

ゲーム理論的均衡解探索のための疑似勾配系モデルのニューラルネットワーク実現とその挙動*

堀江 亮太**・相吉英太郎**・宮野 吉平**

The Neural Networks Realization of Quasi-Gradient System to Search for Equilibrium Solutions in Game Theory and Their Dynamical Behavior*

Ryota HORIE**, Eitaro AIYOSHI** and Kippei MIYANO**

Mutually coupled plural Neural Networks (N.N.) modules are proposed from the view point of noncooperative game theory. First, new dynamical models, which is called "Quasi-Gradient System", to search the Nash Equilibrium (NE) points under $[0,1]$ -interval or nonnegative constraints are proposed. The stability of the proposed searching models is analyzed by the linearization approach. In addition, relations between the Lotka-Volterra's ecological model or the population genetics model and the proposed searching models are indicated. Second, new mutually coupled plural N.N. modules are introduced to realize the proposed searching model for problems with quadratic objective functions. the asymmetric Hopfield type N.N. can be regarded as a special class of the proposed N.N. modules. Last, by simulations for simple problems, the bifurcations in dynamical behavior such as converging to different NE points, cyclic state transition with no NE points and other exceptional cases are shown.

1. はじめに

互いに異なる関数を最小化するダイナミクスが相互干渉するある種の複雑現象を, 非協力連続ゲームにおける Nash 均衡解探索の計算モデルと解釈したうえで, このような均衡化ダイナミクスの実現回路として, 互いに異なる 2 次関数を最小化する複数の相互結合型ニューラルネットワーク (以降 N.N. と記す) をそれぞれ単一のモジュールとして干渉結合させた N.N. を提案し, 非協力的相互干渉による均衡化現象固有の新機能を実現する。

提案する N.N. モデルは, 非対称結合係数の Hopfield 型 N.N. のモデルも包含し, 数理生態学における一般化 Lotka-Volterra 方程式や集団遺伝学における数理モデルをも実現する。干渉結合させた N.N. モジュールの研究は数多く研究されてきたが¹⁾⁻⁴⁾, 均衡解探索の計算モデルの観点からの数理解析は, (非協力連続ゲームと一般化 Lotka-Volterra 方程式などの数理モデルや N.N. との

関連性を示すのみでなく,) 非線形ダイナミクスへの一つの工学的接近法となり得ると言える。具体的には, 非負制約付問題や上下限制約付問題に対する均衡解探索モデルとして, 一般化 Lotka-Volterra 方程式や, 集団遺伝学の数理モデルをそれぞれ再解釈し, それらと等価な N.N. の構造を導出する。均衡解探索モデルの線形化安定性解析をおこない, また簡単なシミュレーションにより, 提案する N.N. の均衡解への安定的な収束や, 均衡解不在時の周回軌道の出現, その他の例外的な振る舞い, パラメータに依存した分岐現象を確認する。

2. 均衡化問題の定式化

P 種の変数 $\mathbf{x}^p \in \mathbf{R}^{n_p}, p=1, \dots, P$ を指数とする P 種類の最小化関数 $E_p(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^P): \mathbf{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbf{R}^{n_P} \rightarrow \mathbf{R}^1, p=1, \dots, P$ を考え, また変数 \mathbf{x}^p ごとに独立な制約集合を X^p とするとき, 均衡化問題は, 「最小化演算 "min" を含む等式

$$\begin{cases} E_1(\bar{\mathbf{x}}^1, \bar{\mathbf{x}}^2, \dots, \bar{\mathbf{x}}^P) = \min_{\mathbf{x}^1 \in X^1} E_1(\mathbf{x}^1, \bar{\mathbf{x}}^2, \dots, \bar{\mathbf{x}}^P) \\ \vdots \\ E_P(\bar{\mathbf{x}}^1, \bar{\mathbf{x}}^2, \dots, \bar{\mathbf{x}}^P) = \min_{\mathbf{x}^P \in X^P} E_P(\bar{\mathbf{x}}^1, \dots, \bar{\mathbf{x}}^{P-1}, \mathbf{x}^P) \end{cases} \quad (1)$$

* 原稿受付 1999 年 1 月 13 日

** 慶應義塾大学 理工学部 Faculty of Science and Technology, Keio University; 3-14-1 Hiyoshi, Kouhoku ward, Yokohama city, Kanagawa 223-8522, JAPAN

Key Words: noncooperative game theory, Nash equilibrium, neural networks, Lotka-Volterra equation.

を満たす $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^{P-1}, \bar{x}^P)$ が存在するならばこれを求めよ」という問題で、この解 \bar{x} を $R^{n_1} + \dots + R^{n_P}$ 次元実空間の直積集合 $X^1 \times \dots \times X^P$ における最小化関数 E_1, \dots, E_P のゲーム的均衡解または Nash 均衡解⁵⁾ (以降単に均衡解という) という。なお、関数 $E_p, p=1, \dots, P$ は微分可能であるとし、“min” の下付き添字は、その変数のみに関する最小化演算であることを示す。本稿では、変数 x^p の上添字は変数の種類 (プレイヤー) を表すが、変数のべき乗 (N 乗) は $(x^p)^N$ と表記して区別することにする。

ここで、 p 番目の最小化問題

$$\min_{x^p \in X^p} E_p(x^1, \dots, x^p) \quad (2)$$

において、 x^p 以外の変数 $x^q, q=1, \dots, P, q \neq p$ が固定されたもとで、この問題の大域的最適解 $y^p \in X^p$ に対してなりたつ不等式

$$\begin{aligned} E_p(x^1, \dots, x^{p-1}, y^p, x^{p+1}, \dots, x^P) \\ \leq E_p(x^1, \dots, x^{p-1}, x^p, x^{p+1}, \dots, x^P) \\ \text{for } \forall x^p \in X^p \end{aligned} \quad (3)$$

を考え、これによる集合

$$\begin{aligned} D_p = \{ (x^1, \dots, x^{p-1}, y^p, x^{p+1}, \dots, x^P) \\ \in X^1 \times \dots \times X^P \mid (3) \text{ 式が成り立つ} \} \end{aligned} \quad (4)$$

を関数 E_p に関する大域的合理集合ということにすると、この P 個の合理集合の共通集合

$$\bigcap_{p=1}^P D_p \quad (5)$$

が均衡解の集合となる。とくにこの要素の均衡解を大域的均衡解という。なお (3) の代わりに、局所的最適解 $y^p \in X^p$ とそのある近傍 $B(y^p)$ に対してなりたつ不等式

$$\begin{aligned} E_p(x^1, \dots, x^{p-1}, y^p, x^{p+1}, \dots, x^P) \\ \leq E_p(x^1, \dots, x^{p-1}, x^p, x^{p+1}, \dots, x^P) \\ \text{for } \forall x^p \in X^p \cap B(y^p) \end{aligned} \quad (6)$$

