

*Original*

# Analysis of a Multi-stage Production/Inventory System with an Acceptable Response Time —In the Case of Products with the Same Product Processing Time—

Ken TAKEDA\* and Mitsuru KURODA\*

## Abstract

This paper describes a method to decide the inventory levels of semifinished and finished products so as to realize the target service rate by shipping products within a specified time, which we call “acceptable response time,” under the situation that demand follows normal distribution. We analyze the substitution relation between the acceptable response time and the inventory levels of semifinished and finished products. As a result, inventory levels required according to the length of the acceptable response time are obtained. The validity of our method is also demonstrated through simulation experiments with the conditions given by analysis.

Key words : multi-stage production/inventory system, response time, service rate, analysis, simulation

---

\* Aoyama Gakuin University

# 論 文

## 許容応答時間が存在する場合の多段階生産・在庫システムの解析 製品間で加工時間が一定の場合

竹 田 賢\*, 黒 田 充\*

本論文では、需要が正規分布にしたがって確率的に変動している状況下で、許容応答時間内に顧客の注文に対して製品を所定の確率で出荷するという意味の目標サービス率を達成するために必要な中間製品および製品の在庫量を解析的に求める方法を提案する。また、許容応答時間の変化につれて所定のサービス率を達成するそれぞれの在庫量がどのように変わるかを示す許容応答時間と在庫量の置換関係を数値計算で求める。最後に、提案した方法によって得た中間製品と製品の在庫量を保有した場合、目標サービス率が近似的に達成できることをシミュレーション実験によって示し、その妥当性を論証する。

キーワード：多段階生産・在庫システム、応答時間、サービス率、解析、シミュレーション

### 1. 研究の背景と目的

近年製造業では、顧客の確保とサービス向上のために、柔軟性、即応性、収益性を同時に満たす生産方式の構築が行われており、著者はこの種の生産方式に見られる一般的構造に着目しその概念化を試みてきた〔1〕。受注即応生産方式（quick response to orders production system）と呼ぶこの生産方式の基礎になっている考え方は、顧客の注文に対して製品在庫で対応するのではなく、受注後に中間製品を加工して顧客の要求する期間内に製品を完成し、出荷するというものである。本研究ではこの顧客の要求する受注から製品を出荷するまでの期間を許容応答時間と呼ぶ。この生産方式は製品在庫量を削減してその代わりに中間在庫を保有するものであり、在庫品目数の縮小と在庫費用の削減が期待できる。さらに、個々の製品の需要量が不安定であっても中心極限定理はより中間製品の需要量分布は正規分布によって近似でき、その結果、中間製品の需要量は安定化し、在庫管理により経済的にできる。また在庫投資額を削減しても、ポートフォリオ（組合せ）効果によって品切れ確率は減少し、顧客サービスの向上が期待できる。一方、中間製品を加工して許容応答時間内に製品を出荷できない場合には、顧客の信頼をなくし、顧客を失う危険がある。

そこで本研究では、原材料、中間製品、製品からなる多段階生産・在庫システムのモデル化を行い、在庫管理の問題として前述の生産方式の成立条件を解析す

る。つまり、顧客の注文に応じて許容応答時間内に製品を所定の確率で出荷するという意味の目標サービス率を達成するためには、各生産期の期首における中間製品と製品の手持ち在庫がどれだけ必要であるかを解析的に決定する方法を提案する。本研究では、このような在庫を計画在庫と呼ぶ。またその生産方式を用いた場合、許容応答時間の変化とともに所定のサービス率を達成する中間製品、製品の計画在庫量がどのように変化するかを示す許容応答時間と計画在庫量の置換関係を考察する。さらに、解析的に求めた中間製品および製品の計画在庫量の保有により、目標サービス率が近似的に実現できることをシミュレーションによって示し、本研究で提案する解析方法の妥当性を裏付ける。

### 2. 多段階生産・在庫モデル

#### 2.1 本研究で取り扱うモデルと従来の多段階生産・在庫モデルとの関係

一般に多段階生産・在庫問題とは、最終段階の需要に従属して起こる川上に位置する各先行段階での在庫の補充活動について、その従属性を考慮して補充ポリシー、ロットサイズ、在庫量などを最適化する問題であり〔2〕、これまで多段階生産・在庫問題に関する理論的研究が数多く行われている。例えば〔3〕では、多段階生産・在庫問題を総費用に関して最適化する際に重要な役割を果たすエシェロンストックの考え方が提案されている。この場合、エシェロンストックとは“その段階にある在庫とすでにその段階を通過して出荷されるまでの生産・流通段階にある在庫の総計”と定義できる。したがって、エシェロンストックには常に最終段階での需要の情報が反映されるため、多段階

