

ヘテロな分散システムの負荷均一化の最適解

林 幸雄^{†a)}(正員)

Optimal Solutions of the Load Balancing in Heterogeneous Distributed Systems

Yukio HAYASHI^{†a)}, Regular Member[†] 北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科, 石川県

School of Knowledge Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Ishikawa-ken, 923-1292 Japan

a) E-mail: yhayashi@jaist.ac.jp

あらまし サーバ性能が異なるヘテロな分散システムの負荷均一化において、その最適解が手法によらず初期負荷配分で決まること、通信相手の性能を隠蔽した上で均一化できること、及び、ある保存則に従って収束することを示す。

キーワード 拡散法, 拘束力学系, GRID

1. ま え が き

広域ネットワーク上の分散コンピューティングが近年注目を集めている [1], [2]. その重要課題の一つとして、動的でヘテロな分散システムの負荷均一化問題がある. 並列計算機や分散システムにおいてできるだけ少ない通信回数や通信量で、できるだけ素早く負荷の均一化が行えるよう、様々なアルゴリズムがこれまで提案されてきた. 例えば、あるしきい値より負荷量が少なくなった時点で自分の近傍に催促する Receiver Initiation や、逆にしきい値より多くなった時点で負荷の移動先を探す Sender Initiation が知られている. これらは、処理が単純であることから用いられているが、しきい値の設定が難しいのに加えて、大域的な均一化が保証されず場当り的で [3], 場合によっては負荷の出戻りが起こりうる. あらかじめ負荷移動先の順番を定めた Round-Robin 法やランダムに移動先を選択する方法なども、同様に均一化の精度よりも処理の単純さを重視したものである.

一方、無駄な負荷移動をさけるため、移動すべき最適な負荷量の計算と、負荷の移動という2フェーズに基づく方法が考えられている. その最もよく知られた手法として、次元交換 (DE: Dimension Exchange) 法と拡散 (DF: Diffusion) 法がある [4]. DE 法は、規則的な結合構造をもつ超並列計算機に適し、一時刻に各プロセッサが単一の通信ポートを介して一斉に右、左、上、下へとといった具合に交互に隣接プロセッサと均一化を図る手法である. これに対して DF 法は、非同期、マルチポートに適し、局所的な拡散による反

復計算によって各辺 (通信路) 上の負荷移動量を求めた後に、実際の負荷移動を行う. DF 法は本質的には拡散方程式を反復的に解いて負荷移動量を求める手法で、無駄な巡回フローをもたない最適解を与えること [5] が知られている. しかしながら、単純な時間差分による方法では収束が遅いため、高速化のための種々のスキームが考えられている. 特に最近、一般の結合構造に対して多項式を用いた OPS (Optimal Polynomial Scheme) と呼ばれる手法が提案された [6]. この手法では、拡散方程式における離散ラプラシアン固有値でパラメータを設定すると、有限 (相異なる固有値の数 -1) 回の反復で収束することが保証される. また、従来の FOS (First Order Scheme), SOS (Second Order Scheme), Chebyshev Scheme など特殊形として含んだ一般化された手法である [6] とともに、並列計算機に適したグラフのデカルト積の構造にも適用できる [7]. 更に DF 法は、サーバやプロセッサの性能が異なるヘテロな場合にも拡張されている [8] が、性能の違いによって換算された負荷量は陽に扱われておらず、均一化のために移動すべきプロセス数と混同されている.

本論文では、ヘテロな分散システムの負荷均一化を考え、先の文献 [8] の問題点をふまえたうえで、計算手法及びスキームや実装技術に依存しない、最適解の性質を明らかにする.

2. 負荷均一化問題

サーバ (一般に計算機をさす) 性能が異なるヘテロな分散システムの負荷均一化問題を考える. まず、サーバ間のネットワークは、有限連結で自己ループや多重辺のないグラフ (V, E) において、頂点と辺の重みをもつものとする. ここで、用語の定義を行う.

性能: 各頂点上のサーバ $u \in V$ の性能を重み $m_V(u)$ で表し、プロセスの処理スピードで定義する.