による集合 D_p を局所的合理集合といい、 $D_p, p=1, \dots, P$ の内一つでも局所的合理集合が存在するとき、これらの共通集合の要素を局所的均衡解という。

本論文では、均衡点探索のための演算回路として N.N. を実現するために、制約集合 X^p が

(I) 閉区間 $[0, 1]$ の直積集合の場合：

$$X^p = \{x^p \mid 0 \leq x_i^p \leq 1, i=1, \dots, n_p\}, p=1, \dots, P \quad (7a)$$

(II) 第一象限の場合：

$$X^p = \{x^p \mid x_i^p \geq 0, i=1, \dots, n_p\}, p=1, \dots, P \quad (7b)$$

の 2 通りの場合について、最小化関数 $E_p, p=1, \dots, P$ が次のような干渉項付 2 次関数の場合を考える。

$$\begin{aligned} E_p(x^1, \dots, x^P) = \frac{1}{2} x^{pT} W^p x^p + \theta^{pT} x^p \\ + \sum_{q=1, q \neq p}^P x^{pT} V^{pq} x^q, \quad p=1, \dots, P \end{aligned} \quad (8)$$

3. 均衡解探索の疑似勾配系モデル

問題 (1) の均衡解探索モデル^{6), 7)} として、

$$\begin{cases} \frac{dx_i^1(t)}{dt} = -g(x_i^1(t)) \frac{\partial E_1(x^1(t), \dots, x^P(t))}{\partial x_i^1} \\ \quad i=1, \dots, n_1 \\ \quad \vdots \\ \frac{dx_i^P(t)}{dt} = -g(x_i^P(t)) \frac{\partial E_P(x^1(t), \dots, x^P(t))}{\partial x_i^P} \\ \quad i=1, \dots, n_P \end{cases} \quad (9)$$

を考える。ここで関数 $g(x)$ は変数 x の制約集合の境界に近づく程、勾配をゼロに縮退させる、いわば「プレーキ関数」である。制約集合 X^p が (I), (II) の場合それぞれ

$$(I) : g(x_i^p) = x_i^p(1 - x_i^p) \quad (10a)$$

$$(II) : g(x_i^p) = x_i^p \quad (10b)$$

で与えられる。明らかに

$$\frac{dx_i^p(t)}{dt} = 0, \quad i=1, \dots, n_p, \quad p=1, \dots, P \quad (11)$$

となる定常点で、問題 (1) 式の均衡解であるための必要条件式 (Kuhn-Tucker 条件^{6), 8)}) が成立する。

ここで注意すべきことは、関数 $E_p, p=1, \dots, P$ は P 種類のベクトル変数 x^1, \dots, x^P の関数で、その部分変数 x^p のダイナミクスが関数 E_p の変数 x^p のみの部分的な勾配

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p(x)}{\partial x^p} = & \left(\frac{\partial E_p(x^1, \dots, x^P)}{\partial x_1^p}, \right. \\ & \left. \dots, \frac{\partial E_p(x^1, \dots, x^P)}{\partial x_{n_p}^p} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

によって与えられることである。これらの部分的勾配を、互いに異なる P 種の関数 $E_p, p=1, \dots, P$ に関して合成した $\sum_{p=1}^P n_p$ 次元横ベクトル

$$\left(\frac{\partial E_1(x)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial E_P(x)}{\partial x^P} \right) \quad (13)$$

を、均衡化問題 (1) の疑似勾配ベクトルとよぶ。ただし、 x は合成ベクトル $(x^1T, \dots, x^PT)^T$ である。

ところで、最小化問題に対する勾配系モデルとは異なり、均衡化問題に対する疑似勾配系モデル (9) 式では、均衡解が存在したとしても漸近安定であるとは限らない⁶⁾。そこで、線形化安定性解析を行えば、疑似勾配系モデル

(9) 式の定常点 \bar{x} 近傍における安定判別をすることができる。すなわち、疑似勾配系モデル (9) 式の定常点 \bar{x} におけるヤコビ行列 $J(\bar{x})$ の固有値の実部がすべて負であれば、この定常点は漸近安定で、逆に、少なくとも一つの固有値が正の実部をもつとき、この定常点是不安定である。関数 E_p が (8) 式の 2 次関数で制約集合 X^p が (7) 式の場合の疑似勾配系モデル (9) 式のヤコビ行列 $J(\bar{x})$ の計算の詳細を付録 1. に示しておく。この他に、目的関数 $E(x), p=1, \dots, P$ がすべて凸関数で対角強凸関係⁶⁾にあれば、疑似勾配系モデル (9) 式は唯一の漸近安定な均衡解に収束することが知られている。

4. 均衡解探索モデルのニューラルネットワーク実現

干渉項付き 2 次関数 (8) 式に、障壁関数を付加した変換関数を、制約集合を二つの場合に分けて

(I) 閉区間 $[0,1]$ の直積集合の場合：

$$\begin{aligned} \hat{E}_p(x) = E_p(x) \\ + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n_p} \{x_i^p \ln x_i^p + (1-x_i^p) \ln(1-x_i^p)\} \end{aligned} \quad (14a)$$

(II) 第一象限の場合：

$$\hat{E}_p(x) = E_p(x) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n_p} (x_i^p \ln x_i^p - x_i^p) \quad (14b)$$

とする。そして、問題 (1) 式の関数 E の代わりに \hat{E} を用いた均衡化問題とその均衡解探索モデルを考え、これを N.N. で実現する。(14) 式の第 2 項目の障壁関数は、ニューロンの 1 次遅れ要素を導出するために付け加えた関数で、制約領域の境界上で勾配が ∞ となり、(7) 式の制約条件を考慮しなくても、 $\tau \rightarrow \infty$ としたときの関数 \hat{E} の局所的最小点が関数 E の局所的最小点へ漸近することが数値計画法の障壁法の理論により示すことができる。ここで、 P 種類の N.N. モジュールを用意し、第 p 番目 N.N. モジュールの第 i ニューロン素子の内部状態変数 u_i^p を用いて、その出力 x_i^p を

$$x_i^p(t) = f(u_i^p(t)) \quad (15)$$

と表し、両辺を時間変数 t で全微分すると

$$\frac{dx_i^p(t)}{dt} = \frac{df(u_i^p(t))}{du_i^p} \frac{du_i^p(t)}{dt} \quad (16)$$

