 P_j は、式(11)で求められる。

$$P_j = \mu_j A \quad (11)$$

以上により、製品の計画在庫で対応可能な注文の平均量 U と製品の計画在庫で対応できないが、中間製品からの加工によって許容応答時間内に対応できる注文の平均量 Q は、それぞれ式(12), (13)で与えられる。したがって、製品全体に対する目標サービス率 S を達成するために必要な製品の計画在庫量は、基本モデルにおいて導いた式(2)を用いて式(14)で表わされる。

$$U = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \left\{ \int_0^{\infty} x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} - \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \right\} \quad (12)$$

$$Q = \sum_{j=1}^M \left\{ \int_0^{\infty} z_j h_j(z_j) dz_j - \int_{P_j}^{\infty} (z_j - P_j) h_j(z_j) dz_j \right\} \quad (13)$$

$$U + Q \geq S \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \int_0^{\infty} x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \quad (14)$$

あるいは、製品グループごとに目標サービス率 S_j を考慮した場合、製品グループ j の計画在庫量が満たすべき関係式は、 U_j と Q_j を用いて式(17)で表わされる。

$$U_j = \sum_{k=1}^{N_j} \left\{ \int_0^{\infty} x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} - \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \right\} \quad (15)$$

$$Q_j = \int_0^{\infty} z_j h_j(z_j) dz_j - \int_{P_j}^{\infty} (z_j - P_j) h_j(z_j) dz_j \quad (16)$$

$$U_j + Q_j \geq S_j \sum_{k=1}^{N_j} \int_0^{\infty} x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \quad (17)$$

ここで、基本モデルと同様に、 z_j の分布を中心極限定理に基づいて平均 $E(z_j)$ および分散 $V(z_j)$ がそれぞれ式(9), (18)に従う正規分布で仮定する。したがって、 z_j の確率密度関数 $h_j(z_j)$ は式(19)で与えられる。

$$\begin{aligned} V(z_j) &= \sum_{k=1}^{N_j} V(B_{j,k}) \\ &= \sum_{k=1}^{N_j} \left\{ \int_0^{I_{j,k}} E^2(B_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \right. \\ &\quad \left. + \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k} - E(B_{j,k}))^2 f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$h_j(z_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(z_j)}} \exp\left\{-\frac{(z_j - E(z_j))^2}{2V(z_j)}\right\} \quad (19)$$

(b) 中間製品の計画在庫量決定の解析

2.1.2の解析と同様に、目標サービス率を達成するためには許容応答時間内に中間製品 j の量 P_j が製品の加工工程で利用できる必要がある。ここで、中間製品の変換需要量に対応するために原材料を用いて中間製品の加工を行う場合、中間製品 j の平均生産速度 μ^j は、生産ライン数を L_s 、 δ_j を中間製品 j の加工時間とすれば、製品グループの場合と同様にして式(20)で計算できる。

$$\mu^j = \frac{L_s E(z_j)}{\sum_{j=1}^M \delta_j E(z_j)} = \frac{L_s \sum_{k=1}^{N_j} \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k}}{\sum_{j=1}^M \left\{ \delta_j \sum_{k=1}^{N_j} \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \right\}} \quad (20)$$

したがって、許容応答時間内に供給可能な中間製品 j の量 G_j は次式で求められる。

$$G_j = \mu^j A = \frac{L_s E(z_j)}{\sum_{j=1}^M \delta_j E(z_j)} A \quad (21)$$

以上により、中間製品 j の計画在庫量 I_j は式(5)を用いて以下のように表わされる。

$$I_j = \max(P_j - G_j, 0) = \max(\mu_j A - \mu^j A, 0) \quad (22)$$

(c) 解析結果の説明

(a), (b)では、目標サービス率とそのために必要な計画在庫量の関係について平均生産速度を用いて解析した。ところで、加工時間が製品間で異なる場合、式(10)、(20)から分かるように、製品と中間製品の平均生産速度は、製品の需要量と製品の計画在庫量の関係から求められる生産オーダーの種類と量によって変化する。ただし、本モデルでは製品の需要分布は期ごとに変化しないため、製品の計画在庫量を決めれば生産オーダーの内容が定まり、平均生産速度も一定となる。ここで、式(11)、(21)から、平均生産速度は許容応答時間内に加工可能な製品グループ j の量 P_j と供給可能な中間製品 j の量 G_j に影響する。したがって、平均生産速度、許容応答時間および目標サービス率などの要因によって、製品の計画在庫で対応する注文

