ロバスト制御のための学習理論的システム同定

大石　泰章[†]

Learning-Theoretic System Identification for Robust Control

Yasuaki OISHI[†]

あらまし　本論文では不可知学習理論（agnostic learning theory）に基づいたシステム同定法を構成し，その性質を調べる．本同定法は，同定結果としてシステムの集合を与え，最悪ケースでの性能保証を行うモデル集合同定法の一種であり，ロバスト制御と組み合わせて使うのに適している．しかしモデル集合同定に関する従来の方法と異なり，本同定法は漸近論的でない結果を与え，同定結果のシステム集合に零収束性を保証し，同定対象や雑音に関する仮定をほとんど必要としない．同定法の性質の解析として，ある精度と信頼度を持つ同定結果を得るために十分な入出力データの数（サンプル複雑度）の評価を行い，更にその改良を試みる．加えて，同定法の拡張の可能性について考察し，数値例を示す．

キーワード　モデル集合同定，不可知学習理論，一様収束性，サンプル複雑度，ロバスト制御

1. まえがき

ロバスト制御は制御対象に関する知識が不確かであることを想定した制御手法であり，$\mathcal{H}^\infty$ 制御の枠組みのもとで急速な発展を遂げ，80 年代に一応の理論的完成を見た [5], [7], [11], [23]．しかし現実の系にロバスト制御を適用しようとすると，制御対象の数学的モデル，特に「知識の不確かさ」のモデルが必要となり，従来のシステム同定では不十分なことがわかった．このためロバスト制御との整合性を意識して 90 年代に盛んに研究されるようになった同定法がモデル集合同定，最悪ケース同定，セットメンバシップ同定などと呼ばれるものである．

ロバスト制御では，知識の不確かさを表すために制御対象を単一のシステムではなくシステムの集合として記述し，その集合のどの要素に対しても一定の制御性能を保証するように，つまり最悪ケースを想定して制御器を構成する．これに呼応してモデル集合同定は，同定の不確かさを最悪ケースを考慮して評価し同定結果としてシステムの集合を与える，という特徴を持つ．具体的なモデル集合同定の方法には大別して二つあり，一つは統計学に基づいて漸近論的に信頼集合を求める方法（ [4], [6], [25] など），もう一つは情報的複雑度の考え方に基づいた確定的方法（ [9], [12], [15], [24] など）である．二つのうちでは，データ数が十分大きいときに結果が妥当性を持つという漸近論的な考え方が安全性を重視する制御の考え方になじまないということ，そしてロバスト制御自体が確定的方法であるということのため，後者の方がより大きな注目を集めてきたようである．

確定的モデル集合同定は多数提案されているが，その基本的な考え方は以下のとおりである．まず同定対象は線形時不変なシステムであると仮定し，更に雑音は同定対象の出力に加法的に加わり，大きさが有界でその上界は同定者に既知であると仮定する．以上の仮定を満足するシステムで，実験で得られた入出力データを生み出せるものは一般に複数あるが，そのようなもの全体のなす集合を同定結果とする．こうした同定法では，入出力データをどんなに多くしても雑音の影響が残り，同定結果であるシステムの集合は一定限度以上に小さくならない [9], [15]．すなわち同定結果の集合は過剰に大きく選ばれている． この問題を解決するために文献 [14], [19] では，例えば同定対象は有限長のインパルスで表され，雑音はある既知の不等式を満たすというような更に強い仮定をおくことで，同定結果であるシステム集合の大きさが零に収束することを保証している．

[†] 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻，東京都
Department of Mathematical Engineering and Information Physics, Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113–8656 Japan

このようなモデル集合同定には二つの点で疑問がある．まず，どんなに多くの入出力データを使っても同定結果のシステム集合の零収束性が保証できない同定法は，その有用性が疑わしい．次に，同定対象や雑音に関して多くの仮定をおいているが，こうした仮定は少ない方が望ましい．実際，モデル集合同定では同定の不確かさの評価が本質的であるが，非線形でありかつ無限インパルス長を持つことが多い現実の対象に対してはじめから線形であるとか有限インパルス長を持つとか仮定して出発してしまうと，その仮定をおくことで生じる不確かさが評価できなくなってしまう．また，ここでいう雑音とは現実の同定対象とそれを表現するための数学的モデルとの差であり，現実の対象は未知であるから，雑音の性質を知るのには困難が多い．

本論文では，漸近論的でも確定的でもない第 3 の方法として，PAC 学習理論 [16] の一種である不可知学習理論（agnostic learning theory）[8] に基づいたモデル集合同定法の構築を試みる． 本同定法は漸近論的方法と違って有限個の入出力データのもとで妥当性を持つ結果を与え，更に確定的方法と違って同定結果のシステム集合に零収束性を保証し，しかも同定対象や雑音に関してわずかな仮定しか必要としない．通常の同定やロバスト制御への学習理論の応用は，国際会議のインバイテッドセッション [1] や論文誌の特集号 [2]，更に文献 [21], [22] に見られるように既にいくつか結果がある． しかし，モデル集合同定への応用は例がないと思われる．

以下，$\mathbf{R}^d$ は d 次元 Euclid 空間を表し，$\|\cdot\|_1$ はベクトルの 1 ノルムすなわち成分の絶対値の和を表し，ln は自然対数を表すものとする．また，定理などの証明はすべて付録に収めるものとする．

2. 問題設定

本章では本論文で考える問題の設定を行う．説明を簡単にするために単純な設定を考えるが，**6.** で述べるようにより一般の場合への拡張も可能である．

同定対象はスカラの入出力を持つ時不変な離散時間システムとし，その入力を $\{u_k\}$，出力を $\{y_k\}$ と書く．同定に使う入出力データを採取するには，まず同定対象を平衡状態に静止させ，長さ d の入力 $u_{-d+1}, u_{-d+2}, \ldots, u_0$ を印加して時刻 0 の出力 y_0 を測定する．これを $(\boldsymbol{u}^1, y^1)$ と書く．ただし $\boldsymbol{u}^1 := [u_0 \ \ldots \ u_{-d+1}]^{\mathrm{T}}$，$y^1 := y_0$．その後再び対象を平衡状態に静止させ，同様にして入出力対 $(\boldsymbol{u}^2, y^2)$ を得る．これを合計 m 回繰り返し，採取した入出力対をまとめて $\boldsymbol{z} := \{(\boldsymbol{u}^j, y^j)\}_{j=1}^m$ と書く．