コスト: 辺 $e = (u, v) \in E$ の重み $m_E(e)$ はコストの逆数を表し、サーバ u, v 間の通信速度などで定義する. インターネット環境では、速度が変動して値が定まらな思考えられるので、通信遅れの偏差などによる通信の不安定度でコストを定義する [9]. ただし、重みの意味が変れば、後述する最適化の評価尺度が変わる.

負荷量: 各サーバ $u \in V$ の負荷量を $f(u)$ で表す. 負荷量は、サーバが保持する未処理なプロセスの数を、性能 $m_V(u)$ で割って換算した量で定義する.

本論文では、GRID 向けの課題 [1] を想定している

ので、多数の独立した同程度のプロセスが存在するものとして、負荷量は任意に分割可能とする [4], [6], [7].

3. ヘテロなネットワークに対する作用素

3.1 従来の離散ラプラシアン

従来の重み付き離散ラプラシアン [10], [11] は、負荷量ベクトル $\mathbf{f} = (f(1), \dots, f(u), \dots, f(|V|))^T$ に作用させたその u 成分表示で、

$$Lf(u) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{v \sim u} m_E(e) (f(v) - f(u)), \quad (1)$$

と定義される。ここで、 $v \sim u$ は u の隣接点 v の集合を表す。また、 L による拡散方程式

$$\frac{\partial f(u)}{\partial t} = -Lf(u), \quad (2)$$

の時間発展は総負荷量 $\sum_{u \in V} f(u)$ を保存して、均一解 $Ave \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \in V} f(u)/|V|$ との二乗誤差を単調減少させながら収束することが知られている（表記の混乱をさけるため、 $f(u)$ が時間 t の関数であることは省略）。

負荷均一化の意味としては、式 (2) 右辺、すなわち式 (1) によって、各頂点 u のサーバが隣接点 v との負荷量の差に従って移動すべき量を求める点が本質的である。

一方、サーバ性能の違いを重み $m_V(u)$ で表現した離散ラプラシアン L_c による拡散方程式、

$$\frac{\partial p(u)}{\partial t} = -L_c p(u), \quad (3)$$

$$L_c p(u) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{v \sim u} m_E(e) \left(\frac{p(v)}{m_V(v)} - \frac{p(u)}{m_V(u)} \right), \quad (4)$$

も考えられている。

文献 [8] では、 $p(u)$ は負荷量と定義されているが、これはプロセス数と考えるのが妥当である。なぜなら、 $\forall u \in V, v \sim u$ に対する、平衡条件 $\bar{p}(v)/m_V(v) = \bar{p}(u)/m_V(u)$ より、拡散方程式 (3) の解は、

$$\bar{p}(u) = \frac{\sum_{v \in V} p(v)}{\sum_{v \in V} m_V(v)} m_V(u),$$

となり、異なる性能 $m_V(u) \neq m_V(v)$ であることから、この $\bar{p}(u)$ は各頂点 $u \in V$ ごとに別々の値をとるが、これは明らかに不均一を意味する。したがって、均

一化されるのは性能で換算された負荷量 $p(u)/m_V(u)$ であって、 $p(u)$ は性能に従って比例配分されたプロセス数と解釈すると矛盾がなくなる。

3.2 非対称な新しい作用素

本節では、サーバ性能の違いによって辺の両端で重み値が異なることから非対称行列となる、離散ラプラシアン \mathcal{L} を以下に提示する。これは、付録に示した作用素式 (A.1) の離散版に相当する^(注1)。

$$\mathcal{L}f(u) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{v \sim u \in E} g^{ii}(u)(f(v) - f(u)) \quad (5)$$

$$- \sum_{v \sim u \in E} \Delta g^{ii}(u)(f(v) - f(u)), \quad (6)$$

$$= - \sum_{v \sim u \in E} g^{ii}(v)(f(v) - f(u)), \quad (7)$$

ここで、 E は両方向のすべての有向辺の集合、有向辺 $e_i: u \rightarrow v, \bar{e}_i: v \rightarrow u$ はその逆向辺、辺 e_i の両端 u, v における重みの差分、 $\Delta g^{ii}(u) \stackrel{\text{def}}{=} g^{ii}(v) - g^{ii}(u) \neq 0, i \in \{1, 2, \dots, |E|\}$ とする。 \mathcal{L} の行列表現は、