量 U_j と中間製品からの加工で対応する注文量 Q_j の割合が変化し、また、製品と中間製品の計画在庫量の下限値が決まる。受注即応生産方式が成り立つためには、これらの関係が保たれることが必要である。

本モデルでは、製品の計画在庫で対応できない注文に対する製造と出荷（緊急度の高い生産オーダーの処理）が行われた後、次期の注文に応じるために各在庫量を計画在庫水準に戻すための補充生産（緊急度の低い生産オーダーの処理）が行われ、これが期ごとに繰り返される（図3参照）。ここで、緊急度の高い生産オーダーの量と低い生産オーダーの量の和は平均需要量に等しく、解析の条件(10)により、生産ラインの加工能力は平均需要に応じられる大きさを持つため、各生産期の期首における製品と中間製品の在庫量は、計画在庫量の大小に関わらず元の水準に回復できる。ただし、これは数学モデルにおける平均的な関係に関してであり、実際には近似的な関係となる。4.2では、解析から求められる計画在庫水準の下で具体的な生産と在庫の状況を取り扱ったシミュレーションを行い、解析の妥当性を確かめる。

3. 最適在庫構成問題

3.1 定式化

2章では、目標サービス率とそのために必要な製品および中間製品の計画在庫量の関係を求めたが、解析結果の説明から分かるように、この関係を満たす在庫構成は様々のものが存在する。

さて、受注即応生産方式は製品の計画在庫量をできる限り削減する代わりに、様々な製品の製造に共通して用いられる中間製品を活用し、短期間で顧客の要求に対応することを考える。なぜなら、中間製品と製品は1:Nの関係にあるため、在庫として保有するリスクが製品の場合に比べて低く、かつ、製品需要の変化に対して柔軟性が高いからである。したがって、受注即応生産方式における最適在庫構成は、製品と中間製品の計画在庫量の加重和を評価尺度とした以下の最適化問題を解くことによって求められる。ここで、 $w_{j,k}$ 、 w_j は製品および中間製品の計画在庫量に対する重みであり、受注即応生産方式の特徴を反映した在庫構成

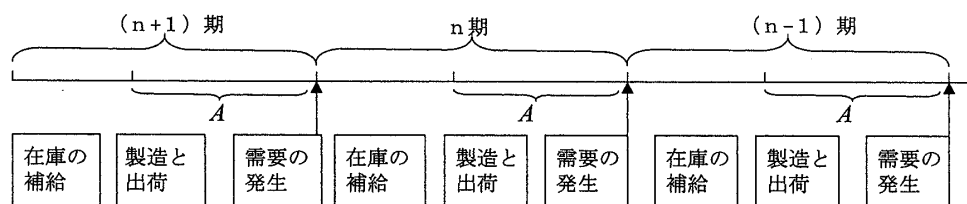


図3 受注即応生産方式における生産・在庫オペレーションの概念図

を求めるためには、 $w_{j,k}$ を w_j よりも十分大きくする必要がある。

<目的関数>

$$I = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} w_{j,k} I_{j,k} + \sum_{j=1}^M w_j I_j \rightarrow \text{最小化} \quad (23)$$

<制約条件>

$$U + Q \geq S \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \int_0^\infty x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \quad (24)$$

$$I_j = \max(\mu_j A - \mu^j A, 0) \quad (25)$$

ただし、 $I_{j,k}$, I_j は非負の整数。

もちろん、式(24)に替えて式(17)を用いることもできる。

3.2 数値実験

3.2.1 実験目的

本節では、最適在庫構成の特徴を示すために、在庫管理担当者の考え方を反映しているヒューリスティックな方法による在庫構成を求め、最適在庫構成と比較する。なお、最適在庫構成を求めるにあたり、シミュレーティド・アニーリングを用いる。