入力 $\boldsymbol{u}^j$ の各成分は独立に同一の既知の確率分布に従い，$|u_k| \leqq 1$ であるとする．また出力 y^j はそれぞれ $\boldsymbol{u}^j$ によって条件付けされた条件付き確率分布に従う確率変数であるとするが，その確率分布は同定者に未知であるとし，分布の形も特定しない．したがって同定対象が非線形であったり，無限インパルス長を持ったりしてもかまわない．ただし $|y^j| \leqq \eta$ だけは仮定し，上界 η は同定者に既知であるとする．現実の同定対象の出力は通常有界なので，この仮定は妥当であると考えられる．各々の入出力対 $(\boldsymbol{u}^j, y^j)$ が従う確率分布の測度を以下 P と書く．確率変数 y^j の確率分布が未知なので，確率測度 P も未知であることに注意する．

同定対象の表現に使うものの候補として，同定者は d 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^d$ の部分集合である仮説集合 $\mathcal{H}$ を選ぶ．例えば $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^d : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ など（ただし $\gamma > 0$）．仮説集合 $\mathcal{H}$ の要素である個々の $\boldsymbol{h} = [h_0 \ \ldots \ h_{d-1}]^{\mathrm{T}}$ を仮説と呼び，これは $y_k = h_0 u_k + \cdots + h_{d-1} u_{k-d+1}$ なるシステムを表すと考える．このとき $(\boldsymbol{u}, y)$ を確率測度 P に従う確率変数とすると，y が同定対象の実際の出力，$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$ が仮説 $\boldsymbol{h}$ の与える出力と考えられるから，

$$R_P(\boldsymbol{h}) := \mathrm{E}_P[(y - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^2]$$

は同定対象と仮説 $\boldsymbol{h}$ との隔たりを表す．ただし E_P は P に関する期待値．以下この $R_P(\boldsymbol{h})$ をリスクと呼ぶ．リスク $R_P(\boldsymbol{h})$ の下限または下限の近傍の値を達成する $\boldsymbol{h}$ が同定対象の最も良い表現を与える． しかし，実際には確率測度 P は未知なので $R_P(\boldsymbol{h})$ の値は計算できず直接の最小化はできない． そこでその代わりに，採取した入出力対 $\boldsymbol{z} = \{(\boldsymbol{u}^j, y^j)\}_{j=1}^m$ に基づいた経験的リスク

$$\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(y^j - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^j)^2$$

を使う．ただしあくまで経験的リスク $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ とリスク $R_P(\boldsymbol{h})$ との違いを意識し，両者の差に起因する同定の不確かさを最悪ケースの意味で評価して，リスク $R_P(\boldsymbol{h})$ の下限を達成する $\boldsymbol{h}$ を含む集合を求めることが我々の目的である．

3. UCEMUP 性

大数の弱法則により，入出力対の数 m が無限大にいくとき，各 $\boldsymbol{h}$ において経験的リスク $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ はリスク $R_P(\boldsymbol{h})$ に確率収束する．しかし本論文で考えたいのは，経験的リスク $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ を使ってリスク $R_P(\boldsymbol{h})$ の下限あるいは下限に近い値を達成する $\boldsymbol{h}$ を集め，集合として求めることであるから，各点収束性だけでなく次のような一様収束性の成立が重要になる [20, p. 38].

［定義 1］ 任意の正数 ϵ に関して，極限 $m \to \infty$ で

$$q(m,\epsilon) := \inf_P P^m \left\{ \boldsymbol{z} : \forall \boldsymbol{h} \in \mathcal{H},\ |R_P(\boldsymbol{h}) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{h})| < \eta^2 \epsilon \right\}$$

なる確率が 1 に収束するとき，仮説集合 $\mathcal{H}$ において UCEMUP (uniform convergence of empirical means uniformly in probability) 性があるという． □

例えば仮説集合 $\mathcal{H}$ として $\{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ を採用するとき，以下の性質が成り立つことから UCEMUP 性があることがわかる．

［定理 1］ 仮説集合を $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ と選ぶとき，任意の正数 $0 < \alpha < 1$ に関して次が成立する：

$$q(m,\epsilon) \geqq 1 - \left[\frac{8\gamma(\eta+\gamma)}{\alpha\eta^2\epsilon} + 1 \right]^d 2\exp \frac{-2(1-\alpha)^2\eta^4\epsilon^2 m}{(\eta+\gamma)^4}.$$

□

本論文の問題設定では UCEMUP 性の有無について次のような明解な指針が得られる．

［定理 2］ UCEMUP 性があるための必要十分条件は，仮説集合 $\mathcal{H}$ が $\mathbf{R}^d$ の中で有界なことである． □

本論文では出力 y^j は有界であるとしているので，非有界な $\mathcal{H}$ を考える必要性は少ない．したがって UCEMUP 性がなくてはならないという制約は十分緩いものであるといえる．

4. 同定法の構成

以下仮説集合 $\mathcal{H}$ は UCEMUP 性があるように選ぶものとする．このとき本論文で提案する同定法は，入出力対 $\boldsymbol{z} = \{(\boldsymbol{u}^j, y^j)\}_{j=1}^m$ と任意の正数 ϵ に対して次の同定結果を与えるようなものである：

$$y = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} + v, \qquad \boldsymbol{h} \in H(\boldsymbol{z},\epsilon),$$
$$\mathrm{E}_P(v^2) \in (\widehat{R}_0 - \eta^2\epsilon,\ \widehat{R}_0 + \eta^2\epsilon),$$

ただし

$$H(\boldsymbol{z},\epsilon) := \left\{ \boldsymbol{h} \in \mathcal{H} : \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) \leqq \widehat{R}_0 + 2\eta^2\epsilon \right\}, \quad (1)$$
$$\widehat{R}_0 := \inf_{\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}). \quad (2)$$

経験的リスク $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ はベクトル $\boldsymbol{h}$ の 2 次形式であるから，集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ 及び下限 $\widehat{R}_0$ を求める計算は難しくない．

リスク $R_P(\boldsymbol{h})$ の下限を達成する $\boldsymbol{h}$ が存在する場合，その $\boldsymbol{h}$ を使った $y = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} + v$, $\mathrm{E}_P(v^2) = \inf_{\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h})$，は同定対象の最良の表現といえる．以下の定理により上で示した同定結果はある確率でこの表現を含み，その確率も評価できることがわかる（下限を達成する $\boldsymbol{h}$ が存在しない場合は下限の近傍値を達成する $\boldsymbol{h}$ に関して同様の議論ができる）．この定理が成り立つのは経験的リスクとリスクの差から生じる同定の不確かさが最悪ケースの意味で正しく評価されているからであり，したがってこの定理が本同定法のモデル集合同定としての正当性を保証している．

定理を述べるために記号を準備する．仮定と定理 2 より仮説集合 $\mathcal{H}$ は有界なので $\mathcal{H} \subseteqq \mathcal{H}'$ となる有界閉集合 $\mathcal{H}'$ が存在する．適当な $\mathcal{H}'$ を選び，定義 1 で $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}'$ で置き換えて得られる確率を $q'(m,\epsilon)$ と書く．