\* 青山学院大学

受付：1997年2月13日、再受付（2回）

受理：1998年3月19日

の在庫問題に特有の変動の増幅を抑えられる。また、多段階の在庫問題を単一段階の在庫問題として取扱える特徴のために、解析が容易になり、エシェロンストックを取り上げた研究は数多く行われている。例えば〔4〕は、直列型システムを対象とし、製品の品種数を1種類、顧客の注文に即納（許容応答時間=0）するという条件の下で、在庫保管費用と品切れによるペナルティコストを最小化する期首のエシェロンストックの水準を決定する方法を提案している。また、合流型、分岐型システムへの拡張も行われている。〔5〕は、〔4〕で提案された方法に基づく在庫水準を効率よく求めるための計算手順を示し、直列型システムを対象として目標サービス率が与えられている場合、総費用を最小化する各在庫ポイントにおける在庫水準の決定方法を提案している。さらに〔6〕では、〔5〕で求められる在庫水準によって管理する方式と最終段階のみで在庫を保有しMRPを用いて管理する方式を、様々の需要量分散と目標サービス率の下で総費用を尺度として比較した結果が報告されている。また、〔7〕、〔8〕、〔9〕は、製品の種類を1種類、許容応答時間が0、各段階の生産期間が0もしくは一定という条件の下で、ある在庫状態が与えられたとき、在庫保管費用、品切れによるペナルティコスト、生産調整費用、発注費用などの総費用を最小にする期毎の生産計画量を求める方法を提案している。

以上に述べたように、エシェロンストックを取り扱った研究の多くは、許容応答時間を0、製品の品種数を1種類に限定し、総費用最小化の観点から解析を行っている。

ところで、多段階の在庫問題に特有の変動の増幅は、エシェロンストックを把握しなくても小ロット生産あるいは短サイクル生産への移行により抑えられることが知られており、かんばん方式はその代表として挙げられる。一般的な定量引き取りに基づくかんばん方式は、かんばん枚数 $S$ をパラメータとした $(S-1, S)$ ポリシーを用いた有効在庫の管理方式と見なされる〔15〕。通常、有効在庫量は手持ち在庫量に仕掛在庫量を加え、それから引当量を差し引くことによって求められる〔2〕。かんばん方式に関しては、例えば〔10〕で、直列型システムを対象として、生産能力と在庫保有スペースに制限がある条件の下で、かんばん枚数、機械の信頼性、需要変動、安全在庫量などをパラメータとしてサービス率と在庫量の関係が求められている。また〔11〕では、 $r_i$ を段階 $i$ における発注点、 $R_i$ を補充点として、各段階の在庫管理方式を $(r_i, R_i)$ によって表わし、需要の到着率、加工時間、段取り時間などを条件として平均仕掛量、製品の平均在庫量、バ

ックオーダの確率を近似的に求める方法が提案されている。これらの研究は、許容応答時間が0、中間製品（部品）と製品の関係が1:1として解析を行っている。

近年、製品の多様化は一層進んでおり、極端な場合顧客は自分の欲する仕様の製品を短期間で取得することを望む。したがって、製造業者は製品在庫の保有によってのみ顧客の要求に応じるのではなく、複数種の製品に共通した中間製品を保有した上、加工して顧客の要求する製品を許容応答時間内に提供することが行われている。このような受注即応生産に関しては、すでに〔12〕において、原材料と中間製品が1種類、製品の品種数が複数種であって、注文量が顧客への応答時間の長さによって変化する場合、売上高から在庫保管費用を引いて求められる利益が最大になるように各在庫ポイントにおける在庫量を決定する方法を提案している。また〔13〕では、複数種の製品の製造に使用する構成部品（ユニット）を先行的に生産して、それを中間在庫として保有し、受注が確定した後構成部品を用いて製品を製造するという場合が取り上げられている。この研究では、在庫コストと顧客への応答時間を評価尺度として中間製品の在庫量（製品在庫は0と仮定）を決定する方法を示している。本研究と同様に、許容応答時間と目標サービス率を同時に考慮した研究として〔14〕がある。この研究では、許容応答時間の分布と需要量分布から各在庫ポイントへの注文量と補充量を求め、これより各在庫ポイントからの払い出し要求量を算出し、ある品切れ危険率で対応するための有効在庫量の在庫水準を決定するアルゴリズムが提案されている。ただし、製品品種数を1種類に限っており、在庫ポイント間を製品はロット単位で移動し、一定期間経過する都度、全ロットが一つの川下の在庫ポイントに同時に到達するような多段階の流通システムを対象としている。

したがって、目標サービス率と許容応答時間を入力パラメータとして各在庫ポイントにおける計画在庫量を解析的に求める本研究は、従来の多段階生産・在庫に関する研究で取り上げていない問題を扱ったものといえよう。

## 2.2 モデルの条件

解析を行うにあたり、本研究では以下の仮定と条件を設ける。

- 1) 原材料、中間製品、製品の3段階からなる直列型の多段階生産・在庫システムを対象とする。
- 2) 原材料および中間製品の品種数はそれぞれ1種類であり、中間製品から複数種の製品を製造し