3.2.2 シミュレーティド・アニーリングによる最適在庫構成法

3.1 で定式化した問題は非線形な最適化問題であるため、本研究では確率的最適化法のシミュレーティド・アニーリング（以後、SA と呼ぶ）を用いて最適在庫構成を決定する。SA の基本的なアルゴリズムは、現在の解（present state）とその解を摂動して求めた次の解（next state）の評価値を計算し、評価値が改良されていれば 100%，そうでない場合でもある確率で解を移行して探索を行うものである〔7〕。移行確率は評価値の改悪の程度と温度と呼ばれる制御パラメータによって決められ、改悪の程度が大きい場合や温度が低いときは移行確率が低くなるようにアルゴリズムが構成されている。

本研究では評価尺度として、サービス率と目標サービス率の隔たりを表す E_1 と計画在庫量の加重和 E_2 を考える。したがって、 E_1 の値が 0 であつ E_2 の値が小さいほど良い在庫構成を表す。

$$E_1 = 100 \times \max(S - S', 0)$$

$$E_2 = I$$

ここで、 S' は計画在庫量 $I_{j,k}$, I_j から求められるサービス率の値である。

なお、評価尺度が複数ある場合における SA の適用方法は〔8〕の考え方を利用する。以下に、SA による計算手順を簡単に述べる。

Step 1：目標サービス率 S ，許容応答時間 A ，製品計画在庫量の初期値 $I_{j,k}$ ，初期温度 T ，終了温度 T_{end} ，

同一温度での探索回数 iteration などの入力パラメータを決定する。

Step 2： $I_{j,k}$ の値から平均生産速度 μ_j および μ^j を計算し、式(22)によって中間製品の計画在庫量 I_j を算出する。

Step 3：評価値 $E_1(\text{present state})$, $E_2(\text{present state})$ を計算する。

Step 4：新しい製品計画在庫量を以下のようにして求め、Step 2 と同様に I_j を定めて評価値 $E_1(\text{next state})$, $E_2(\text{next state})$ を計算する。なお、 $[a, b]$ は a 以上 b 以下の整数値を表し、ランダムに求める。

$$I_{j,k} \leftarrow I_{j,k} + [-4, 2] \quad \text{if } E_1(\text{present state}) = 0$$

$$I_{j,k} \leftarrow I_{j,k} + [-2, 4] \quad \text{if } E_1(\text{present state}) > 0$$

Step 5：次の解への移行を表 1 の条件によって決定する。ここで、もし解が移行した場合、 $E_1(\text{next state})$ および $E_2(\text{next state})$ の値をそれぞれ $E_1(\text{present state})$, $E_2(\text{present state})$ に代入する。

Step 6：探索回数が iteration を満足しない場合は探索回数を 1 増加して Step 4 へ、満足する場合は探索回数を 1 にセットするとともに、温度を冷却して Step 7 へ進む。

Step 7：温度が T_{end} より高ければ Step 4 へ、低ければ終了する。

3.2.3 ヒューリスティックな方法による在庫構成法

ヒューリスティックな方法は、製品需要量の平均値 $E(x_{j,k})$ と標準偏差 $\sqrt{V(x_{j,k})}$ から製品間の計画在庫保有比率 $\alpha_{j,k}$ を式(26)より定め、その比率にしたがって製品計画在庫量を配分するものである。これは、在庫管理における安全在庫量の算出式を利用しており、前報〔2〕ではこの方法を用いて在庫構成を決定している。

$$\alpha_{j,k} = \frac{E(x_{j,k}) + 1.96\sqrt{V(x_{j,k})}}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \{E(x_{j,k}) + 1.96\sqrt{V(x_{j,k})}\}} \quad (26)$$

以下に計算手順を示す。

Step 1：目標サービス率 S ，許容応答時間 A などの入力パラメータを決定する。

表 1 次の解への移行条件

	E_1	E_2	移行条件
CASE 1	改善	改善	100%
CASE 2	改善	改悪	(II)
CASE 3	改悪	改善	(I)
CASE 4	改悪	改悪	(I) かつ (II)

<移行条件を決定する式>

$$\text{random}[0,1] < \exp[\{E_1(\text{present state}) - E_1(\text{next state})\}/T] \quad (\text{I})$$

$$\text{random}[0,1] < \exp[\{E_2(\text{present state}) - E_2(\text{next state})\}/T] \quad (\text{II})$$

Step 2: 製品計画在庫量の初期値 I を定める.