［定理 3］ 確率 $q'(m,\epsilon)$ 以上で次が成り立つ：

(a) ある $\xi > 0$ が存在し，$R_P(\boldsymbol{h}) < \inf_{\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h}) + \xi$ なるすべての $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ は集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ に属す；

(b) $R_P(\boldsymbol{h}) \geqq \inf_{\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h}) + 4\eta^2\epsilon$ なるすべての $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ は集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ に属さない；

(c) 下限 $\inf_{\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h})$ は区間 $(\widehat{R}_0 - \eta^2\epsilon,\ \widehat{R}_0 + \eta^2\epsilon)$ に属す． □

性質 (a)，(b) は集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ がリスク $R_P(\boldsymbol{h})$ を小さくする $\boldsymbol{h}$ を過不足なく含むことを表している．また性質 (c) は区間 $(\widehat{R}_0 - \eta^2\epsilon, \widehat{R}_0 + \eta^2\epsilon)$ がリスク $R_P(\boldsymbol{h})$ の下限及びその近傍値を含むことを表している．したがって性質 (a)〜(c) が成り立つとき，本同定法が与える集合と区間は同定対象の最良の表現を含み，本同定法はモデル集合同定としての妥当性を得る．確率 $q'(m,\epsilon)$ はそのための信頼度を表している．また UCEMUP 性により，入出力対の数 m を大きくとれば信頼度 $q'(m,\epsilon)$ を下げずに $\epsilon \to 0$ とすることが可能だが，このとき集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ も区間 $(\widehat{R}_0 - \eta^2\epsilon,\ \widehat{R}_0 + \eta^2\epsilon)$ も大きさは零に近づく．この意味で本同定法の同定結果は零収束性を持つ．また上記の同定結果をロバスト制御に使うためには，パラメー

タの不確かさを $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ で表し，$\mathrm{E}_P(v^2) < \widehat{R}_0 + \eta^2\epsilon$ なる雑音を持つロバスト性能問題として定式化すればよい．

仮説集合が $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ の場合 $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ と選ぶことができ，このとき $q(m,\epsilon) = q'(m,\epsilon)$ である．加えてこの場合，定理 1 の系として信頼度 $q(m,\epsilon)$ を一定値以上にするのに十分な入出力対の数 m がわかる．

［系 1］ 2 数 δ, α を各々 1 より小さい任意の正数とする．仮説集合を $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ とするとき，

$$m \geqq \frac{(\eta+\gamma)^4}{2(1-\alpha)^2\eta^4\epsilon^2} \times \left\{ d \ln\left[\frac{8\gamma(\eta+\gamma)}{\alpha\eta^2\epsilon} + 1\right] + \ln\frac{2}{\delta} \right\} \qquad (3)$$

ならば $q(m,\epsilon) \geqq 1-\delta$ である． □

上記の結果は，精度 ϵ と信頼度 $1-\delta$ を持つ同定結果を得るためのサンプル複雑度を与えている．パラメータ γ を大きくとると，仮説 $\boldsymbol{h}$ を探索する範囲が広がるからリスク $R_P(\boldsymbol{h})$ の下限をより小さくする可能性が生まれる．その反面，上の系 1 は大きな γ は大きな m を要求することを示しており，リスクの下限の大きさと十分な入出力対の数の大きさとの間にトレードオフがあることがわかる．

以上の結果は一般の仮説集合 $\mathcal{H}$ にも適用できる．実際，関係 $\mathcal{H} \subseteqq \mathcal{H}'$ を満たす有界閉集合 $\mathcal{H}'$ として特に $\{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ の形のものを選べば，系 1 は $q'(m,\epsilon) \geqq 1-\delta$ となるのに十分な入出力対の数を与える．

5. 十分な入出力対の数

前章の式 (3) は提案する同定法のサンプル複雑度の評価を与える．しかし実はこの評価は甘いものであり，過度に大きな m を要求している．本章では仮説集合が $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ の場合についてよりよい評価を求める．得られた結果が一般の仮説集合の場合にも使えるのは前章と同様である．

文献 [17, Chapters 6 and 7] [18, Chapters 4 and 5] で Vapnik は，$R_P(\boldsymbol{h}) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ の上界を $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ の関数で表し，効率の良いリスクの推定法を与えた．その技法にならい，更に問題の特殊性に着目することで次の結果を得る．

［補題 1］ 3 数 ω，α，β を $\beta\omega^2 < 2.5$ を満たす任意の正数とし，関数 $r(\cdot,\cdot)$ を

$$r(m,\omega^2) := 1 - \left[\frac{16\gamma}{\alpha(\eta+\gamma)\omega^2} + 1\right]^d \frac{5}{\beta\omega^2} \exp\left(-\frac{\omega^2 m}{3}\right)$$

と定める．このとき $r(m,\omega^2)$ 以上の確率で任意の $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ に関して

$$R_P(\boldsymbol{h}) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) < \phi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})), \qquad (4)$$

$$\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) - R_P(\boldsymbol{h}) < \psi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})) \qquad (5)$$

の 2 式が成立する．ただし，

$$\phi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})) := \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{2\beta}{5}\right)(\eta+\gamma)^2\omega^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}+\frac{2\beta}{5}\right)(\eta+\gamma)^4\omega^4 + (\eta+\gamma)^2\omega^2\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})},$$

$$\psi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})) := \phi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})) - (\eta+\gamma)^2\omega^2. \qquad □$$

式 (3) を求めるときは，定義 1 にあるように $|R_P(\boldsymbol{h}) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{h})|$ を $\boldsymbol{h}$ に関して一様に一定値 $\eta^2\epsilon$ で抑えていた．一方，上の補題で使っている上界 ϕ，ψ は，小さな $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ を持つ $\boldsymbol{h}$ において選択的に小さくなるようなものである．集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ は小さな $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ を持つ仮説 $\boldsymbol{h}$ を集めて作られるので，上記のような上界を使うことでより効率の良い結果が得られると期待される．

実際，補題 1 から次を導ける．

［定理 4］ 式 (2) のように $\widehat{R}_0$ を決め，3 数 ϵ，α，β を $\eta^2\epsilon > \widehat{R}_0$，$\beta\epsilon < 2.5$ を満たす任意の正数とする．更に関数 $r(\cdot,\cdot)$ を補題 1 のように定める．このとき，式 (1) の集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ について

$$r\left(m, \frac{\eta^2\epsilon - \widehat{R}_0}{(1+\alpha+\beta)(\eta+\gamma)^2}\right) \qquad (6)$$