て出荷する。

- 3) 原材料から中間製品、中間製品から製品までの製造は、それぞれ単一の生産ラインによって行われる。また、設備稼動時間は24時間とする。
- 4) 各生産期間における生産は、注文に応じるためのものと次期の需要に応じるために有効在庫量を計画在庫水準に戻すためのものからなり、前者の生産を優先して行う。また複数の製品を同時に作ることはできず、1品ずつ順次生産するものとする。
- 5) 製品の加工時間は製品間で一定とし、段取り替えは不要である。
- 6) 製品の需要量は正規分布に従い、製品間で独立である。
- 7) 顧客からの注文は、各生産期間の期首にまとめて示される。
- 8) 顧客の注文に対する許容応答時間  $A$  は注文にかかわらず一定である。
- 9) 中間製品および製品の生産指示サイクル  $T$  は1日とし（定期発注方式）、生産指示方式はプルタイプである。
- 10) 顧客の注文に許容応答時間内で対応できない場合でも生産は行われる。
- 11) 生産設備の加工能力は製品の1日当たり平均需要量より大きいものとする。
- 12) 原材料の品切れはないものとする。

### 2.3 計画在庫量決定のための解析

本研究では、製品および中間製品の計画在庫量決定にあたり、以下の3つの場合に分類して解析する。

(タイプ1) 目標サービス率を達成するために、顧客の注文をすべて製品の計画在庫で対応する場合（許容応答時間  $A=0$ ）

(タイプ2) 目標サービス率を達成するために、顧客の注文を製品の計画在庫と中間製品からの生産で対応する場合（ $0 < A < A^*$ ）

(タイプ3) 目標サービス率を達成するために、顧客の注文をすべて中間製品からの生産で対応する場合（ $A^* \leq A \leq A' \leq T$ ）

ただし、 $A^*$  はすべての製品の計画在庫量が0となる最短の許容応答時間を表し、 $A'$  は中間製品の計画在庫量が0となる最短の許容応答時間を表す。

#### 2.3.1 製品の計画在庫量決定のための解析

(a) 顧客の注文をすべて製品の計画在庫で対応する場合

この場合、顧客の注文に対するサービス率は、製品の計画在庫で対応できた注文量によって決まる。こ

で、製品  $i$  の計画在庫量を  $I_i$ 、需要量を表わす確率変数を  $x_i$ 、確率密度関数を  $f(x_i)$  とすると、製品  $i$  への注文に対して製品の計画在庫で対応可能な注文の平均量  $U_i$  は、製品  $i$  の平均需要量から計画在庫量  $I_i$  で対応できない注文の平均量を引いたものであるから、式(1)で求められる。

$$U_i = \int_0^\infty x_i f(x_i) dx_i - \int_{I_i}^\infty (x_i - I_i) f(x_i) dx_i \\ = \int_0^{I_i} x_i f(x_i) dx_i + I_i \int_{I_i}^\infty f(x_i) dx_i \quad (1)$$

ここで、 $f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{D_i}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \bar{D}_i)^2}{2\sigma_{D_i}^2}\right\}$  である。

ただし、

$\bar{D}_i$ : 製品  $i$  の1日当たりの平均需要量

$\sigma_{D_i}^2$ : 製品  $i$  の1日当たりの需要量分散

を表す。

ところで、サービス率の算出方法は大きく分けて不足回数に基づく場合と不足個数による場合の2通りある。本研究では、後者の不足個数に基づいてサービス率を定義する。したがって、製品全体に対する目標サービス率を  $S$  とすれば、式(2)を満たすように  $n$  個の変数  $I_i$  を決定しなければならない。

$$\sum_{i=1}^n U_i \geq S \sum_{i=1}^n \int_0^\infty x_i f(x_i) dx_i \quad (2)$$

(b) 顧客の注文を製品の計画在庫と中間製品からの生産で対応する場合

製品  $i$  の計画在庫量を  $I_i$  保有した場合、顧客の注文に対して製品の計画在庫で対応できずに中間製品からの加工が必要となる注文量  $B_i$  は、製品  $i$  の需要量を  $d_i$  とする式(3)で求められる。

$$B_i = \begin{cases} d_i - I_i & (d_i > I_i) \\ 0 & (d_i \leq I_i) \end{cases} \quad (3)$$

この式より、 $B_i$  の期待値  $E(B_i)$  および分散値  $V(B_i)$  は、それぞれ式(4)、(5)で得られる。

$$E(B_i) = \int_{I_i}^\infty (x_i - I_i) f(x_i) dx_i \quad (4)$$

$$V(B_i) = \int_0^{I_i} E^2(B_i) f(x_i) dx_i \\ + \int_{I_i}^\infty \{x_i - I_i - E(B_i)\}^2 f(x_i) dx_i \quad (5)$$

ここで、製品の計画在庫で対応できずに中間製品への需要に変換される注文量（以後、中間製品の変換需要量と呼ぶ）を中心極限定理に基づき、平均値  $E$  が式(6)、分散値  $V$  が式(7)で与えられる正規分布で仮定する。

$$E = \sum_{i=1}^n E(B_i) \quad (6)$$

$$V = \sum_{i=1}^n V(B_i) \quad (7)$$

したがって、中間製品の変換需要量を表わす確率変数を  $z$ 、その確率密度関数を  $h(z)$  とすれば、中間製品の変換需要量の平均値  $M$  は式(8)で求められる。

$$M = \int_0^{\infty} zh(z)dz \quad (8)$$

$$\text{ただし, } h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left\{-\frac{(z-E)^2}{2V}\right\}$$