となる。(9) 式の E を \hat{E} で代替したブレーキ付疑似勾配系モデルを実現するために

$$\begin{cases} \frac{df(u_i^p(t))}{du_i^p} = g(x_i^p(t)) \end{cases} \quad (17a)$$

$$\begin{cases} \frac{du_i^p(t)}{dt} = -\frac{\partial \hat{E}_p(x(t))}{\partial x_i^p} \end{cases} \quad (17b)$$

と置く。(I) の場合に対応したニューロンの出力特性は (10a), (17a) 式よりシグモイド関数

$$x_i^p = f(u_i^p) = \frac{1}{1 + \exp(-u_i^p)} \quad (18)$$

となる⁹⁾。これに対して (II) の場合に対応したニューロンの出力方程式は (10b), (17a) 式より

$$\frac{df(u_i^p(t))}{du_i^p} = x_i^p(t) \quad (19)$$

となり、指数関数の出力特性

$$x_i^p = f(u_i^p) = \exp(u_i^p) \quad (20)$$

が得られる。また (18), (20) 式のもとでは (14) 式の勾配が

$$\frac{\partial \hat{E}_p(x)}{\partial x_i^p} = \frac{1}{\tau} u_i^p + \frac{\partial E_p(x)}{\partial x_i^p}, \quad i=1, \dots, n \quad (21)$$

と表されることから、(8), (17b), (21) 式より

$$\begin{aligned} \frac{du_i^p(t)}{dt} = & -\frac{1}{\tau} u_i^p(t) - \sum_{j=1}^{n_p} w_{ij}^p x_j^p(t) - \theta_i^p \\ & - \sum_{q=1, q \neq p}^P \sum_{j=1}^{n_q} v_{ij}^{pq} x_j^q(t) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。まず、(18) 式や (20) 式より Fig. 1(a), (b) のような構造のニューロン素子が得られる。さらに (22) 式より、第 p 番目と第 q 番目の N.N. モジュールを取り出してその結合構造を示すと、Fig. 2 のようになる。

以上のニューラルネットワーク実現で導出されたモデルは、 x に関しては疑似勾配系モデル (9) 式とまったく同じダイナミクスを実現する。ただ異なる点はニューラルネットワークモデルが内部状態を用いて表されていることであり、これによって (9) 式の実線部分のブレーキ関数が (18), (20) 式の実線形入出力特性で実現されることである。

ところで、制約集合が (I) の場合で、 $n_p=1, p=1, \dots, P$ とし、変数や係数の添字 i, j をすべて省略すると、Fig. 2 の N.N. モジュールの結合構造は、Fig. 3 のような単一の相互結合型 N.N. となる。一般に $v^{pq} \neq v^{qp}$ であるから、これは非対称相互結合を有する Hopfield 型 N.N.¹⁰⁾ であることがわかる。すなわち、非対称相互結合型 N.N. は、均衡解探索モデルを実現した N.N. の結合構造において、すべての N.N. モジュールがニューロン素子をつつだけ持つ特殊な場合に相当するものであり、その定常点の安定性を前述と同様に議論することができる。

また、制約集合が (II) の場合でも $n_p=1, p=1, \dots, P$ とし、変数や係数の添字 i, j をすべて省略し、

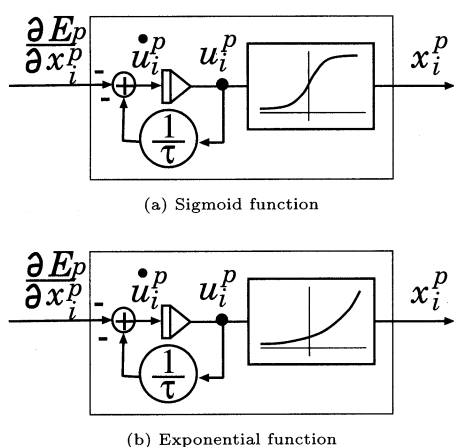


Fig. 1 Inner structure of neuron

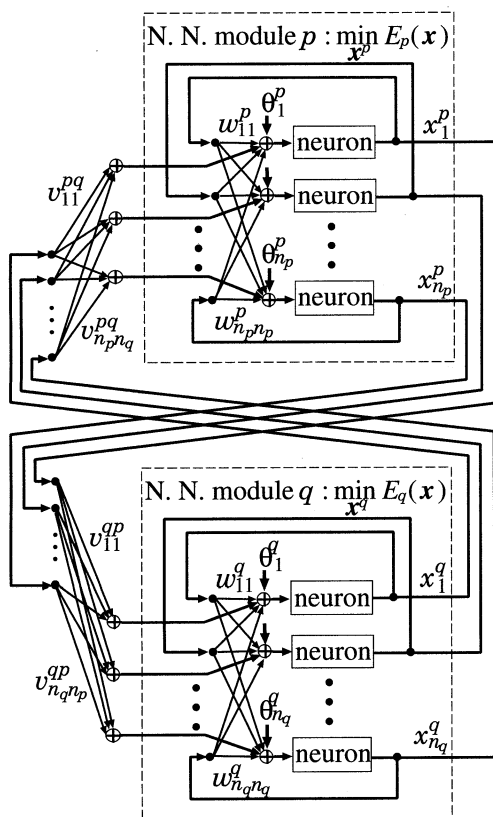


Fig. 2 Structure of mutually coupled plural N.N. modules

$$\theta^p = -a_{p0}, \quad w^p = -a_{pp}, \quad v^{pq} = -a_{pq} \quad (23)$$

とすると, (9) 式は P 種の生物種間の相互作用をモデル化した一般化 Lotka-Volterra 方程式

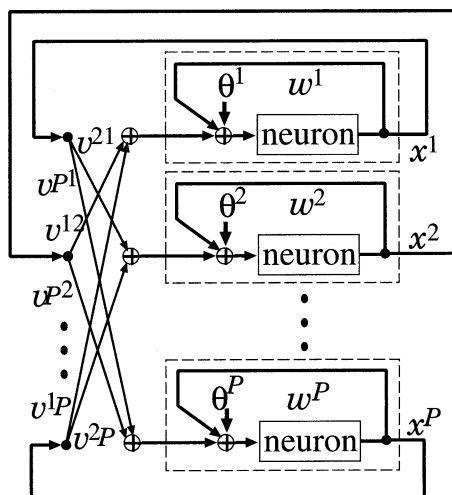


Fig. 3 Asymmetric Hopfield type N.N.