以上の確率で定理 3 の (a)〜(c) が成立する． □

式 (6) を m について解くと次の結果を得る．

［系 2］ 3 数 ϵ，α，β を定理 4 のようなものとし，δ を 1 より小さい任意の正数とする．このとき

$$m \geqq \frac{3(1+\alpha+\beta)(\eta+\gamma)^2}{\eta^2\epsilon - \widehat{R}_0} \times \left\{ d \ln\left[\frac{16(1+\alpha+\beta)\gamma(\eta+\gamma)}{\alpha(\eta^2\epsilon - \widehat{R}_0)} + 1\right] + \ln\frac{5(1+\alpha+\beta)(\eta+\gamma)^2}{\beta(\eta^2\epsilon - \widehat{R}_0)\delta} \right\} \qquad (7)$$

ならば，$1-\delta$ 以上の確率で定理 3 の (a)〜(c) が成立する． □

この改良型のサンプル複雑度の評価は，改良前の評価である式 (3) と違って $\widehat{R}_0/\eta^2 < \epsilon < 2.5/\beta$ なる ϵ にしか使えないが，この制約は実際にはあまり問題にならず，$\widehat{R}_0$ が零に近いときは改良前のものよりもタイトな評価となる．実際，$\widehat{R}_0 \approx 0$ のとき改良型の評価 (7) は $\mathrm{O}(\frac{1}{\epsilon}(\ln\frac{1}{\epsilon}+\ln\frac{1}{\delta}))$ に近くなるが，改良前の評価 (3) は $\mathrm{O}(\frac{1}{\epsilon^2}(\ln\frac{1}{\epsilon}+\ln\frac{1}{\delta}))$ であるからオーダが改善されている．正数 ϵ と δ には通常零に近い値を選ぶことに注意する．

6. 結果の拡張

本章では前章までの結果の拡張を考える．

これまで，同定のために入出力対を採取するときは入出力対を一つ採取するたびに同定対象を平衡状態に静止させるとしてきた．しかしシステム同定の観点からいえば連続した入力 $u_0, u_1, \ldots$ と連続した出力 $y_0, y_1, \ldots$ から同定できた方がよい．そこで入力 $\{u_k\}$ を独立同分布の確率変数とし，これを時刻 $k=0$ まで十分長い時間加えておき，時刻 $k=0$ 以降の入出力をそれぞれ長さ b のブロックに区切って各ブロックから 1 対ずつ$\boldsymbol{u}^1 := [u_{d-1},\ldots,u_0]^{\mathrm{T}}$，$y^1 := y_{d-1}$; $\boldsymbol{u}^2 := [u_{b+d-1},\ldots,u_b]^{\mathrm{T}}$，$y^2 := y_{b+d-1}$; $\ldots$ のように m 個の入出力対 $\boldsymbol{z} := \{(\boldsymbol{u}^j, y^j)\}_{j=1}^m$ を採取する．ブロック長 b を十分大きく選んで各入出力対 $(\boldsymbol{u}^j, y^j)$ を互いに統計的に独立とみなせるならば，前章までと同様にして同定が可能である．また，入出力対が互いに独立でなくても文献 [22] で使われたような形で従属性の程度が評価できるならば同様の結果を導ける．すなわち出力 y^j を和 $\overline{y}^j + \widetilde{y}^j$ に分解して，$\widetilde{y}^j$ は他の入出力対に従属だが $|\widetilde{y}^j| \leqq \widetilde{\eta}$ であって $\widetilde{\eta}$ は既知，$\overline{y}^j$ は他の入出力対と独立とするならば，この $\widetilde{\eta}$ を使って定理 1，3，4 と類似の結果が得られる [13]．

一方，今まで仮説として $y_k = h_0 u_k + \cdots + h_{d-1} u_{k-d+1}$ のような有限インパルス長のシステムだけを考えてきた．しかし $y_k = g_1 y_{k-1} + \cdots + g_{c-1} y_{k-c+1} + h_0 u_k + \cdots + h_{d-1} u_{k-d+1}$ のような仮説を使う場合も前章までと同様に扱える．また，これまではリスク $R_P(\boldsymbol{h})$ や経験的リスク $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ をそれぞれ $(y-\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^2$ の期待値や算術平均で定義してきたが，これを $|y-\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}|$ などの別の量に置き換えても同様の議論が可能である．ただしこの場合は同定結果である集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ の計算が簡単であるとは限らない．

7. 数　値　例

図 1 のような単振子を考え，その挙動は

$$Ml^2\ddot{\theta} = -Mgl\sin\theta - c\dot{\theta} + 5u$$

で記述されるものとする．ただし質量 $M = 1\,\mathrm{kg}$，振子の長さ $l = 1\,\mathrm{m}$，摩擦係数 $c = 2\,\mathrm{Nms/rad}$，重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする．これに，時刻 $t < -3\,\mathrm{s}$ で $u(t) = 0$，$-3\,\mathrm{s} \leqq t < -2\,\mathrm{s}$ で $u(t) = u_{-2}$，$-2\,\mathrm{s} \leqq t < -1\,\mathrm{s}$ で $u(t) = u_{-1}$，$-1\,\mathrm{s} \leqq t < 0\,\mathrm{s}$ で $u(t) = u_0$ となる入力を加え，時刻 $0\,\mathrm{s}$ における角度 $\theta[\mathrm{rad}]$ を $h_0u_0 + h_1u_{-1} + h_2u_{-2}$ で表現することにする．すなわち $d = 3$．ここでは測定雑音等は考えていないが，非線形なシステムを線形なシステムで表現しているのでその差が雑音として観測されることに注意する．各 u_k は単位を Nm として独立に $[-1, 1]$ の一様分布に従うとし，$\eta = 1.2\,\mathrm{rad}$ を採用する． また $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ とし，$\gamma = 1.4\,\mathrm{rad}$ とする．

まず十分な入出力対の数 m を評価する． 改良前の評価 (3) も改良型の評価 (7) も，信頼度を表すパラメータ δ についての感度は低いが精度を表すパラメータ ϵ については鋭敏である．図 2 に $\delta = 0.001$ としたと

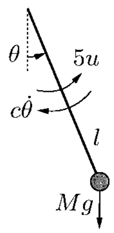

図 1　同定対象のシステム
Fig. 1　Identified system.

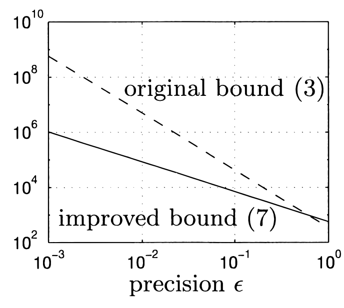

図 2　指定された精度 ϵ を達成するために十分な入出力対の数の評価
Fig. 2　Bounds of a number of input-output pairs sufficient to achieve the specified precision ϵ.