Step 3: 計画在庫保管比率 $\alpha_{j,k}$ にしたがって I を各製品 $I_{j,k}$ に配分する.

$$I_{j,k} = \alpha_{j,k} \times I$$

Step 4: $I_{j,k}$ を用いて U, Q, I_j を計算し, 式(12)を満たす場合は Step 5 に進み, 満たさない場合は I を ΔI 増加して Step 3 に戻る.

Step 5: Step 4 で得られた $I_{j,k}, I_j$ を整数値にまらめて終了する.

3.2.4 実験条件

- ・許容応答時間 A : 480 分
- ・目標サービス率 S : 0.95
- ・中間製品品種数 M : 2
- ・製品品種数: $10(N_1=N_2=5)$
- ・生産設備数: $L_t=L_s=2$
- ・中間製品の加工時間 δ_j : $\delta_1=2$ (分/個), $\delta_2=3.5$ (分/個)
- ・製品の加工時間 $\tau_{j,k}$: 表 2 参照
- ・1 ラインあたりの生産稼働時間 C : 1440 分
- ・生産期: 1 日
- ・計画在庫量の重み: $w_{j,k}=10(\forall j, k), w_j=1(\forall j)$
- ・負荷率 (以下の式で計算): 50, 60, 70, 80(%)

$$\text{負荷率} = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \tau_{j,k} \int_0^{\infty} x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k}}{CL_f}$$

- ・製品の需要量分布: 4 パターン (表 3 参照)
- ・温度: $T=10, T_{\text{end}}=0.1$

表 2 製品 1 個あたりの加工時間 $\tau_{j,k}$ (分/個)

製品 No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加工時間	1.0	1.5	3.0	3.5	5.0	0.5	2.0	2.5	4.0	6.0

表 3 製品 1 日あたりの需要量分布 (正規分布)

需要量分布	平均				分散
	50%	60%	70%	80%	
製品 1 ($j=1, k=1$)	90	105	120	140	9^2
製品 2 ($j=1, k=2$)	100	115	130	150	40^2
製品 3 ($j=1, k=3$)	15	20	25	30	3^2
製品 4 ($j=1, k=4$)	70	80	90	105	21^2
製品 5 ($j=1, k=5$)	55	65	75	90	11^2
製品 6 ($j=2, k=1$)	65	75	85	95	13^2
製品 7 ($j=2, k=2$)	20	25	30	35	6^2
製品 8 ($j=2, k=3$)	75	85	100	115	30^2
製品 9 ($j=2, k=4$)	80	100	115	130	32^2
製品 10 ($j=2, k=5$)	10	15	20	20	3^2

・同一温度での探索回数: iteration=5

・温度冷却スケジュール: $T \leftarrow T = 0.9^\gamma$ (γ は冷却回数の累積値)

・各製品の計画在庫量の初期値 (SA で利用): 各製品の平均需要量

・SA による最適在庫構成の探索回数: 各負荷率に対して 10 回

3.2.5 実験結果と考察

表 4 は, 最適在庫構成 (目標サービス率 95%) の特徴を示すために行った数値実験の結果をまとめたものである. 加工工程の負荷率が 50%, 60%, 70%, 80% の 4 通りについて数値計算を行い, ヒューリスティックな方法による在庫構成 (目標サービス率 95%) と比較して最適在庫構成の特徴が分かり易く示されている. 数値実験は東芝ワークステーション SPARC LT (AS 1000) を用いて行い, SA による在庫探索に 1 回あたり約 5 分, ヒューリスティックな場合に約 2 分の計算時間を要した. 計算結果としては, ①: 製品計画在庫量の合計, ②: 中間製品計画在庫量の合計, ③, ④: 上記①と②の割合, ⑤: 上記①と②

表 4 在庫構成の相違 (目標サービス率: 95%)