さて、製品の計画在庫で対応できない顧客の注文を中間製品からの生産でどれだけ満たすことができるかは、中間製品の変換需要量に対する平均対応量から求められるが、その量は製品を製造する生産設備の加工能力、言い換えれば、製品の加工時間と許容応答時間によって決定される。いま、製品の加工時間を  $\tau$  (時/個) とすると、許容応答時間内に加工可能な中間製品量  $P$  は式(9)で求められるため、中間製品の変換需要量に対する平均対応量  $Q$  は、許容応答時間内に加工可能な中間製品量  $P$  を用いて式(10)で求められる。

$$P = A/\tau \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\infty} zh(z)dz - \int_P^{\infty} (z-P)h(z)dz \\ &= \int_0^P zh(z)dz + P \int_P^{\infty} h(z)dz \end{aligned} \quad (10)$$

したがって、目標サービス率  $S$  を達成するためには、式(11)を満足するように  $n$  個の変数  $I_i$  を決定しなければならない。

$$\sum_{i=1}^n U_i + Q \geq S \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} x_i f(x_i) dx_i \quad (11)$$

(c) 顧客の注文をすべて中間製品からの生産で対応する場合

各製品の計画在庫量  $I_i$  は明らかに 0 である。ただし、顧客の注文に対して製品の計画在庫を保有せず、すべて中間製品から製品を製造して対応するためには、少なくとも許容応答時間  $A^*$  が許されなければならない。以下にその時間の決定方法について述べる。

この場合、顧客の注文はすべて中間製品への需要に変換される。その変換需要量は、平均値  $\bar{D}$  が式(12)、分散値  $\sigma_D^2$  が式(13)で求められる正規分布に従う。

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^n \bar{D}_i \quad (12)$$

$$\sigma_D^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{D_i}^2 \quad (13)$$

式(10)から明らかなように、中間製品の変換需要量を表わす確率変数を  $y$ 、確率密度関数を  $g(y)$  とすると、中間製品の変換需要量に対する平均対応量  $Y$  は式(14)で得られる。

$$Y = \int_0^{\infty} yg(y)dy - \int_P^{\infty} (y-P)g(y)dy \quad (14)$$

$$\text{ただし, } g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D}} \exp\left\{-\frac{(y-\bar{D})^2}{2\sigma_D^2}\right\}$$

したがって、顧客の注文をすべて中間製品からの生産で対応可能な最短の許容応答時間  $A^*$  は、式(15)を満足する中間製品の量  $P^*$  を加工するのに必要な時間として式(16)で定まる。

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} yg(y)dy - \int_{P^*}^{\infty} (y-P^*)g(y)dy \\ = S \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} x_i f(x_i) dx_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$A^* = \tau P^* \quad (16)$$

### 2.3.2 中間製品の計画在庫量決定のための解析

(d) 顧客の注文をすべて製品の計画在庫で対応する場合

中間製品への生産指示は、製品の計画在庫で対応できなかった注文に応じるためと、次期の需要に対応するために製品の有効在庫量を計画在庫水準に戻すための2種類からなる。さて、それらを合計した中間製品への平均生産オーダー数  $PO$  は、各製品の平均需要量の和となるため式(17)で与えられる。

$$PO = \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} x_i f(x_i) dx_i \quad (17)$$

したがって、当該生産期間(1日)の間に原材料を用いて中間製品を  $PO$  生産する必要がある。モデルの条件より、原材料から中間製品、中間製品から製品を製造する生産設備の加工能力は、製品1日あたりの平均需要量より大きく、また、目標サービス率を達成するために必要な顧客の注文はすべて製品の計画在庫で対応するため、許容応答時間が0における中間製品の計画在庫量  $J(0)$  は0となる。

$$J(0) = 0 \quad (18)$$

(e) 顧客の注文を製品の計画在庫と中間製品からの生産で対応する場合

この場合も(d)と同様に、中間製品への生産指示は、当期の注文に応じるためと次期の需要に対応するために製品の有効在庫量を計画在庫水準に戻すための2種類からなり、中間製品への平均生産オーダー数は  $PO$  となる。ただし、前者の生産指示の中には、目標サービス率を実現するためのものが含まれている。ここで、目標サービス率を達成するためには、式(9)で求まる中間製品の量  $P$  が必要であり、許容応答時間内に供給しなければならない。いま、中間製品の加工時間を  $\delta$  (時/個) とすると、許容応答時間中に中間在庫ポイントへ供給可能な中間製品の量  $G$  は式(19)で求められる。

$$G = A/\delta \quad (19)$$

したがって、中間製品の計画在庫量  $J(A)$  は式(20)で得られる。

$$J(A)=\max(0, P-G) \quad (20)$$

(f) 顧客の注文をすべて中間製品からの生産で対応する場合

この場合、中間製品への生産指示は顧客の注文に応じるために行われ、平均生産オーダー数は  $PO$  となる。目標サービス率を達成するためには、この平均生産オーダー数に対して式(15)を満たす中間製品の量  $P^*$  が必要となるから、(e)の場合と同様に考えて中間製品の計画在庫量  $J(A)$  は式(21)で求められる。