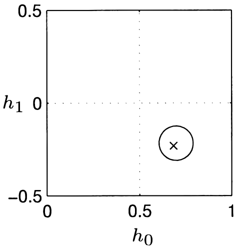

図 3　得られた集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$
Fig. 3　Obtained set $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$.

きの ϵ への依存性を示す．ただし式 (3) で $\alpha = 0.01$，式 (7) で $\alpha = \beta = 0.01$ とした．下限 $\widehat{R}_0$ は 10^{-4} 以下になるので，扱った範囲の ϵ は式 (7) を使うための条件を満たしている．図 2 から，総じて改良型の評価 (7) の方が小さな値を与え，特に ϵ を小さく（すなわち精度を良く）するほどその傾向が著しいことがわかる．例えば $\epsilon = 0.01$ では改良型の評価 (7) は改良前の評価 (3) の 1.69×10^{-2} 倍であるが，$\epsilon = 0.001$ では 1.81×10^{-3} 倍になる．

次にパラメータ $\epsilon = 0.001$，$\delta = 0.001$ を採用し，評価 (7) に基づき $m = 1.05 \times 10^6$ として同定法を適用する．得られた結果は

$$\begin{aligned} &\theta = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}[u_0\ u_{-1}\ u_{-2}]^{\mathrm{T}} + v, \\ &(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}_*)^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 334 & 0.387 & -0.241 \\ 0.387 & 333 & 0.395 \\ -0.241 & 0.395 & 333 \end{bmatrix} \\ &\qquad \times (\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}_*) \leqq 2.88, \\ &0 \leqq \mathrm{E}_P(v^2) < 1.49 \times 10^{-3}. \end{aligned} \tag{8}$$

ただし，$\boldsymbol{h}_*$ は $[0.699\ \ -0.217\ 0.0585]^{\mathrm{T}}$．式 (8) の集合が $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ である．図 3 に超平面 $h_2 = 0.0585$ による集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ の断面を示す．同定対象を $\theta = 0\,\mathrm{rad}$ の周りで線形化し，これを離散化すると $\boldsymbol{h} = [0.684\ \ -0.231\ 0.0746]^{\mathrm{T}}$ を得る．この線形化システムのパラメータ値 $(h_0, h_1) = (0.684, -0.231)$ を図中に×印で示した．×印は集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ の中心からわずかにずれている．これは，線形化システムが非線形の同定対象に十分小さい入力を加えたときの近似であるのに対して，本同定法が与えるのは区間 $[-1, 1]$ に属す比較的大きな入力を加えたときの近似であるからだと考えられる．なお上記の同定結果をロバスト制御に使うには，**4.** で述べたようにロバスト性能問題として定式化すればよい．

8. む　す　び

本論文では不可知学習理論に基づいたモデル集合同定法を構成し，その性質を解析した．本同定法は同定結果としてシステムの集合 $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ を与え，未知の確率測度 P について最悪ケースの性能保証をしているという意味でロバスト制御に整合している．また本同定法は従来のモデル集合同定法が持っていた問題を有しない．本同定法を使うにはあらかじめ仮説集合 $\mathcal{H}$ を指定する必要があるが，UCEMUP 性を保証するために有界な $\mathcal{H}$ を選ばなくてはならないこと，その選び方に関してリスクの下限の大きさと十分な入出力対の数の大きさとの間にトレードオフがあることがわかった．

本論文ではある精度と信頼度を持つ同定結果を得るために十分な入出力対の数の評価を与えたが，その値は実用的観点から見て小さいとはいえない．**5.** では，特に要求精度が高いときに評価を著しく改善できることを示したが，それでもまだ十分ではない．連続した入出力から同定する場合は，各入出力対が互いに統計的に独立になるように各入出力対の間を開けておく必要があるため，以上のことはいっそう問題である．これに関する一つの解決策は **6.** で述べたような従属性のある場合への拡張である．しかし現在までに得られている結果には従属性の上界 $\widetilde{\eta}$ をどのように決めるかという問題があり，より実用的な解決法を考えることは今後の課題といえる．一方，文献 [21] では計算量の意味で解くのが難しい制御の問題について学習理論に基づくアプローチを試みている．本同定法とこうしたアプローチとの統合を考えるのも興味深い課題である．

文　　献

[1] Invited session “Learning and identification: a rapprochement,” organized by M. Vidyasagar, Proc. 35th IEEE Conf. Decision Control, pp.2307–2329, Kobe, Japan, Dec. 1996.

[2] Special issue on learning theory, Syst. Control Lett., vol.34, no.3, pp.113–158, 1998.

[3] Y.S. Chow and H. Teicher, Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales, 2nd ed., Springer, New York, NY, 1988.

[4] D.K. De Vries and P.M.J. Van den Hof, “Quantification of uncertainty in transfer function estimation: a mixed probabilistic-worst-case approach,” Automatica, vol.31, no.4, pp.543–557, 1995.

[5] B.A. Francis, A Course in $\mathcal{H}^\infty$ Control Theory, Springer, Berlin, Germany, 1987.

[6] G.C. Goodwin, M. Gevers, and B. Ninness, “Quan-

tifying the error in estimated transfer functions with application to model order selection," IEEE Trans. Autom. Control, vol.37, no.7, pp.913–928, 1992.

[7] M. Green and D.J.N. Limebeer, Linear Robust Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[8] D. Haussler, "Decision theoretic generalizations of the PAC model for neural net and other learning applications," Inf. Comput., vol.100, no.1, pp.78–150, 1992.

[9] A.J. Helmicki, C.A. Jacobson, and C.N. Nett, "Control oriented system identification: a worst-case/deterministic approach in $\mathcal{H}^\infty$," IEEE Trans. Autom. Control, vol.36, no.10, pp.1163–1176, 1991.

[10] W. Hoeffding, "Probability inequalities for sums of bounded random variables," J. Am. Statist. Assoc., vol.58, no.301, pp.13–30, 1963.

[11] H. Kimura, Chain-Scattering Approach to $\mathcal{H}^\infty$ Control, Birkhäuser, Boston, MA, 1997.

[12] M. Milanese and G. Belforte, "Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors: linear families of models and estimators," IEEE Trans. Autom. Control, vol.27, no.2, pp.408–414, 1982.

[13] 大石泰章，"モデルのいらないセットメンバーシップ同定法の複雑度," 第22回計測自動制御学会 Dynamical System Theory シンポジウム予稿集，pp.93–96, 宇都宮，Oct. 1999.

[14] F. Paganini, "A set-based approach for white noise modeling," IEEE Trans. Autom. Control, vol.41, no.10, pp.1453–1465, 1996.