生産工程の負荷率	50%		60%		70%		80%	
在庫構成法	OS	HS	OS	HS	OS	HS	OS	HS
①製品計画在庫量の合計	126	207	208	307	281	406	372	512
②中間製品計画在庫量の合計	344	249	336	245	369	243	399	242
③ ①/(①+②)	0.27	0.45	0.38	0.56	0.43	0.67	0.48	0.68
④ ②/(①+②)	0.73	0.55	0.62	0.44	0.57	0.33	0.52	0.32
⑤計画在庫量の合計 (①+②)	470	456	544	552	650	609	771	754
⑥ ①と②の加重和	1604	2319	2416	3315	3179	4303	4119	5362
⑦製品計画在庫による平均対応量	122	204	203	304	275	403	362	509
⑧中間製品での平均対応量	429	347	449	348	477	349	503	356
⑨平均需要量に対する⑦の割合	0.21	0.35	0.30	0.44	0.35	0.51	0.40	0.56
⑩平均需要量に対する⑧の割合	0.74	0.60	0.65	0.51	0.60	0.44	0.55	0.39

(注) OS: 最適在庫構成, HS: ヒューリスティックな在庫構成

の総和，⑥：上記①と②の加重和（製品，中間製品の重みが10：1の場合），⑦：製品計画在庫によって注文に対応する平均量，⑧：中間製品によって注文に対応する平均量，⑨：上記⑦の平均需要量に対する割合，⑩：上記⑧の平均需要量に対する割合を取り上げる。

以下に，数値実験が示す最適在庫構成の特徴を述べる。

（1）すべての負荷率に対して，中間製品の計画在庫量が製品の計画在庫量を上回っており，最適在庫構成の意図が反映されている。ただし，負荷率が増加するにつれてそれらの計画在庫量はともに増加し，両者の差は減少する。しかし，負荷率にかかわらず，ヒューリスティックな在庫構成と比べると最適在庫構成による製品計画在庫の軽減は歴然としている。

（2）⑥に示す①と②の加重和は最適在庫構成の特徴を端的に表わしており，重みとして製品と中間製品のそれぞれの価格を用いる場合，この生産・在庫方式の経済性を示す具体的な尺度になる。その場合の⑥の数値より，ヒューリスティックな在庫構成が暗示する従来の在庫方式に比べ，在庫投資や在庫費用がどの程度削減できるかを算定できる。

（3）⑩と⑨に示す平均需要量に対する製品計画在庫量と中間製品で対応する割合は，本生産・在庫方式のオペレーション特性を表わしており，それぞれを加えたものは0.95となり，目標サービス率に一致している。残りの5%は許容応答時間中に生産が開始されるが出荷されるまでには至らなかった注文の割合を意味している。なお，最適在庫構成下で本モデルを表わす生産・在庫シミュレーションによって得た平均遅延時間は，いずれの負荷率においてもさほど大きなものではなく（表5参照），残り5%の注文に関する生産・出荷に対しても中間製品の計画在庫が寄与している。④に示した比率に比べると，計画在庫に占める中間製品の割合以上に中間製品の対応量の割合が大きいことは明らかであり，中間製品の役割を重視した本生産・在庫方式の特徴が現れている。

（4）以上に示した特徴は，許容応答時間が480分とした場合の計算結果に基づいて述べたが，許容応答時間の増加につれてこれらの特徴がより顕著に現れることは自明である。

表5 最適在庫構成下での平均遅延時間（分）

平均負荷率	50%	60%	70%	80%
平均遅延時間（分）	56	58	59	61

（注）1回のシミュレーション期間は6カ月とし，各負荷率に対して20回のランを行った。

4. 平均生産速度の変化がサービス率に及ぼす影響

4.1 感度分析

2.では，1個流し生産，ランダム生産を仮定して求められる平均生産速度の理論値によって解析を行った。ところで，現実の生産職場では，段取り替え，機械故障，生産ロットサイズ，スケジューリングなどの生産条件や生産工程の状況によって，平均生産速度は理論値に一致しない。