$$J(A)=\max(0, P^*-G) \quad (21)$$

したがって、中間製品およびすべての製品の計画在庫量が 0 となる最短の許容応答時間  $A'$  は、式(22)を満たす  $A$  として定められる。

$$P^*-G=P^*-A/\delta=0 \quad (22)$$

### 3. 数 値 実 験

本章では、3.1 に示す入力パラメータを与えた時の中間製品、製品の計画在庫量を計算し、その結果から許容応答時間の変化とともに所定のサービス率を達成する(1)全製品の計画在庫量、(2)中間製品の計画在庫量、および(3)中間製品と全製品の計画在庫量の合計がどのように変化するかを示す許容応答時間と計画在庫量の間の置換関係を示す。なお、様々な長さの許容応答時間に対応した計画在庫量の計算は、許容応答時間の長さに応じて、2.3 で取り上げた3タイプの中から該当する場合の解析方法を選んで用いるが、その際に必要となる  $A^*$  および  $A'$  の値を表2に整理した。さらに、許容応答時間  $A$  が 0 から  $A^*$  ( $0 < A < A^*$ ) まで変化した場合の中間製品の計画在庫量増加に対する製品の計画在庫量減少の割合を表す置換率

表 1-1 需要パターン 1

	製品 1	製品 2	製品 3	製品 4	製品 5
平 均	50	70	50	55	150
分 散	15 <sup>2</sup>	25 <sup>2</sup>	20 <sup>2</sup>	20 <sup>2</sup>	55 <sup>2</sup>

表 1-2 需要パターン 2

	製品 1	製品 2	製品 3	製品 4	製品 5
平 均	50	70	50	55	150
分 散	5 <sup>2</sup>	7 <sup>2</sup>	8 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	12 <sup>2</sup>

表 2 許容応答時間(分)と用いる解析タイプの関係

使用する解析のタイプ	タイプ 1	タイプ 2	タイプ 3
許容応答時間 (需要パターン 1)	0	$0 < A < 790 (A^*)$	$790 \leq A \leq 988 (A')$
許容応答時間 (需要パターン 2)	0	$0 < A < 716 (A^*)$	$716 \leq A \leq 895 (A')$

$SR(A)$  を式(23)で定義し、考察する。

$$SR(A)=\frac{\sum_{i=1}^n(I_i(0)-I_i(A))}{J(A)-J(0)} \quad (0 < A < A^*) \quad (23)$$

ただし、 $I_i(0), I_i(A)$  は、許容応答時間が 0 および  $A$  における製品  $i$  の計画在庫量、また、 $J(0), J(A)$  は中間製品の計画在庫量を表わす。

#### 3.1 実験データ

以下に、実験に用いる入力パラメータ値をまとめておく。

〈固定因子〉

製品品種数  $n$ : 5

目標サービス率  $S$ : 95(%)

中間製品の加工時間  $\delta$ : 1/24 (時/個)

製品の加工時間  $\tau$ : 1/30 (時/個)

〈変動因子〉

許容応答時間  $A$ : 0~17 (時間) までの 5 分間隔

製品の 1 日当たりの需要量分布 (表 1-1, 1-2)

#### 3.2 製品の計画在庫量の計算手順

中間製品の計画在庫量は容易に計算可能なため、ここでは各製品の計画在庫量を算出する手順について述べる。製品の計画在庫量  $I_i$  を求めるということは式(2)あるいは式(11)の関係式を満たすような  $n$  個の変数  $I_i$  を決定することである。ただし、条件式が単一であるため、式(2)あるいは式(11)の関係式を満たす製品の計画在庫量の組み合わせは多数ある。そこで本研究では、製品  $i$  の計画在庫量  $I_i$  の合計量  $I$  を変数として追加し、式(25)で定義する在庫配分係数を用いて全製品の計画在庫の合計量  $I$  と製品  $i$  の計画在庫量  $I_i$  の関係を定め、 $(n+1)$  個の条件式から  $(n+1)$  個の変数の値を定める問題として捉えて計画在庫量を決定することとした。計算手順を示すと次のようになる。

〈計算手順〉

step 1: 入力パラメータの値を設定する。

step 2: 全製品の計画在庫量の合計  $I$  を 0 にセットする。

step 3:  $I$  を式(24)を用いて各製品に分配し、製品  $i$  の計画在庫量  $I_i$  を算出する。

$$I_i=k_i \times I \quad (24)$$

ただし、 $k_i$  は製品  $i$  への在庫配分係数であり、各製品の平均需要量の大きさに比例して定義する。

$$k_i=\frac{\int_0^{\infty} x f(x_i) dx_i}{\sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} x f(x_i) dx_i} \quad (25)$$

step 4: サービス率を許容応答時間がタイプ 1 の場合には式(2), タイプ 2 の場合には式(11)で算出し, 目標サービス率と比較する.

step 5: サービス率が目標サービス率に達していなかった場合, 全製品の計画在庫量の合計  $I$  を 1 増やし, step3 にもどる. サービス率が目標サービス率に達している場合は終了する.