[15] D.N.C. Tse, M.A. Dahleh, and J.N. Tsitsiklis, "Optimal asymptotic identification under bounded disturbances," IEEE Trans. Autom. Control, vol.38, no.8, pp.1176–1190, 1993.

[16] L.G. Valiant, "A theory of the learnable," Commun. ACM, vol.27, no.11, pp.1134–1142, 1984.

[17] V.N. Vapnik, Estimation of Dependences Based on Empirical Data, translated by S. Kotz, Springer, New York, NY, 1982.

[18] V.N. Vapnik, Statistical Learning Theory, John Wiley & Sons, New York, NY, 1998.

[19] S.R. Venkatesh and M.A. Dahleh, "Identification in the presence of classes of unmodeled dynamics and noise," IEEE Trans. Autom. Control, vol.42, no.12, pp.1620–1635, 1997.

[20] M. Vidyasagar, A Theory of Learning and Generalization: With Applications to Neural Networks and Control Systems, Springer, London, UK, 1997.

[21] M. Vidyasagar, "Randomized algorithms for robust controller synthesis using statistical learning theory," in Learning, Control and Hybrid Systems, Y. Yamamoto and S. Hara, eds., pp.3–24, Springer, London, UK, 1999.

[22] E. Weyer, R.C. Williamson, and I.M.Y. Mareels, "Finite sample properties of linear model identification," IEEE Trans. Autom. Control, vol.44, no.7, pp.1370–1383, 1999.

[23] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, Robust and Optimal Control, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

[24] T. Zhou and H. Kimura, "Structure of model uncertainty for a weakly corrupted plant," IEEE Trans. Autom. Control, vol.40, no.4, pp.639–655, 1995.

[25] Y.C. Zhu, "Estimation of transfer functions: asymptotic theory and a bound of model uncertainty," Int. J. Control, vol.49, no.6, pp.2241–2258, 1989.

付　録

1. 定理 1 の証明

まず次の補題を示す．

［補題 2］ 集合 $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^d : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ を考え，a を任意の正数とする．このとき L を $(2\gamma/a+1)^d$ 以下の最大の整数とすると，集合 $\mathcal{H}$ に属す L 本のベクトル $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_L$ をうまく選べば，任意の $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ に関して $\|\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}_l\|_1 \leqq a$ となるような $l = 1, \ldots, L$ が存在するようにできる． □

（証明）集合 $\mathcal{H}$ の中に M 本のベクトル $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_M$ を選び，それぞれを中心とする半径 $a/2$ の 1 ノルム球 $\{\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^d : \|\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}_l\|_1 \leqq a/2\}$ が互いに交わりを持たないようにできたとする．もし，すべての $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_M$ について $\|\boldsymbol{h}_0 - \boldsymbol{g}_l\|_1 > a$ となる $\boldsymbol{h}_0 \in \mathcal{H}$ があったら，$\boldsymbol{h}_0$ を中心とする半径 $a/2$ の 1 ノルム球も他の M 個の 1 ノルム球と交わりを持たない．したがって M が最大になるように $\{\boldsymbol{g}_l\}$ を選んだとすると，任意の $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ に関して $\|\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}_l\|_1 \leqq a$ となるような $l = 1, \ldots, M$ が存在する．ところがこの M 個の 1 ノルム球は，すべて中心が原点，半径が $\gamma + a/2$ の 1 ノルム球 $\{\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^d : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma + a/2\}$ に含まれるから，M は半径 $\gamma + a/2$ の 1 ノルム球と半径 $a/2$ の 1 ノルム球との体積比以下でなくてはならない．以上により補題を得る． □

さて定理のように α を選び，L を $[8\gamma(\eta+\gamma)/\alpha\eta^2\epsilon+1]^d$ 以下の最大の整数とする．このとき補題 2 から，仮説集合 $\mathcal{H}$ 中に $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_L$ をうまく選べば，任意の $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ について $\|\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}_l\|_1 \leqq \alpha\eta^2\epsilon/4(\eta+\gamma)$ を満たす $l = 1, \ldots, L$ が存在するようにできる．

一般に $[0, \overline{x}]$ に値を持つ独立同分布の m 個の確率変数 $x_1, \ldots, x_m$ に関して，$|(1/m)\sum_{j=1}^m x_j - \mathrm{E}(x_1)| \geqq \epsilon$ となる確率は $2\exp(-2\epsilon^2 m/\overline{x}^2)$ 以下である（Hoeffding の不等式 [10]）．ただし E は期待値を表

す．今 $x_j := (y^j - \boldsymbol{g}_l^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}^j)^2$ と考えると，$\overline{x} = (\eta+\gamma)^2$ であり，$|R_P(\boldsymbol{g}_l) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l)| \geqq (1-\alpha)\eta^2\epsilon$ となる確率は各々の l について $2\exp[-2(1-\alpha)^2\eta^4\epsilon^2 m/(\eta+\gamma)^4]$ 以下である．したがって定理中の $q(m,\epsilon)$ の右辺の値以上の確率で，任意の $l = 1,\ldots,L$ に関し $|R_P(\boldsymbol{g}_l) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l)| < (1-\alpha)\eta^2\epsilon$ である．以下に示すように，このとき任意の $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ で $|R_P(\boldsymbol{h}) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{h})| < \eta^2\epsilon$ である．よって定理が成立する．

簡単な計算により任意の $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{g} \in \mathcal{H}$ について $|R_P(\boldsymbol{h}) - R_P(\boldsymbol{g})|$ と $|\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{g})|$ はともに $2(\eta+\gamma)\|\boldsymbol{h}-\boldsymbol{g}\|_1$ 以下．よって任意の $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ について，$\|\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}_l\|_1 \leqq \alpha\eta^2\epsilon/4(\eta+\gamma)$ となる $\boldsymbol{g}_l$ を考えると

$$
\begin{aligned}
&|R_P(\boldsymbol{h}) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{h})| \\
&\leqq |R_P(\boldsymbol{g}_l) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l)| + 4(\eta+\gamma)\|\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}_l\|_1 < \eta^2\epsilon.
\end{aligned}
$$

2. 定理 2 の証明

仮説集合 $\mathcal{H}$ が有界ならば $\{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ の形の集合の部分集合となる．ところが定理 1 から，$\{\boldsymbol{h} : \|\boldsymbol{h}\|_1 \leqq \gamma\}$ が仮説集合のときは UCEMUP 性がある．したがって $\mathcal{H}$ が仮説集合のときも UCEMUP 性がある．