そこで，製品と中間製品の在庫量が各生産期の期首において計画在庫水準を回復するという条件の下で，平均生産速度の変化がサービス率に及ぼす影響を明らかにする。

段取り替え，機械故障，生産ロットサイズ，スケジューリングなどを考慮する場合，緊急度の高い生産オーダーが加工工程に課する総負荷量は仮想上の総負荷量に置き換えられる。その結果，許容応答時間内に供給できる中間製品の量や中間製品を用いて加工できる製品の量が変化する。本研究では，これらの要因を包含するために仮想負荷変化率の概念を導入し，平均生産速度の理論値を修正する。いま，製品の加工工程での仮想負荷変化率 λ_t を式(8)で求めた総負荷量 F に対する仮想上の総負荷量の割合と定義した場合，製品グループ j の平均生産速度は，理論値 μ_j から実際値 $\mu_j(\lambda_t)$ に変化する。

$$\begin{aligned}\mu_j(\lambda_t) &= \frac{L_t E(z_j)}{\lambda_t F} \\ &= \frac{L_t \sum_{k=1}^{N_j} \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k}}{\lambda_t \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \tau_{j,k} \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k}}\end{aligned}\quad (27)$$

したがって，仮想負荷変化率が λ_t の場合，許容応答時間内に製品の加工工程で生産可能な製品グループ j の量 $P_j(\lambda_t)$ は，次式によって求められる。

$$P_j(\lambda_t) = \mu_j(\lambda_t) A \quad (28)$$

一方，中間製品の加工工程での仮想負荷変化率が λ_s の場合，中間製品 j の平均生産速度の実際値は製品グループと同様にして式(29)で表わされるため，製品の加工工程で許容応答時間内に利用可能な中間製品 j の量 $P_j(\lambda_s)$ は式(30)で求められる。

$$\mu^j(\lambda_s) = \frac{L_s \sum_{k=1}^{N_j} \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k}}{\lambda_s \sum_{j=1}^M \left\{ \delta_j \sum_{k=1}^{N_j} \int_{I_{j,k}}^{\infty} (x_{j,k} - I_{j,k}) f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \right\}} \quad (29)$$

$$P_j(\lambda_s) = I_j + G_j(\lambda_s) = I_j + \mu^j(\lambda_s) A \quad (30)$$

以上から，中間製品 j によって対応できる注文の平均量 Q_j は $Q_j(\lambda_t, \lambda_s)$ によって表わされる。

$$Q_j(\lambda_t, \lambda_s) = \int_0^\infty z_j h_j(z_j) dz_j - \int_{P_j(\lambda_t, \lambda_s)}^\infty \{z_j - P_j(\lambda_t, \lambda_s)\} h_j(z_j) dz_j \quad (31)$$

ただし、 $P_j(\lambda_t, \lambda_s) = \min(P_j(\lambda_t), P_j(\lambda_s))$

ここで、製品の計画在庫で対応する注文量 $U_{j,k}$ は変わらないため、サービス率の変化は中間製品によって対応する注文量の変化から生ずる。したがって、仮想負荷変化率が λ_t, λ_s の場合、サービス率の変化 $\Delta S(\lambda_t, \lambda_s)$ は次式のように表わされる。

$$\Delta S(\lambda_t, \lambda_s) = \frac{\sum_{j=1}^M \{Q_j(\lambda_t, \lambda_s) - Q_j\}}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \int_0^\infty x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k}} \quad (32)$$

4.2 シミュレーション実験

4.2.1 実験の目的と内容

本節では、平均生産速度が変化する例として機械故障の発生を取り上げ、仮想上の総負荷量が生産能力を超えない限り、解析から求められる在庫構成の下で目標サービスが達成できることを生産と在庫を取り扱ったシミュレーションによって確かめ、解析の妥当性を検討する。

シミュレーション・モデルは 3.2.4 の実験条件に基づいて SLAM II で構築し、中間製品から製品を製造する生産ラインにおいて、仮想負荷変化率 λ_t が 1.1 に相当する機械故障時間 β (次式で計算) を期ごとに発生させる。

$$\lambda_t \left(\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \tau_{j,k} \int_0^\infty x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \right) = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \int_0^\infty x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} + \beta \quad (33)$$