$$\frac{dx^p(t)}{dt} = x^p(t) \left\{ a_{p0} + \sum_{q=1}^P a_{pq} x^q(t) \right\} \quad (24)$$

$p = 1, \dots, P$

となる. ここで, $x^p, p=1, \dots, P$ は P 種の生物種の個体数密度を表し, 定数 $a_{p0}, p=1, \dots, P$ は種 p の内的増加率 (または減少率) を, 係数 $a_{pq}, p, q=1, \dots, P$ は p 種の個体群の成長に対する q 種の影響を表し, 増進効果なら正, 阻害効果なら負である. $P=2$ のときの (24) 式の解軌道にリミットサイクルは存在しないが, $P \geq 3$ のときに定数と係数によって多様な解軌道が存在し, 安定定常点の他にも, リミットサイクル¹¹⁾や特殊なリミットサイクルであるヘテロクリニックサイクル¹²⁾に漸近する軌道が存在することが知られており, また数値シミュレーションによるカオス軌道の存在も報告されている¹³⁾. 制約集合が (I) の場合と同様に $n_p=1, p=1, \dots, P$ とした

$$\frac{dx^p(t)}{dt} = x^p(t)(1-x^p(t)) \left\{ a_{p0} + \sum_{q=1}^P a_{pq} x^q(t) \right\} \quad (25)$$

$p = 1, \dots, P$

は集団遺伝学の数理モデルとなる¹⁴⁾.

5. シミュレーション結果

2 次関数最小化の均衡解の存在性と探索ダイナミクスの安定性との関係について, 簡単な数値例のシミュレーション結果を用いて考察する. 制約集合が (II) の場合には, 均衡解の存在性との関連性が陽に考察されていないが, 探索モデルの挙動自体は Lotka-Volterra 方程式の解軌道として, すでに詳細に検討されている. そこで, 本論文では制約集合が (II) の場合は省略し, (I) の場合につ

いてのみ, (18), (22) 式から x_i^p を消去した内部状態モデルを用いたシミュレーション結果を報告する. なお, 幾何的な理解が可能ないように $P=2, n_1=n_2=1$ とし, 時間刻み幅を $\Delta t=0.005$ 秒とした Runge-Kutta 法で数値積分した.

【例題 1】 E_1, E_2 がともに凸または凹関数で, それらの勾配がともに 0 となる定常点が制約の内部にある場合.

$$\begin{cases} E_1(x^1, x^2) = \frac{1}{2}\alpha(x^1)^2 + (0.5 - 0.5\alpha)x^1 - x^1x^2 \\ E_2(x^1, x^2) = \frac{1}{2}\alpha(x^2)^2 - (1 + 0.5\alpha)x^2 + 2x^2x^1 \end{cases} \quad (26)$$

これらの関数は $\alpha > 0$ のときに共に凸 2 次関数, $\alpha = 0$ のとき線形関数, $\alpha < 0$ のとき凹 2 次関数となり, 制約条件がないとき, α の値とは無関係に

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1(x)}{\partial x^1} = \alpha x^1 + (0.5 - 0.5\alpha) - x^2 = 0 \\ \frac{\partial E_2(x)}{\partial x^2} = \alpha x^2 - (1 + 0.5\alpha) + 2x^1 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

を満たす $(0.5, 0.5)$ が, 定常点となる. $\tau = \infty$ としたときの元問題 (1) 式における合理解集合 D_1, D_2 とそれらの交点である均衡解, 定常点とそこにおけるヤコビ行列の固有値の実部の符号, および $\tau = 1000$ としたときのベクトル場と探索軌道を Fig. 4 に示す. 定常点は○, 定常点のうち大域的均衡解を●, 局所的均衡解を灰色の丸印で示した. 合理解集合 D_1, D_2 はそれぞれ一点破線, 二点破線で示し, それらが大域的合理解集合のときは黒, 局所的合理解集合のときは灰色で示した. また, α に対応した合理解集合と均衡解を Table 1 に示す. ここで, (3), (6) 式の定義より, 大域的合理解集合ならば局所的合理解集合となるが, ここでは便宜上, 局所的合理解集合の中で大域的でないものを局所的合理解集合と呼び, 大域的合理解集合と区別することにする.

$\alpha \geq 0$ のときは, D_1, D_2 はともに大域的合理解集合で, それらの唯一の交点 $(0.5, 0.5)$ が大域的均衡解となる. 一方, $\alpha < 0$ のとき, D_1, D_2 はともに制約領域の上限と下限に分離して現れ, それらすべての断片部分はそれぞれさらに大域的な断片部分と局所的な断片部分から構成される. $-1 \leq \alpha < 0$ のとき, D_1, D_2 は交点を持たず均衡解は存在しない. $-2 \leq \alpha < -1$ のとき, 下限の D_1 の局所的な部分と上限の D_2 の大域的な部分が端点 $(0, 1)$ で交わり, 同様に上限の D_1 と下限の D_2 が $(1, 0)$ で交わり, 二つの局所的均衡解となる. $\alpha < -2$ のとき, さらに下限の D_1 の大域的な部分と下限の D_2 の局所的な部分が端点 $(0, 0)$ で交わり, 上限の D_1 と上限の D_2 が $(1, 1)$ で交わり, $[0, 1]$ 境界の四つの端点すべてが局所的均衡解となる.

Fig. 4 より, 均衡解が存在しそれらの固有値が二つとも負のとき, 探索軌道はそれらの均衡解に収束し, そのような漸近安定な均衡解が複数ある場合は初期値に応じて異なる均衡解に収束する. 疑似勾配系モデル (9) 式は局所探索モデルであるため, 探索軌道の振る舞いは均衡解の大域性には無関係である. また, $\alpha = -0.5$ (f) のとき均衡解は存在せず, $\tau = \infty$ とすると軌道はヘテロクリニックサイクルとなる. $\tau = 1000, 100$ のときの出力変数 x_1 の時間発展をそれぞれ (k), (l) に示す. (k) では振動周期は徐々に長くなり, 図示した 5000 秒まででは見かけ上ヘテロクリニックサイクルに見えるが, 内部状態の 1 次遅れ項のためいずれ制約領域 $[0, 1]$ の境界の近くに存在するリミットサイクルに収束する. これに対して (l) では, 5000 秒までにリミットサイクルへの収束が確認される.