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dots & \dots & -g^{ii}(u) & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ -g^{ii}(1) & 0 & \sum_{v \sim u} g^{ii}(v) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

となる。

この作用素 \mathcal{L} による拡散処理では、各辺上の負荷移動の出入り量が一致しない。すなわち、各辺 e_i の両端 u, v での負荷の出入り量が、式 (7) より、

$$u \text{ に対して } -g^{ii}(v)(f(v) - f(u))$$

$$v \text{ に対して } -g^{ii}(u)(f(u) - f(v))$$

と異なる点特徴的である（移動方向を表す符号の違いを除いても $g^{ii}(u) \neq g^{ii}(v)$ なので、上記の量は不一致）。このことは、 \mathcal{L} が非対称行列で表されることによるもので、次章で述べる総負荷量の時間的変動にも関係する。ここで、各辺の両端の頂点における負荷の出入り量が一致しないことは、それぞれ異なる性能で換算される評価量であることによるもので、それらに相当する物理量であるプロセス数の出入り量は一致

(注1): 直観的には、各頂点上のサーバ性能の違いが、多様体の各点における計量（距離尺度）の違いに対応付けられる。ただし、連続版式 (A.1) と離散版式 (7) の対応付けは、差分近似というより、定理 1 のグリーンの公式 (11), (12) で両者ともに自己共役（対称な形式）となることに基づく。

していることに注意しよう (L_c が \mathcal{L} に帰着する後述の結果から確かめられる)。

一方、従来の L と L_c では、式 (1) と式 (4) の右辺における各辺の両端の頂点での出入り量は等しくなる。このことは、それぞれ総負荷量とプロセス総数が均一化処理の各時刻で変動せず保存されることを意味する。さて、式 (7) は、

$$g^{ii}(v) = \frac{m_E(e_i)}{m_V(u)} > 0, \quad (8)$$

と表現すれば、以下の調和振動子のばねモデル [12] に一致する。

$$\Delta_P f(u) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m_V(u)} \sum_{v \sim u} m_E(e_i)(f(v) - f(u)), \quad (9)$$

ただし、異なる質量 $m_V(u) \neq m_V(v) > 0$ 、ばね定数 $m_E(e_i) = m_E(\bar{e}_i) > 0$ と定義されている。したがって、負荷均一化のための拡散とばねモデルという応用上の意味付けから離れれば、作用素として \mathcal{L} は Δ_P と等価になる^(注2)。

提案した作用素 \mathcal{L} と等価な式 (9) の表現から、負荷均一化のための拡散処理において、各サーバ $u \in V$ は通信相手となる隣接サーバ $v \sim u$ の負荷量 $f(v)$ と自分自身の性能 $m_V(u)$ を知るだけでよく、従来の L_c による式 (3)、(4) のように相手の性能 $m_V(v)$ を知る必要がない。通信相手の性能を隠蔽して負荷均一化が行えることは、必要最低限の情報開示のみで処理が行えることを意味するもので、ボランティアコンピューティング的な GRID [1] にふさわしい。また、各頂点 $u \in V$ における性能と負荷量の積がプロセス数なので、

$$m_V(u)f(u) = p(u), \quad (10)$$

とすれば、式 (4) は式 (9) 及び式 (8) を伴う式 (7) に帰着する。よって、文献 [8] における $p(u)$ をプロセス数と解釈することに一貫した意味を与えることができる。

一方、前節の式 (1) による重み付き離散ラプラシアン L は、サーバ性能がすべて同一な場合 $m_V(u) = m_V(v)$ に相当する、 $g^{ii}(v) = g^{ii}(u)$ のときに限られる。また、行列表現で

$$C\mathcal{L} = L_c C = L,$$

が成り立つ。ここで、 $|V| \times |V|$ の対角行列 $C \stackrel{\text{def}}{=}$

$\text{diag}(m_V(u))$ である。

以上の議論から、 \Leftrightarrow を同値、 \leftarrow を対称な場合の限定と表記すれば、

$$L \leftarrow \Delta_P \Leftrightarrow \mathcal{L},$$

となり、これまで提案された離散ラプラシアンとの関係が整理できる。

更に、式 (7) の \mathcal{L} 及び連続版 (A.1) に対して、以下の基本定理が成り立つ (証明は付録に示す)。

[定理 1] グリーンの公式

$$\int_M \mathcal{L} f_1 f_2 dx = \int_M (df_1, df_2)_G dx = \int_M f_1 \mathcal{L} f_2 dx, \quad (11)$$