需要分布は負荷率が 80% の場合を取り上げ、最適在庫構成の下で 6 カ月間の生産・在庫処理を 20 回行ってサービス率を観測する。なお、最適在庫構成の計算は、式(24)の制約条件式に代えて感度分析結果に基づく次式を用いる。

$$(U+Q) + \sum_{j=1}^M \{Q_j(\lambda_t, \lambda_s) - Q_j\} \geq S \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N_j} \int_0^\infty x_{j,k} f_{j,k}(x_{j,k}) dx_{j,k} \quad (34)$$

ここで、中間製品の生産ラインでは機械故障が発生しないと仮定しているため、その仮想負荷変化率 λ_s の値は 1 である。

4.2.2 実験結果と考察

表 6 は、最適在庫構成下で機械故障の発生を仮定したシミュレーションによって得たサービス率をまとめたものである。シミュレーションの結果、サービス

表 6 機械故障が予想される場合の最適在庫構成下におけるシミュレーション実験から得たサービス率 (%)

96.0	95.1	95.4	95.0	94.8	94.7	95.9	95.2	94.7	95.6
95.2	94.1	94.0	95.5	94.9	94.4	95.1	96.0	95.0	94.7
平均サービス率: 95.02 (%)									

率の平均値は 95.02% と目標サービス率の 95% に近似し、解析の結果と一致している。以上から、各生産期の期首において、各在庫量が解析から求められる計画在庫水準を近似的に回復することによって、所定の目標を達成する生産と在庫処理が行われたといえる。また、平均生産速度の変化が予測できる場合、平均生産速度の変化に対応した経済的な在庫構成が求められることを確認できた。

5. 結 論

本論文では、複数の生産ラインで加工時間が異なる製品を製造する場合を対象として、平均生産速度の概念を導入して目標サービス率とそのために必要な製品および中間製品の計画在庫量の関係を解析した。さらに、目標サービス率を実現する最適在庫構成の求め方を提案し、数値実験から最適在庫構成が負荷率によって変化する一般的と思われる傾向を示した。また、平均生産速度の変化がサービス率に及ぼす影響を解析し、平均生産速度が変化しても、それを見込んだ最適在庫構成の下で目標サービス率が達成できることをシミュレーションによって確かめ、受注即応生産方式の成立条件を示す解析結果の妥当性を裏付けた。

今後の課題として、本モデルの様々な状況への適用を通して、受注即応生産方式の設計と運用に関する理論をより一般的なものにすることが挙げられる。

参 考 文 献

- [1] Kuroda, M. and Takeda, K.: "General Structure and Characteristics of Quick Response Production System", Proceedings of 22nd International Conference on Computer & Industrial Engineering, pp. 5-8 (1997)
- [2] 竹田 賢, 黒田 充: "許容応答時間が存在する場合の多段階生産・在庫システムの解析—製品間で加工時間が一定の場合—", 日本経営工学会論文誌, Vol. 49, No. 2, pp. 118-126 (1998)
- [3] Hanssman, F.: Operations Research in Production and Inventory Control, John & Sons, U. S. A. (1962)
- [4] Lee, L.: "Effective Inventory and Service Management through Production and Process Redesign", *Oper. Res.*, Vol. 44, No. 1, pp. 151-159

- (1996)
- [5] Cochran, J. K. and Kim, S. S.: "Optimum Junction Point Location and Inventory Levels in Serial Hybrid Push/Pull Production Systems", *Int. J. Prod. Res.*, Vol. 36, No. 4, pp. 1141-1155 (1998)
- [6] Charles, R. S., Joseph Thomas, L. and McClain, J. O.: "Coordinating Production and Inventory to Improve Service", *Manage. Sci.*, Vol. 43, No. 9, pp. 1189-1197 (1997)
- [7] 米田 清: シミュレーテッド・アニーリング〔I〕－組み合わせ最適化問題の汎用的解法－, *IE レビュー*, Vol. 32, No. 4, pp. 63-68 (1991)
- [8] Kuroda, M. and Kawada, A.: "Optimal Input Control for Job-Shop Type Production Systems Using Inverse Queueing Network Analysis", *Int. J. Prod. Econ.*, Vol. 33, Nos. 1-3, pp. 215-233 (1994)