### 3.3 許容応答時間と計画在庫量の置換関係

以下に数値実験の結果を示す.

実験結果から以下のようなことが分かる.

(1) 図 1 から, 許容応答時間が短くなるにつれて目標サービス率を維持するために必要な製品の計画在庫量は増加し, その増加率は大きくなる傾向が認められる. とくに, 需要パターン 2 に比べて需要量分散が大きいパターン 1 の場合はその傾向がより顕著に認められる. また, 需要量分散が大きいほどすべての製品の計画在庫量が 0 になる許容応答時間 ( $A^*$ ) は長くなる.

(2) 図 2 から, 中間製品の計画在庫量は製品の場合と異なり, 許容応答時間が長くなるに従って直線的に増加している. 増加量は製品の需要量分布とは無関係であり, 許容応答時間内に中間在庫ポイントへ供

給される中間製品量と消費される中間製品量によって決まる. さらに, 中間製品の計画在庫が増加から減少に変わる時刻は製品の計画在庫量が 0 となる時刻 ( $A^*$ ) に一致する.

(3) 図 3 より, 許容応答時間の変化に伴う中間製品と製品の計画在庫を加えた全計画在庫量の推移は, 製品の計画在庫量の場合と同様の傾向が認められ, 全計画在庫量は製品の計画在庫量からより大きな影響を受けることがわかる. また当然のことであるが, 全計画在庫量の合計が許容応答時間の増加とともに減少するスピードは製品の計画在庫量のそれに比べて遅い. したがって, 全計画在庫量が 0 となる最短の許容応答時間 ( $A'$ ) は, 製品の計画在庫量のそれに比べて長くなる.

### 3.4 許容応答時間と置換率 $SR(A)$ の関係

図 4 から, 置換率  $SR(A)$  は需要パターンにかかわらず許容応答時間が 0 からある時間まで急激に増加している. これは, 1 種類の中間製品から複数種の製品が製造できるという中間製品の持つ組み合わせ効果が許容応答時間の増加とともに顕著になることを示していると考えられる. また, 置換率は需要のばらつきが激しいパターン 1の方が大きくなっており, 製品需要のばらつきが大きいほど, 中心極限定理による中間製品