次に仮説集合 $\mathcal{H}$ が非有界であるとする．このとき $\mathcal{H}$ の中に $\|\boldsymbol{h}_l\|_1 \to \infty$ となるような列 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, ... がとれる．以下確率測度 P として，y はいつも零，$\boldsymbol{u}$ は各成分が $[-1,1]$ の一様分布に従うものを考える．さて各 l について確率変数 $x_l := (y - \boldsymbol{h}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^2/\|\boldsymbol{h}_l\|_1^2 - \mathrm{E}_P[(y - \boldsymbol{h}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^2/\|\boldsymbol{h}_l\|_1^2]$ を考えると，$\mathrm{E}_P(x_l) = 0$, $\mathrm{E}_P(x_l^2) =: \sigma_l^2 < \infty$, $\mathrm{E}_P(|x_l|^3) =: \tau_l^3 < \infty$ である．したがって x_l に Berry-Esseen の定理（例えば [3, Theorem 9.1.3]）が使えて，

$$
\sup_{\xi \in \mathrm{R}} \left| P^m \left\{ \boldsymbol{z} : \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}_l) - R_P(\boldsymbol{h}_l) < \frac{\|\boldsymbol{h}_l\|_1^2 \sigma_l \xi}{\sqrt{m}} \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x \right| \leqq \frac{0.8\tau_l^3}{\sqrt{m}\sigma_l^3}
$$

を得る．確率測度 P の選び方から τ_l/σ_l は上に有界なので，十分大きく m_0 を選べば任意の $m > m_0$ と任意の l について上式の右辺を 1/8 以下にできる．更に $(1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{-a} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 1/4$ となる $a > 0$ を考え，$\xi = a$ と $\xi = -a$ について上式を使うと

$$
P^m \left\{ \boldsymbol{z} : |R_P(\boldsymbol{h}_l) - \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}_l)| \geqq \frac{\|\boldsymbol{h}_l\|_1^2 \sigma_l a}{\sqrt{m}} \right\} \geqq \frac{1}{4}
$$

を得る．任意の l について σ_l は下に有界なので，$l = l(m)$ をうまく決めれば $\|\boldsymbol{h}_l\|_1^2 \sigma_l a/\sqrt{m} \geqq 1$ とすることが可能．したがって UCEMUP 性はない．

3. 定理 3の証明

確率 $q'(m,\epsilon)$ の定義より，任意の確率測度 P に関して $q'(m,\epsilon)$ 以上の確率で

$$
\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) - \eta^2\epsilon < R_P(\boldsymbol{h}) < \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) + \eta^2\epsilon, \quad \forall \boldsymbol{h} \in \mathcal{H}',
$$

が成り立つ．以下この式が成り立つと仮定して，性質 (a)〜(c) の成立を示す．

仮説集合 $\mathcal{H}$ の閉包 $\overline{\mathcal{H}}$ を考えると $\overline{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}'$．リスクも経験的リスクも $\boldsymbol{h}$ に関して連続なので，$\inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h}) = \inf_{\boldsymbol{h}\in\overline{\mathcal{H}}} R_P(\boldsymbol{h})$ かつ $\inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) = \inf_{\boldsymbol{h}\in\overline{\mathcal{H}}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$．有界閉集合 $\overline{\mathcal{H}}$ には下限 $\inf_{\boldsymbol{h}\in\overline{\mathcal{H}}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ を達成する $\boldsymbol{h} \in \overline{\mathcal{H}}$ が存在する．その $\boldsymbol{h}$ で $R_P(\boldsymbol{h}) < \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) + \eta^2\epsilon$ なので，十分小さい $\xi > 0$ に関して $\inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h}) + \xi < \inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) + \eta^2\epsilon$．このとき $R_P(\boldsymbol{h}) < \inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h}) + \xi$ なるすべての $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ で

$$
\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) - \eta^2\epsilon < R_P(\boldsymbol{h}) < \inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) + \eta^2\epsilon
$$

である．すなわち性質 (a) が成立する．

一方上記の状況のとき，下限 $\inf_{\boldsymbol{h}\in\overline{\mathcal{H}}} R_P(\boldsymbol{h})$ は $\inf_{\boldsymbol{h}\in\overline{\mathcal{H}}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) - \eta^2\epsilon$ より大きく，また任意の $\boldsymbol{h} \in H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ において $R_P(\boldsymbol{h})$ は $\inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) + 2\eta^2\epsilon + \eta^2\epsilon$ より小さい．したがって任意の $\boldsymbol{h} \in H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ に関して

$$
R_P(\boldsymbol{h}) - \inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h}) < 4\eta^2\epsilon
$$

である．すなわち性質 (b) が成り立つ．更に上で得られた関係 $\inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h}) < \inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) + \eta^2\epsilon$, $\inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h}) > \inf_{\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}} \widehat{R}_z(\boldsymbol{h}) - \eta^2\epsilon$をまとめると，性質 (c) を得る．

4. 補題 1 の証明

簡単のため以下 $\eta+\gamma$ を A と書く．

補題 2 の保証のもとに，L を $(16\gamma/\alpha A\omega^2+1)^d$ 以下の最大の整数とし，仮説集合 $\mathcal{H}$ の中に $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_L$ をうまく選んで，任意の $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ に対して $\|\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}_l\|_1 \leqq \alpha A\omega^2/8$ となる $l = 1,\ldots,L$ が存在するようにする．また，N を $5/2\beta\omega^2$ 以上の最小の整数とする．仮定より $N \geqq 2$. 更に $l = 1,\ldots,L$ と $n = 0,\ldots,N$ の各々について，$(y - \boldsymbol{g}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^2 > nA^2/N$ となる確率を p_l^n，m 個の入出力対 $(\boldsymbol{u}^j, y^j)$ のうちで $(y^j - \boldsymbol{g}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^j)^2 > nA^2/N$ となるものの割合をν_l^n と書

く．一般に成功確率 p の Bernoulli 試行を m 回行うとき，成功回数を k として $p-k/m \geqq \omega\sqrt{p}$ となる確率は $\exp(-\omega^2 m/2)$ 以下であり，$k/m-p \geqq \omega\sqrt{p}$ となる確率は $\exp(-\omega^2 m/3)$ 以下である（乗法的な Chernoff の不等式 [18, p. 127] [20, p. 22]）．よって任意の $l=1,\ldots,L$ と $n=1,\ldots,N-1$ に関して $|p_l^n-\nu_l^n|<\omega\sqrt{p_l^n}$ となる確率は

$$1-L(N-1)2\exp\left(-\frac{\omega^2 m}{3}\right) \geqq r(m,\omega^2)$$

以上である．

以下任意の $l=1,\ldots,L$ と $n=1,\ldots,N-1$ について $|p_l^n-\nu_l^n|<\omega\sqrt{p_l^n}$ であるとして，まず式 (4) を示す．ここで $R_P(\boldsymbol{g}_l) \leqq \sum_{n=0}^{N-1} p_l^n A^2/N$ 及び $\widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l) \geqq \sum_{n=1}^{N} \nu_l^n A^2/N$ に注意すると，

$$\begin{aligned} &R_P(\boldsymbol{g}_l)-\widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l) \\ &\leqq p_l^0\frac{A^2}{N}-\nu_l^N\frac{A^2}{N}+\sum_{n=1}^{N-1}(p_l^n-\nu_l^n)\frac{A^2}{N} \\ &<\frac{A^2}{N}+\omega\int_0^{A^2}\sqrt{P\{(\boldsymbol{u},y):(y-\boldsymbol{g}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^2>t\}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