$$(df_1, df_2)_G = (\mathcal{L} f_1, f_2)_G = (f_1, \mathcal{L} f_2)_G, \quad (12)$$

$$(df_1, df_2)_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{e_i, \bar{e}_i} df_1(e_i) df_2(\bar{e}_i) m_E(e_i), \quad (13)$$

$$(\mathcal{L} f_1, f_2)_G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \in V} \mathcal{L} f_1(u) f_2(u) m_V(u), \quad (14)$$

$$df_1(e_i) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(v) - f_1(u), \quad df_2(\bar{e}_i) \stackrel{\text{def}}{=} f_2(v) - f_2(u).$$

[定理 2] 最大最小の原理

境界条件のない有限な連結無向グラフ (V, E) において、 $\forall u \in V, \mathcal{L} f(u) = 0$ を満たす \mathcal{L} -調和関数 $f(u)$ は定数である。

4. 最適な負荷均一解の性質

本章では、 \mathcal{L} による拡散方程式

$$\frac{\partial f(u)}{\partial t} = -\mathcal{L} f(u), \quad (15)$$

を考え、その時間発展の力学系としての特性を明らかにする。特に、DF 法はある二次計画 (QP) 問題を解くことと等価で最適な負荷均一解を与えること [5], [6] から、以下に示す「初期負荷配分に依存した総負荷量の変化」は手法によらず、性能が異なるヘテロな分散システムの負荷均一化に本質的なものとなる。すなわち、その最適な負荷均一解で以下の現象は必ず起こる。

4.1 保存則と収束性

まず定理 1 において、 $\forall u \in V, f_2(u) = \text{const.}$ を考えれば $df_2(u) = 0$ になることから、以下の定理を得る。ただし、 $\mathbf{f}^0 = (f^0(1), \dots, f^0(u), \dots, f^0(|V|))^T$ は初期負荷量ベクトルとする。

(注2): 式 (8) から、 Δ_P は \mathcal{L} に帰着する。逆に、後述する定理 3 の保存則 $\forall \mathbf{f}, \mathbf{m}_V^T \mathcal{L} \mathbf{f} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^T \mathbf{m}_V = 0$ を満たす \mathcal{L} における $g^{ii}(u)$ から、 $m_V(u)$ の一意存在性を示すこともでき、離散版の \mathcal{L} から Δ_P への一意な変換式 (8) も成り立つ。

[定理 3] 重み付き総負荷量の保存

拡散方程式 (15) は重み付き総負荷量を保存する．すなわち， $\forall t \geq 0$ で，

$$\begin{aligned} -\int_M \mathcal{L}f(x) dx &= 0, \\ \sum_{u \in V} m_V(u) \times \frac{\partial f(u)}{\partial t} &= -\sum_{u \in V} m_V(u) \times \mathcal{L}f(u) = 0, \\ \sum_{u \in V} m_V(u) \times f^0(u) &= \sum_{u \in V} m_V(u) \times f(u). \quad (16) \end{aligned}$$

この定理から，式 (10) に従ったプロセス総数に相当する重み付き総負荷量 $\sum_{u \in V} m_V(u) f(u)$ は保存されるが，総負荷量自身の値 $\sum_{u \in V} f(u)$ は変化し得ることがわかる^(注3)．

更に定理 1 において $\forall u \in V, f_1(u) = f_2(u)$ とすれば， $\sum_{u \in V} \mathcal{L}f_1(u) f_1(u) m_V(u) \geq 0$ を得る．これより，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{u \in V} m_V(u) (Ave - f(u))^2 \\ = 2 \sum_{u \in V} m_V(u) (Ave - f(u)) \times \frac{\partial f(u)}{\partial t} \\ = -2 \sum_{u \in V} \mathcal{L}f(u) f(u) m_V(u) \leq 0. \end{aligned}$$