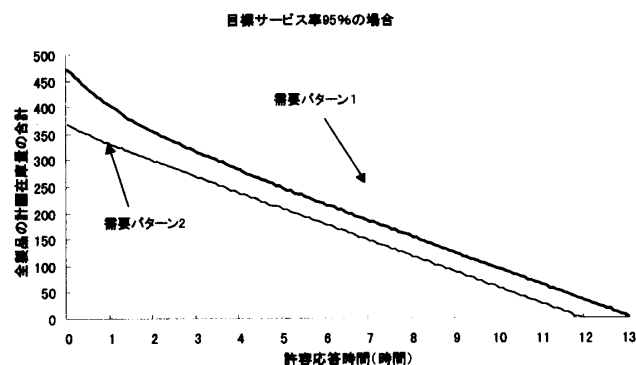


図 1 許容応答時間と全製品の計画在庫量の合計の置換関係

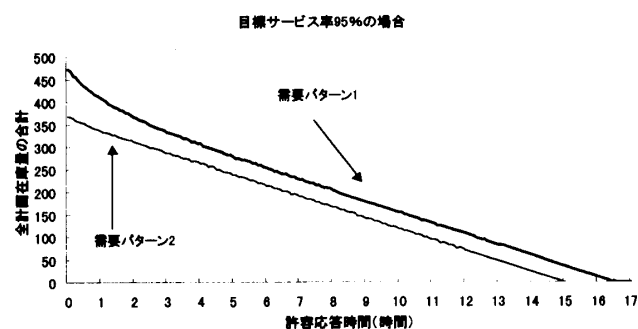


図 3 許容応答時間と全計画在庫量の置換関係

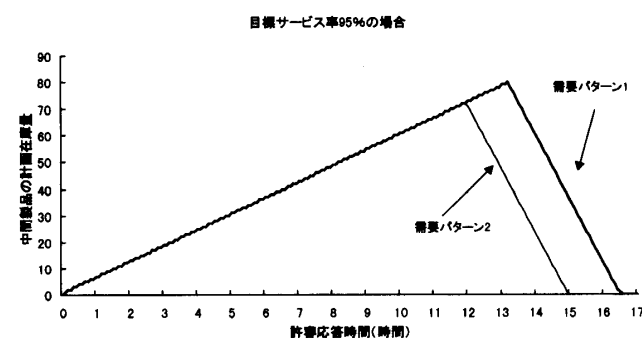


図 2 許容応答時間と中間製品の計画在庫量の置換関係

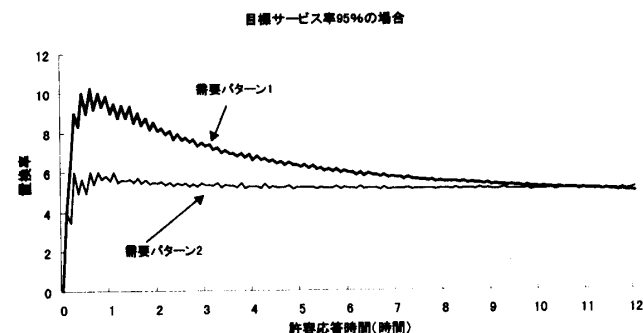


図 4 許容応答時間と置換率の関係

への需要の安定が製品の計画在庫量の削減に影響することが分かる。さらに、許容応答時間がある長さ以上になると置換率は減少しながら収束することも分かる。

#### 4. シミュレーション実験

##### 4.1 実験の目的と条件

2.3では、中間製品、製品の計画在庫量を決定するために、中間製品の変換需要量分布を中心極限定理に基づき正規分布で仮定した近似的な解析方法を示した。ところで、モデルの仮定と式(3)から明らかなように、製品の計画在庫量の大きさによって中間製品の変換需要量の正規分布による近似の程度が異なる。そのために、本章では解析的に求めた計画在庫量の下でシミュレーション実験を行って中間製品の変換需要量データを収集し、式(26)および(27)で定義される歪度、尖度を用いてその正規性を評価する。なお、データが正規分布に従うほど歪度は0、尖度は3に近づくことが知られている[16]。

$$\text{歪度} = \frac{n^{-1} \sum (x_i - \bar{x})^3}{\left\{ \sqrt{n^{-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \right\}^3} \quad (26)$$

$$\text{尖度} = \frac{n^{-1} \sum (x_i - \bar{x})^4}{\left\{ \sqrt{n^{-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \right\}^2} \quad (27)$$

ここで、 $n$ はデータ数、 $x_i$ はデータ、 $\bar{x}$ はデータの平均値を表わす。

さらに、様々の許容応答時間の下でシミュレーション実験を行ってサービス率を求め、目標サービス率と比較し、中間製品の変換需要量分布の正規性の程度と解析の精度の関係を考察する。なお、シミュレーション実験では3で用いたものと同一の数値データを使用する。1回のシミュレーションにおける各製品に対する注文の発生回数を180回（1日1回として6カ月分）とし、ランの回数は入力パラメータの変動因子の各組合わせに対して5回とした。ここで、許容応答時間は中間製品およびすべての製品の計画在庫量が0となる最短の17時間までとし、1時間単位で変化させた。また、正規性の評価は製品の計画在庫量が0となる最短の14時間までとする。

##### 4.2 実験結果と考察

表3は、需要パターン1における中間製品の変換需要量分布が正規分布に近似する程度を許容応答時間の長さを変えて示したものである。また、図5は目標サービス率とシミュレーション結果から得たサービス率の関係を表わしている。なお、いずれの場合も5回のシミュレーション結果から求めた値を平均したも

表3 中間製品の変換需要量を正規分布で仮定した場合の近似の程度を示す表

(需要パターン1の場合)

許容応答時間 (分)	製品計画 在庫量の 合計	解析で用いる値 (正規分布)		シミュレーション値			
		平均値	標準偏差	平均値	標準偏差	歪度	尖度
60	402	41.0	35.1	38.2	32.5	0.74	3.3
120	354	65.0	43.4	61.8	39.0	0.54	2.7
180	314	89.1	49.6	86.1	45.6	0.49	2.5
240	282	112.0	54.1	109.1	49.1	0.35	2.5
300	247	140.5	58.2	137.9	53.8	0.24	2.4
360	215	167.1	61.2	164.8	58.1	0.14	2.4
420	184	195.0	63.4	193.0	59.0	0.06	2.5
480	154	222.1	64.9	220.2	61.3	-0.02	2.5
540	124	251.8	66.0	250.0	62.0	-0.07	2.6
600	94	280.1	66.7	278.2	62.4	0.12	2.7
660	64	310.6	67.1	308.7	63.5	-0.15	2.5
720	34	340.3	67.3	338.3	63.6	-0.20	2.9
780	4	369.2	67.4	367.1	64.0	-0.11	2.9
840	0	375.2	67.4	373.0	64.5	-0.14	2.9

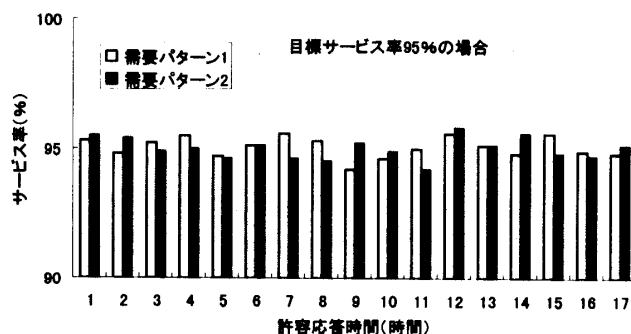


図5 目標サービス率とサービス率の関係

のである。

(1) 表3から、許容応答時間の長さにかかわらず、解析で用いる正規分布の平均値および標準偏差とシミュレーションで得た観測データの平均値および標準偏差に大きな違いは認められない。ただし、算定された歪度は、許容応答時間が短くなるほど、言い換えれば、製品の計画在庫量が多いほど、0からはずれており、近似の程度が悪くなることが分かる。逆に、許容応答時間が長くなれば近似の精度が非常に良くなっている。なお、需要パターン2についても同様の結果が求められている。