探索ダイナミクスの例外的な振る舞いとして, $\alpha = -1.0$ (g), -2.0 (i) のとき, 軌道は非均衡解の定常点に収束する. これらの非均衡解は $\tau = \infty$ とすると固有値が負と 0 の片側安定の点であり, すべての固有値が負でない定常点の中には, それが均衡解でなくても探索ダイナミクスがトラップされることがある例である. また逆に, $\alpha = 0.0$ (e) のとき $(0.5, 0.5)$ が均衡解となるが, $\tau = \infty$ とするとその固有値は純虚数となり, 探索ダイナミクスが保存系となり, 均衡解であってもすべての固有値の実部が負でないため探索軌道が収束しない例である. ただし, (e) は $\tau = 1000$ とした内部状態の 1 次遅れ項のため, $(0.5, 0.5)$ は漸近安定となり軌道は徐々にであるが $(0.5, 0.5)$ に収束している. 以上のパラメータ α による目的関数の変化にともなう均衡解の存在と探索ダイナミクスの振る舞いの変化は分岐現象と見なせる. (g), (i), (e) のような探索ダイナミクスの例外的な振る舞いの生じる定常点は, すべて 0 固有値が現れる臨界点となっていることに注意されたい.

【例題 2】 E_1, E_2 がともに凸関数で, それらの勾配がともに 0 となる定常点が制約の内部にある場合.

$$\begin{cases} E_1(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^1)^2 - 1.5x^1 + 2x^1x^2 \\ E_2(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^2)^2 - 1.5x^2 + 2x^2x^1 \end{cases} \quad (28)$$

関数系としては例題 1 と同様であるが, 合理解集合 D_1, D_2 がより鋭角的に交差する例である.

同様に, 合理解集合 D_1, D_2 と均衡解, 定常点と固有値の実部の符号, ベクトル場と探索軌道を Fig. 5(a) に示す. 大域的合理解集合 D_1, D_2 の交点 $(0, 1), (0.5, 0.5), (1, 0)$ が大域的均衡解となるが, 探索軌道は二つの固有値が負の $(0, 1), (1, 0)$ に収束し, 固有値が正と負のサドル

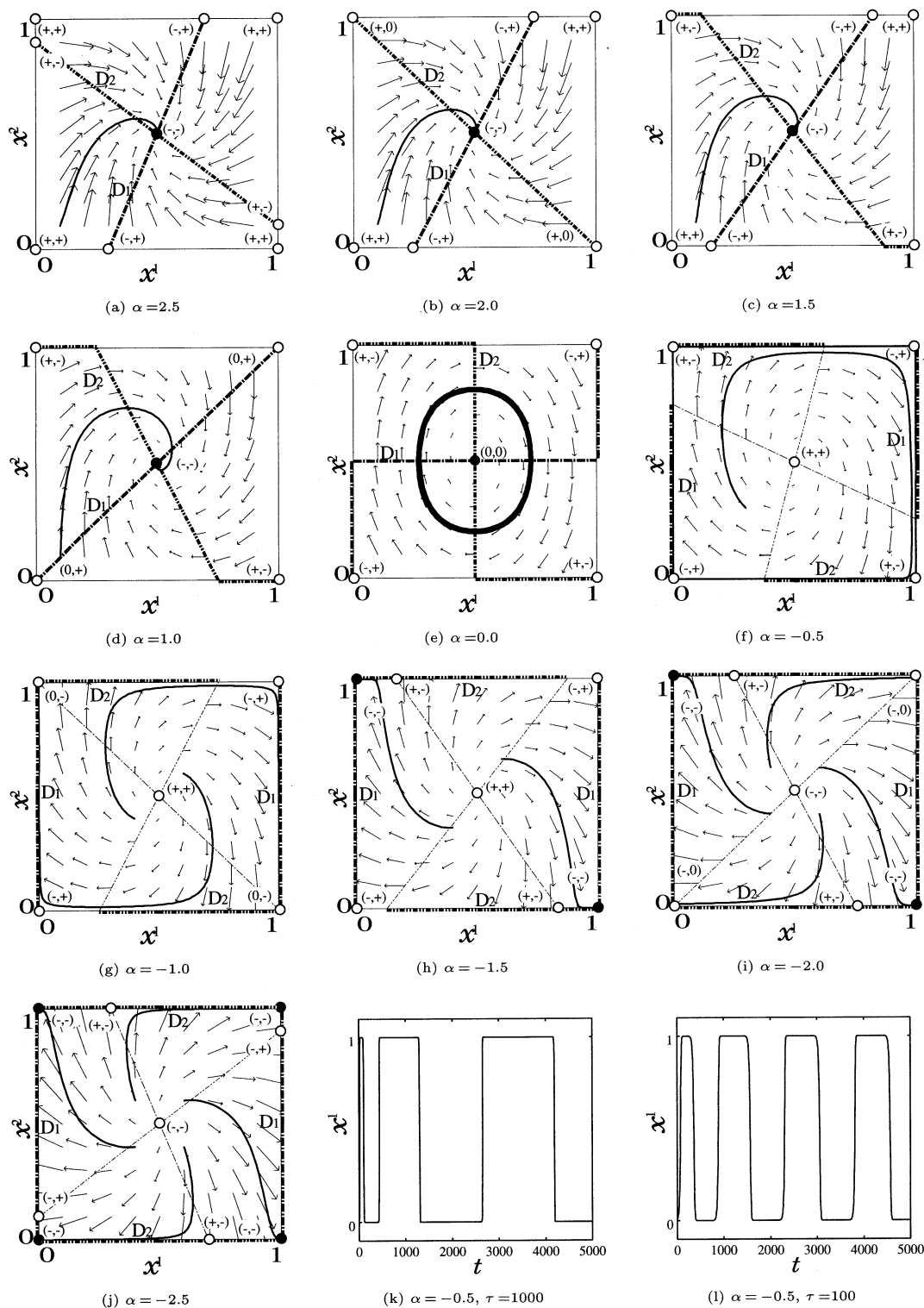


Fig. 4 Orbits and vector fields of the proposed N.N. for problem 1

Table 1 Rational solutions sets and Nash equilibrium points of problem 1 (“[G]” denotes a global rational solutions set or a global equilibrium point. “[L]” denotes local and not global ones.)