すなわち，拡散方程式 (15) では，平均初期負荷量 $Ave = \sum_{u \in V} f^0(u)/|V|$ と各時刻 t の負荷量 $f(u)$ との差の重み付き二乗和を単調減少させながら解が収束する．

次に定理 2 より，拡散方程式 (15) は負荷を均一化する唯一の解

$$\bar{f}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{v \in V} m_V(v) f(v)}{\sum_{v \in V} m_V(v)} : \text{const.}, \quad (17)$$

をもつことがわかる．もちろん，平衡条件は $\forall u \in V, v \sim u$ に対して， $\bar{f}(u) = \bar{f}(v)$ である． \mathcal{L} が (V, E) 上の作用素であるにもかかわらず，解 (17) と上記の単調減少性に関するマクロな量が，結合構造を表す辺 $e \in E$ に無関係であることは注目に値する．

さて，最適な負荷均一解の性質を議論しよう．文献 [8] では， L_c による DF 法が以下の QP 問題を解くことと等価であることが示されている．

$$\min \quad \frac{1}{2} z'^T z', \quad (18)$$

$$\text{s.t.} \quad BW^{1/2} z' = p^0 - \bar{p}, \quad (19)$$

ここで， B は $|V| \times |E|$ の接続行列 (各要素は，辺 e_i が入る頂点: -1 , 出る頂点: $+1$)， $W \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(m_E(e))$ ， p^0 と \bar{p} はサーバ上のプロセスの初期配分ベクトルと解ベクトル， z' の各要素 z'_{e_i} はプロセスのフロー量に関する変数で，その正値が辺 e_i の方向を表す．

上記の QP 問題式 (18), (19) は，その重み付きフロー量ベクトル $z \stackrel{\text{def}}{=} W^{1/2} z'$ と関係式 (10) より，

$$\min \quad \frac{1}{2} z^T W^{-1} z, \quad (20)$$

$$\text{s.t.} \quad C^{-1} B z = f^0 - \bar{f}, \quad (21)$$

に変換される．式 (10) によって L_c は \mathcal{L} に帰着するので，QP 問題式 (20), (21) を解くことは \mathcal{L} による DF 法と等価になる．

式 (21) は負荷均一化条件を表すが，閉路上の無駄な巡回フロー (プロセスのたらい回し) をもつ可能解も含むので，最小化式 (20) が必要となる．その際，式 (20) はネットワーク全体における通信コストを最小化するフロー配分 z (または $z' = W^{-1/2} z$) を求めることを意味する．

関係式 (10) から，他の従来のスキームも負荷量に関するものに書換え可能である．例えば， $m-1$ 回の反復で収束を保証する，OPS より簡略化された OPT (OPTimal scheme) は，

$$p^k = \left(I - \frac{1}{\lambda_{k+1}} L C^{-1} \right) p^{k-1},$$

と表される [8] ので，式 (10) と $C^{-1} L = \mathcal{L}$ より，

$$f^k = \left(I - \frac{1}{\lambda_{k+1}} \mathcal{L} \right) f^{k-1},$$

となり，前述のように通信相手の性能を隠蔽したうえで負荷均一化が実行できる．ここで， p^k と f^k はそれぞれ k 回目の反復におけるプロセス数ベクトルと負荷量ベクトル， λ_{k+1} は L_c の相異なる正の実固有値 (昇順に $k = 1, \dots, m-1$)， m はその個数である (事前にすべての固有値を計算しておく必要がある点は，これらスキームの問題なのでここでは議論しない)．

4.2 DF 法の挙動

図 1 は拡散方程式 (15) の軌跡と，その総負荷量の時間的変化を模式的に三次元空間で表現したも

(注3): 負荷量はプロセス数を性能で割った値なので，例えば，性能が 2 倍のサーバにプロセスを移動すると，負荷量としては半分になり，総負荷量は保存されない．

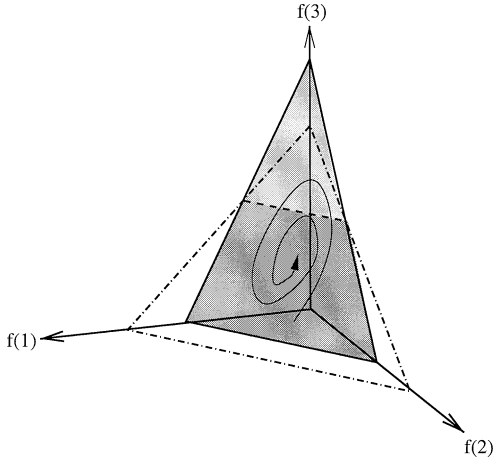


図 1 拘束面上の軌跡

Fig. 1 Trajectory on a constrained plain.