(2) 図5から、解析的に求めた中間製品と製品の計画在庫量を保有することによって達成したサービス率は、許容応答時間の長さによらず目標サービス率の±1%以内に入っていることが分かる。

(3) 正規分布への近似の程度が悪い許容応答時間の短い場合に目標サービス率が実現できたのは、製品



の計画在庫で対応できる注文量が多くなり、中間製品の変換需要量分布はサービス率にほとんど影響しなかったためと考えられる。

以上により、中間製品の変換需要量を正規分布で近似する本解析方法は、目標サービス率を保証する計画在庫量の算定に利用できると言えよう。

## 5. 結 論

本研究では、所与の許容応答時間の下で、目標サービス率に従って顧客の注文を満たすために必要な中間製品と製品の計画在庫量を解析的に求める方法を提案した。またその解析方法を用いると、許容応答時間の変化につれて中間製品と製品の計画在庫量がどのように変化するかを示す許容応答時間と計画在庫量の置換関係が求められることを示した。さらに、解析的に求めた中間製品と製品の計画在庫量を保有すれば目標サービス率が近似的に達成できることをシミュレーション実験によって確かめ、本研究で提案した解析方法の妥当性を示した。

本研究の成果は、様々の製造業における受注即応生産システムの設計と評価に広く応用できるものと思われる。

## 参 考 文 献

- [1] 竹田 賢, 黒田 充: “受注即応生産方式の一般概念とその金型部品製造ラインへの応用”, 日本経営工学会平成5年度秋季研究大会予稿集, pp. 82-83 (1993)
- [2] 黒田 充, 田部 勉, 圓川隆夫, 中根甚一郎: 「生産管理」, 朝倉書店, 東京 (1989)
- [3] Clark, A. J. and Scarf, H.: “Optimal Policies for a Multi-echelon Inventory Problem”, *Manage. Sci.*, Vol. 6, No. 4, pp. 475-490 (1960)
- [4] Langenhoff, L. J. G. and Zijm, W. H. M.: “An Analytical Theory of Multi-echelon Production/Distribution Systems”, *Statistica Neerlandica*, Vol. 44, No. 3, pp. 149-174 (1990)
- [5] Van Houtum, G. J. and Zijm, W. H. M.: “Computational Procedures for Stochastic Multi-echelon Production Systems”, *Int. J. Prod. Econ.*, Vol. 23, No. 1-3, pp. 223-237 (1991)
- [6] Zijm, H. and Van Houtum, G. J.: “On Multi-stage Production/Inventory Systems under Stochastic Demand”, *Int. J. Prod. Econ.*, Vol. 35, No. 1-3, pp. 391-400 (1994)
- [7] Williams, J. F.: “Multi-echelon Production Scheduling When Demand is Stochastic”, *Manage. Sci.*, Vol. 20, No. 9, pp. 1253-1263 (1974)
- [8] 郭 煒, 圓川隆夫, 秋庭雅夫: “生産リードタイムを考慮した確率的多段階/生産在庫モデルに関する研究”, 日本経営工学会誌, Vol. 37, No. 6, pp. 353-358 (1987)
- [9] 増井忠幸: “多段階多期間生産一在庫計画の安定性と期待費用”, 日本経営工学会誌, Vol. 41, No. 4, pp. 250-256 (1990)
- [10] Deleersnyder, J. and Hodgson, T. and O'Gray, P.: “Kanban Controlled Pull Systems: An Analytic Approach”, *Manage. Sci.*, Vol. 35, No. 9, pp. 1079-1091 (1989)
- [11] Altiok, T. and Ranjan, R.: “Multi-stage, Pull-type Production Systems”, *IIE Trans.*, Vol. 27, No. 2, pp. 190-200 (1995)
- [12] Hanssman, F.: *Operations Research in Production and Inventory Control*, John & Sons, U. S. A., (1962)
- [13] Lee, L.: “Effective Inventory and Service Management through Production and Process Redesign”, *Oper. Res.*, Vol. 44, No. 1, pp. 151-159 (1996)
- [14] 増井忠幸: “多段階在庫モデルの在庫水準の決定に関する研究”, 日本経営工学会誌, Vol. 27, No. 2, pp. 173-177 (1976)
- [15] 圓川隆夫: “多段階生産・在庫マネジメント”, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 30, No. 11, pp. 689-695 (1985)
- [16] 品質管理セミナー・ベーシックコース・テキスト: 「検定と推定」, 日本科学技術連盟, pp. 84-86, 東京 (1994)
- [17] 水野幸男: 「在庫管理入門」, 日科技連, 東京 (1974)
- [18] 小田中敏男: 「最適生産在庫システム論」, 槇書店, 東京 (1994)