α	D_1	D_2	\bar{x}
$2 \leq \alpha$	$x_1 = 0.5 + \frac{-0.5 + x^2}{\alpha} [G]$	$x_2 = 0.5 + \frac{1 - 2x^1}{\alpha} [G]$	$(0.5, 0.5) [G]$
$1 \leq \alpha < 2$		$x_2 = 1 [G]$ if $0 \leq x^1 < 0.5(1 - 0.5\alpha)$	
$0 < \alpha < 1$	$x_1 = 0 [G]$ if $0 \leq x^2 < 0.5(1 - \alpha)$	$x_2 = 0.5 + \frac{1 - 2x^1}{\alpha} [G]$ if $0.5(1 - 0.5\alpha) \leq x^1 \leq 0.5(1 + 0.5\alpha)$	
	$x_1 = 0.5 + \frac{-0.5 + x^2}{\alpha} [G]$ if $0.5(1 - \alpha) \leq x^2 \leq 0.5(1 + \alpha)$	$x_2 = 0 [G]$ if $0.5(1 + 0.5\alpha) < x^1 \leq 1$	
$\alpha = 0$	$x_1 = 0 [G]$ if $0 \leq x^2 < 0.5$ $x_1 = 0.5 [G]$ if $x^2 = 0.5$ $x_1 = 1 [G]$ if $0.5 < x^2 \leq 1$	$x_2 = 1 [G]$ if $0 \leq x^1 < 0.5$ $x_2 = 0.5 [G]$ if $x^2 = 0.5$ $x_2 = 0 [G]$ if $0.5 < x^1 \leq 1$	
$-1 \leq \alpha < 0$	$x_1 = 0 [G]$ if $0 \leq x^2 \leq 0.5(1 + \alpha)$ $x_1 = 0 [G], 1 [L]$ if $0.5(1 + \alpha) < x^2 < 0.5$ $x_1 = 0 [G], 1 [G]$ if $x^2 = 0.5$ $x_1 = 0 [L], 1 [G]$ if $0.5 < x^2 < 0.5(1 - \alpha)$ $x_1 = 1 [G]$ if $0.5(1 - \alpha) \leq x^2 \leq 1$	$x_2 = 1 [G]$ if $0 \leq x^1 \leq 0.5(1 + 0.5\alpha)$ $x_2 = 0 [L], 1 [G]$ if $0.5(1 + 0.5\alpha) < x^1 < 0.5$ $x_2 = 0 [G], 1 [G]$ if $x^1 = 0.5$ $x_2 = 0 [G], 1 [L]$ if $0.5 < x^1 < 0.5(1 - 0.5\alpha)$ $x_2 = 0 [G]$ if $0.5(1 - 0.5\alpha) \leq x^1 \leq 1$	$(0, 1) [L]$ $(1, 0) [L]$
$-2 \leq \alpha < -1$	$x_1 = 0 [G], 1 [L]$ if $0 \leq x^2 < 0.5$ $x_1 = 0 [G], 1 [G]$ if $x^2 = 0.5$ $x_1 = 0 [L], 1 [G]$ if $0.5 < x^2 \leq 1$	$x_2 = 0 [L], 1 [G]$ if $0 \leq x^2 < 0.5$ $x_2 = 0 [G], 1 [G]$ if $x^2 = 0.5$ $x_2 = 0 [G], 1 [L]$ if $0.5 < x^2 \leq 1$	$(0, 0) [L]$ $(0, 1) [L]$ $(1, 0) [L]$ $(1, 1) [L]$

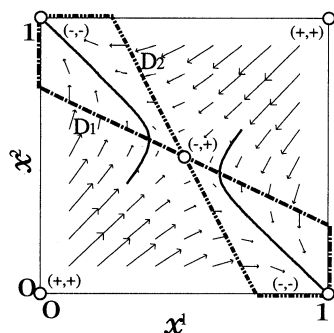
$(0.5, 0.5)$ は、いわゆる不安定均衡解となっている。

$$x^2 = -\frac{1}{2}x^1 + 0.75, \quad 0 \leq x^1 \leq 1 \quad (30)$$

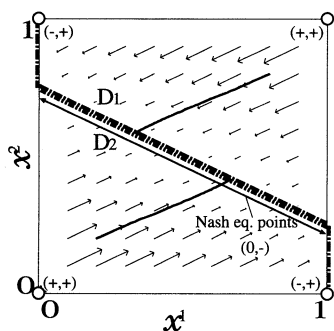
$$\begin{cases} E_1(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^1)^2 - 1.5x^1 + 2x^1x^2 \\ E_2(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^2)^2 - 0.75x^2 + 0.5x^2x^1 \end{cases} \quad (29)$$

同様に探索軌道とベクトル場を Fig. 5(b) に示す。大域的合理解集合 D_1 , D_2 の共通集合の線分

上の点すべてが大域的均衡解となり、 $\tau = \infty$ のとき、探索軌道は初期値に応じて固有値が負と 0 となるこの線分上の点に収束する。ただし、Fig. 5(b) では、 $\tau = 1000$ とした内部状態の 1 次遅れ項のため、 $(0.5, 0.5)$ が漸近安定となり軌道はいったん (30) 式の線分上に達した後徐々に



(a)



(b)

Fig. 5 Orbits and vector fields of the proposed N.N. for problem 2

線分上を $(0.5, 0.5)$ に収束している.

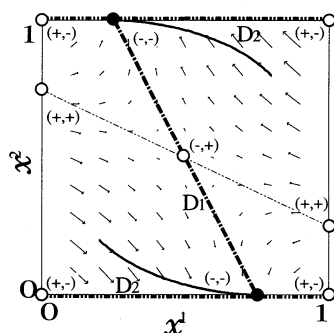
【例題 3】 E_1, E_2 の一方が凸, 他方が凹関数で, それらの勾配がともに 0 となる定常点が制約の内部にある場合.

$$\begin{cases} E_1(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^1)^2 - 0.75x^1 + 0.5x^1x^2 \\ E_2(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + 0.75x^2 - 0.5x^2x^1 \end{cases} \quad (31)$$

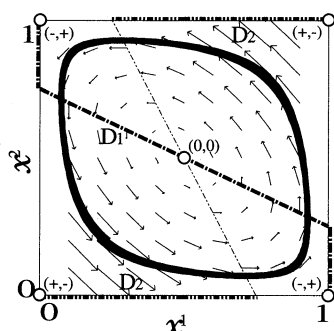
同様に探索軌道とベクトル場を Fig. 6(a) に示す。 D_1 は大域的合理解集合であり、 D_2 は制約領域の上限と下限に分離して現れ、それら二つは大域的合理解集合と局所的合理解集合から構成される。 D_1 と D_2 の局所的合理解集合の部分の交点 $(0.75, 0)$ 、 $(0.25, 1.0)$ は固有値がともに負の漸近安定な局所的均衡解となり、軌道は初期値に応じてどちらかに収束している。

$$\begin{cases} E_1(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^1)^2 - 1.5x^1 + 2x^1x^2 \\ E_2(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + 1.5x^2 - 2x^2x^1 \end{cases} \quad (32)$$