を得る．右辺の第 2 項は Schwarz の不等式から $\omega A\sqrt{R_P(\boldsymbol{g}_l)}$ 以下と評価できる．以上で得られた式を $R_P(\boldsymbol{g}_l)$ について解くと，

$$\begin{aligned} R_P(\boldsymbol{g}_l)-\widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l) &< \frac{A^2}{N}+\frac{(A\omega)^2}{2} \\ &+\sqrt{\frac{(A\omega)^4}{4}+(A\omega)^2\left[\frac{A^2}{N}+\widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l)\right]} \end{aligned}$$

を得る．

任意の $\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}$ に関して，$\|\boldsymbol{h}-\boldsymbol{g}_l\|_1 \leqq \alpha A\omega^2/8$ となる $\boldsymbol{g}_l$ が存在するが，定理 1 の証明で見たようにこのとき $|R_P(\boldsymbol{h})-R_P(\boldsymbol{g}_l)|$ と $|\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})-\widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l)|$ は $\alpha(A\omega)^2/4$ 以下．このことと先の $R_P(\boldsymbol{g}_l)-\widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l)$ の上界とを合わせ，$1/N \leqq 2\beta\omega^2/5$ を使うと，式 (4) を得る．

式 (5) を得るには，$R_P(\boldsymbol{g}_l)-\widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l)$ の代わりに $\widehat{R}_z(\boldsymbol{g}_l)-R_P(\boldsymbol{g}_l)$ を評価すればよい．

5. 定理 4 の証明

簡単のため $\eta+\gamma$ を A と書く．

正数 ω^2 を $(\eta^2\epsilon-\widehat{R}_0)/[(1+\alpha+\beta)A^2]$ と定めると補題 1 が使え，$r(m,\omega^2)$ 以上の確率で，すべての $\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}$ に対し $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})-\psi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}))<R_P(\boldsymbol{h})<\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})+\phi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}))$．関係 $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})=\widehat{R}_0$ を達成する $\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}$ が存在するので，$\inf_{h\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h})<\widehat{R}_0+\phi(\widehat{R}_0)$．したがって十分小さい $\xi>0$ について，$R_P(\boldsymbol{h})<\inf_{h\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h})+\xi$ なるすべての $\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}$ は

$$\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})-\psi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}))<\widehat{R}_0+\phi(\widehat{R}_0)$$

を満たす．以下，これを満たす $\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}$ は $H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ に属すことを示す．上式を $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})$ について解くと

$$\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})-\widehat{R}_0<T_1+\sqrt{T_2}+\sqrt{T_3+(A\omega)^2\sqrt{T_2}},$$

ただし

$$\begin{aligned} T_1 &:= \left(\frac{1}{2}+\alpha+\frac{4\beta}{5}\right)(A\omega)^2, \\ T_2 &:= \left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}+\frac{2\beta}{5}\right)(A\omega)^4+(A\omega)^2\widehat{R}_0, \\ T_3 &:= \left(\frac{1}{2}+\frac{5\alpha}{4}+\frac{6\beta}{5}\right)(A\omega)^4+(A\omega)^2\widehat{R}_0. \end{aligned}$$

このうち $\sqrt{T_2}$ は上から

$$\begin{aligned} \sqrt{T_2} &\leqq \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}+\frac{2\beta}{5}}(A\omega)^2+\frac{\widehat{R}_0}{\sqrt{1+\alpha+8\beta/5}} \\ &< \left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{2\beta}{5}\right)(A\omega)^2+\widehat{R}_0 \end{aligned}$$

と評価できる．同様に T_3 の周りの根号も外すと，

$$\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})-\widehat{R}_0<2(1+\alpha+\beta)(A\omega)^2+2\widehat{R}_0=2\eta^2\epsilon$$

が得られる．すなわち性質 (a) が示された．

以下 $\widehat{R}_1:=\widehat{R}_0+2\eta^2\epsilon$ と書く． 関数 $x+\phi(x)$ と $x-\psi(x)$ は $x\geqq 0$ で増加なので，任意の $\boldsymbol{h}\in H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ について $R_P(\boldsymbol{h})<\widehat{R}_1+\phi(\widehat{R}_1)$ であり，一方下限 $\inf_{h\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h})$ は $\widehat{R}_0-\psi(\widehat{R}_0)$ より大きい．これより任意の $\boldsymbol{h}\in H(\boldsymbol{z},\epsilon)$ について

$$R_P(\boldsymbol{h})-\inf_{h\in\mathcal{H}} R_P(\boldsymbol{h})<\widehat{R}_1+\phi(\widehat{R}_1)-\widehat{R}_0+\psi(\widehat{R}_0)$$

である．ここで ϕ と ψ の定義から $\phi(\widehat{R}_1)+\psi(\widehat{R}_0)=\phi(\widehat{R}_0)+\psi(\widehat{R}_1)$ である．更に上で見たように $\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})-\psi(\widehat{R}_z(\boldsymbol{h}))<\widehat{R}_0+\phi(\widehat{R}_0)$ ならば$\widehat{R}_z(\boldsymbol{h})-\widehat{R}_0<2\eta^2\epsilon$ であるから，関係 $\widehat{R}_1-\widehat{R}_0=2\eta^2\epsilon$ から $\phi(\widehat{R}_0)+\psi(\widehat{R}_1)\leqq\widehat{R}_1-\widehat{R}_0$ が導かれる．したがって性質 (b) が成り立つ．

関数 ϕ の定義式において性質 (a) の証明と同様の手法で根号を外すと $\phi(\widehat{R}_0)\leqq(1+3\alpha/4+4\beta/5)(A\omega)^2+\widehat{R}_0<\eta^2\epsilon$ を得る．更に ψ の定義から $\psi(\widehat{R}_0)<\eta^2\epsilon$.

これより性質 (c) を得る．

（平成 11 年 10 月 7 日受付，12 月 27 日再受付）

大石　泰章　（正員）

1993 年東大大学院工学系研究科計数工学専攻修士課程了．95 年より同専攻助手，現在に至る．博士（工学）．サンプル値制御，ロバスト制御，システム同定に興味を持つ．91 年度情報処理学会論文賞受賞．計測自動制御学会等各会員．