同様に探索軌道とベクトル場を Fig. 6(b) に示す. 大域的合理理解集合 D_1 と大域的合理理解集合と局所的合理理解集合が



(a)



(b)

Fig. 6 Orbits and vector fields of the proposed N.N. for problem 3

らなる D_2 は交点を持たず、均衡解は存在しない。 $\tau = \infty$ とすると定常点 (0.5, 0.5) の固有値は純虚数となり探索ダイナミクスは保存系となる。ただし、Fig. 6(b) では $\tau = 1000$ とした内部状態の 1 次遅れ項のため、(0.5, 0.5) は漸近安定となり軌道は徐々にこの点に収束している。

【例題 4】 E_1, E_2 ともに凸または凹関数で、それらの勾配が 0 となる定常点が制約の外部にある場合

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^1)^2 + 0.5x^1 - 0.5x^1x^2 \quad (33a) \\ E_1(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^1)^2 - 2x^1 - 2x^1x^2 \quad (33b) \\ E_1(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}(x^1)^2 - 0.5x^1 + 0.5x^1x^2 \quad (33c) \\ E_1(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}(x^1)^2 + 2x^1 + 2x^1x^2 \quad (33d) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^2)^2 - 2x^2 - 0.5x^1x^2 \quad (34a) \\ E_2(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^2)^2 + x^2 + 2x^1x^2 \quad (34b) \\ E_2(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + 2x^2 + 0.5x^1x^2 \quad (34c) \\ E_2(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}(x^2)^2 - x^2 - 2x^1x^2 \quad (34d) \end{array} \right.$$

(33a)~(33d) と (34a)~(34d) のすべての組合せに対し
て、大域的合理解集合 D_1 , D_2 の交点である唯一の大域

Table 2 Problems with an asymptotic stable Nash equilibrium point

$E_2 \quad D_2$	E_1, D_1	(33a), $\{x x^1=0\}$	(33b), $\{x x^1=1\}$	(33c), $\{x x^1=1\}$	(33d), $\{x x^1=0\}$
(34a), $\{x x^2=1\}$		(0,1)	(1,1)	(1,1)	(0,1)
(34b), $\{x x^2=0\}$		(0,0)	(1,0)	(1,0)	(0,0)
(34c), $\{x x^2=0\}$		(0,0)	(1,0)	(1,0)	(0,0)
(34d), $\{x x^2=1\}$		(0,1)	(1,1)	(1,1)	(0,1)

的均衡解が $[0,1]$ 境界の端点に存在し、それらの固有値は二つとも負であり漸近安定である。これを Table 2 に示す。

6. 結論と今後の課題

非協力連続ゲームにおける均衡探索モデルを提案し、目的関数が2次のときはN.N. モジュールが干渉結合した構造で演算回路実現されることを示した。またそのダイナミクスが、固有値がすべて負の均衡解に収束することを、線形化安定性により解析し、数値シミュレーションにより確認した。一方、最小化ダイナミクスとは異なる例外的な振る舞いとして、サドルとなる不安定均衡解や0固有値を持つ漸近安定でない均衡解の存在、また0固有値を持つ非均衡解への収束も確認された。

従来の Hopfield 型 N.N. による連想記憶¹⁵⁾の研究をはじめ、合目的な工学システムのダイナミクスは、勾配系の最小化ダイナミクスに基づいて設計されることが多いが、均衡探索モデルにおいて目的関数を適切に選ぶことで、例外的な振る舞いを排除しつつ、均衡解への収束や均衡解不在時の周回の状態遷移など、より複雑なダイナミクスを合目的に設計することができると言える。たとえば、均衡解を連想パターンとするような連想記憶¹⁶⁾が考えられるが、このことの詳細は別の機会に譲る。また、与えられた $\sum_{p=1}^P n_p$ 次元の非線形常微分方程式が P 種の目的関数の疑似勾配系であるならば、 P 人ゲームの均衡化ダイナミクスとして合目的に再解釈できると言える。

参考文献

- 1) 大隅, 梶浦, 安西: 連想記憶のためのマルチモジュールニューラルネットワーク; 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol. J75-D-II, No. 11, pp. 1948-1958 (1992)
- 2) 小澤, 堤: モジュール化ニューラルネットモデルの提案とその連想記憶能力の評価; 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol. J77-D-II, No. 6, pp. 1135-1145 (1994)
- 3) 佐野, 國藤: カオスをもつ2体フロー型神経回路モデルのモジュール統合; 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J80-A, No. 1, pp. 74-82 (1997)
- 4) Kosko B.: Bidirectional associative memories; *IEEE Trans. Systems, Man, Cybernetics*, Vol.18, No. 1, pp. 49-60 (1988)

- 5) J. F. Nash: Equilibrium points in N -person games; *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 36, pp. 48-49 (1950)
- 6) 志水: 多目的と競争の理論, 共立出版, 第2章 (1982)
- 7) H. I. Bozma: Computation of Nash equilibria: admissibility of parallel gradient descent; *J. Optimiz. Theo. & Appl.*, Vol. 90, No. 1, pp. 45-61 (1996)
- 8) J. B. Rosen: Existence and uniqueness of equilibrium points for concave N -person games; *Econometrica*, Vol. 33, No. 3, pp. 520-534 (1965)
- 9) 相吉, 吉川: ニューラルネットワークによる最適化: その疑問と課題—もう一つの接近法—; 計測と制御, Vol. 34, No. 5, pp. 358-366 (1995)
- 10) M. Shiino, H. Nishimori and M. Ono: Nonlinear master equation approach to asymmetrical neural networks of Hopfield-Hemmen type; *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 58, pp. 763-766 (1989)
- 11) J. Hofbauer: On the occurrence of limit cycles in the Volterra-Lotka equation; *Nonlinear Anal., Theo., Meth. & Appl.*, Vol. 5, No. 9, pp. 1003-1007 (1981)
- 12) R. M. May and W. J. Leonard: Nonlinear aspects of competition between three species; *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 29, No. 2, pp. 243-253 (1975)
- 13) A. Arneodo, P. Couillet and C. Tresser: Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations; *Physics Letters*, Vol. 79A, No. 4, pp. 259-263 (1980)
- 14) P. Schuster, K. Sigmund, J. Hofbauer, R. Gottlieb and P. Merz: Selfregulation of behavior in animal societies III. games between two populations with selfinteraction; *Biol. Cybern.*, Vol. 40, No. 1, pp. 17-25 (1981)
- 15) J. J. Hopfield: Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities; *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 79, pp. 2554-2558 (1982)
- 16) R. Horie and E. Aiyoshi: Neural networks realization of searching models for Nash equilibrium points and their application to associative memories; *SMC'98 Conf. Proc.*, pp. 1886-1891 (1998)

付 録

付録 1. 均衡探索疑似勾配系モデルの線形化

関数 E_p が (8) 式の2次関数で、制約集合 X^p が (7) 式の場合について、均衡探索モデル (9) 式の定常点 \bar{x} における右辺のヤコビ行列

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} J^{11}(\bar{x}) & \dots & J^{1P}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J^{P1}(\bar{x}) & \dots & J^{PP}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (A1)$$

の $n_p \times n_q$ の部分行列 $J^{pq}(\bar{x})$ の第 (i, j) 成分

$$d_{ij}^{pq}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j^q} \left[-g(\bar{x}_i^p) \frac{\partial E_p(\bar{x})}{\partial x_i^p} \right] \quad (A2)$$

を求める．関数 E_p の 1 階および 2 階偏微分が

$$\frac{\partial E_p(\bar{x})}{\partial x_i^p} = \sum_{j=1}^{n_p} w_{ij}^p x_j^p + \theta_i^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P \sum_{j=1}^{n_q} v_{ij}^{pq} x_j^q \quad (A3)$$

$$\frac{\partial^2 E_p(\bar{x})}{\partial x_j^q \partial x_i^p} = \begin{cases} w_{ij}^p, & p=q \\ v_{ij}^{pq}, & p \neq q \end{cases} \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, n_p, \quad p = 1, \dots, P \\ j &= 1, \dots, n_q, \quad q = 1, \dots, P, \quad q \neq p \end{aligned}$$

となることを考慮すると， $d_{ij}^{pq}(\bar{x})$ は次のようになる．

(I) 閉区間 $[0, 1]$ の直積集合の場合：

$$\begin{aligned} d_{ij}^{pq}(\bar{x}) = & -\{\delta_{ij}^{pq} \left(\sum_{k=1}^{n_p} w_{ik}^p \bar{x}_k^p + \theta_i^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P \sum_{j=1}^{n_q} v_{ij}^{pq} \bar{x}_j^q \right) \right. \\ & \left. + \bar{x}_i^p (1 - \bar{x}_i^p) \times \begin{cases} w_{ij}^p, & p=q \\ v_{ij}^{pq}, & p \neq q \end{cases} \right\} \quad (A5) \end{aligned}$$

$$\delta_{ij}^{pq} = \begin{cases} 1 - 2\bar{x}_i^p, & i=j \text{ and } p=q \\ 0, & i \neq j \text{ or } p \neq q \end{cases} \quad (A6)$$

$$i = 1, \dots, n_p, \quad j = 1, \dots, n_q$$

議論簡略化のため， $n_1 = \dots = n_P = 1$ の場合を考え，下付き添字 i, j を省略して表すと，

$$d^{pq}(\bar{x}) = \begin{cases} -\{(1 - 2\bar{x}^p)(w^p \bar{x}^p + \theta^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P v^{pq} \bar{x}^q) \\ \quad + \bar{x}^p (1 - \bar{x}^p) w^p\}, & p=q \\ -\bar{x}^p (1 - \bar{x}^p) v^{pq}, & p \neq q \end{cases} \quad (A7)$$

となる．さらに， $0 < \bar{x}^p < 1$ の場合と $\bar{x}^p = 0$ または $\bar{x}^p = 1$ の場合で分けると， $0 < \bar{x}^p < 1$ の場合は

$$\frac{\partial E_p(\bar{x})}{\partial x^p} = w^p \bar{x}^p + \theta^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P v^{pq} \bar{x}^q = 0 \quad (A8)$$

であることに注意すると，次のようになる．

$$d^{pq}(\bar{x}) = - \begin{cases} 0 < \bar{x}^p < 1 \text{ のとき} \\ \begin{cases} -\bar{x}^p (1 - \bar{x}^p) w^p, & p=q \\ -\bar{x}^p (1 - \bar{x}^p) v^{pq}, & p \neq q \end{cases} \\ \bar{x}^p = 0 \text{ のとき} \\ \begin{cases} -(\theta^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P v^{pq} \bar{x}^q), & p=q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \\ \bar{x}^p = 1 \text{ のとき} \\ \begin{cases} (w^p + \theta^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P v^{pq} \bar{x}^q), & p=q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \end{cases} \quad (A9)$$

(II) 第一象限の場合：

$$\begin{aligned} d_{ij}^{pq}(\bar{x}) = & -\{\delta_{ij}^{pq} \left(\sum_{k=1}^{n_p} w_{ik}^p \bar{x}_k^p + \theta_i^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P \sum_{j=1}^{n_q} v_{ij}^{pq} \bar{x}_j^q \right) \\ & + \bar{x}_i^p \times \begin{cases} w_{ij}^p, & p=q \\ v_{ij}^{pq}, & p \neq q \end{cases} \} \quad (A10) \end{aligned}$$

$$\delta_{ij}^{pq} = \begin{cases} 1, & i=j \text{ and } p=q \\ 0, & i \neq j \text{ or } p \neq q \end{cases} \quad (A11)$$

$$i = 1, \dots, n_p, \quad j = 1, \dots, n_q$$

$n_1 = \dots = n_P = 1$ の場合は

$$d^{pq}(\bar{x}) = \begin{cases} -\left(w^p \bar{x}^p + \theta^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P v^{pq} \bar{x}^q \right) - w^p \bar{x}^p, & p=q \\ -\bar{x}^p v^{pq}, & p \neq q \end{cases} \quad (A12)$$

となる．さらに， $\bar{x}^p > 0$ の場合と $\bar{x}^p = 0$ の場合で分けると，次のようになる．

$$d^{pq}(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{x}^p > 0 \text{ のとき} \\ \begin{cases} -\bar{x}^p w^p, & p=q \\ -\bar{x}^p v^{pq}, & p \neq q \end{cases} \\ \bar{x}^p = 0 \text{ のとき} \\ \begin{cases} -(\theta^p + \sum_{q=1, q \neq p}^P v^{pq} \bar{x}^q), & p=q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \end{cases} \quad (A13)$$