のである．すなわち，頂点番号 $u \in \{1, 2, \dots, |V|\}$ を添字とみなした $|V|$ 次元の f -座標系を力学系の状態空間としてみれば，総負荷量が保存されることは単体 $\sum_{u \in V} f(u) = \text{const.}$ (図中の一点鎖線の正三角形) 上に軌跡が拘束され，重み付き総負荷量 $\sum_{u \in V} m_V(u) f(u)$ が保存されることは，単体以外のある超平面 (図中の実線の三角形) 上に拘束されることを意味する．その際，離散ラプラシアン \mathcal{L} が複素固有値をもてば振動現象が生じ，その軌跡が単体より手前に出た図中の薄い影部分にあるときは総負荷量は増加し，単体より奥の濃い影部分では減少することになる．総負荷量の時間的変化は，幾何学的にはこのように理解することができる．

5. む す び

本論文では，ヘテロな分散システムの負荷均一化問題を考え，計算手法及びスキームや実装技術に依存しない，最適解の性質を明らかにした．具体的には，以下の結果が得られた．

(1) サーバ性能が異なるヘテロな分散システムの負荷均一化に対する DF 法を，非対称行列で表される \mathcal{L} で規定することで，通信相手の性能を隠蔽したうえで負荷均一化が実現できることを示した．

(2) ヘテロな分散システムの負荷均一化における性質として，その最適解が総負荷量を保存しないこと，及び，DF 法としての拡散処理が発散や周期解をもたず，初期負荷配分に従ったある保存量をもって収束すること，が明らかになった．

特にこれらは，様々な通信コストに基づく異なった

最適基準に対しても，成り立つことを強調したい．

謝辞 付録に示した数学的な議論に対して有益な御指摘を頂きました，東北大学大学院理学研究科の砂田利一教授及び情報科学研究科の浦川肇教授に感謝申し上げます．本研究の一部は，文部科学省科学研究費 13680404 の援助を受けている．

文 献

- [1] 佐藤三久，“グローバルコンピューティングへの期待 [8],” *Computer Today*, no.104, pp.65–71, 2001.
- [2] V.S. Sunderam and G.A. Geist, “Heterogeneous parallel and distributed computing,” *Parallel Comput.*, vol.25, pp.1699–1721, 1999.
- [3] W. Shu and M.Y. Wu, “Runtime Incremental parallel scheduling on distributed memory computers,” *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, vol.7, no.6, pp.637–649, 1996.
- [4] C. Xu and F.C.M. Lau, *Load Balancing in Parallel Computers -Theory and Practice-*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [5] Y.F. Hu and R.J. Blake, “An improved diffusion algorithm for dynamic load balancing,” *Parallel Comput.*, vol.25, pp.417–444, 1999.
- [6] R. Diekmann, A. Frommer, and B. Monien, “Efficient schemes for nearest neighbor load balancing,” *Parallel Comput.*, vol.25, pp.789–812, 1999.
- [7] R. Elsässer, A. Frommer, B. Monien, and R. Preis, “Optimal and alternating-direction load balancing schemes,” *Euro-Par’99, LNCS*, 1685, ed. P. Amestoy, et al., pp.280–290, 1999.
- [8] R. Elsässer, B. Monien, and R. Preis, “Diffusive load balancing schemes on heterogeneous networks,” *Proc. SPAA*, pp.30–38, 2000.
- [9] Y. Hayashi, “Efficient load balancing by adaptive bypasses for the migration on the internet,” to appear in *Proc. ICCS, LNCS*, Springer, 2003.
- [10] F.R.K. Chung, *Spectral Graph Theory*, chapter 1, American Mathematical Society, 1994.
- [11] 浦川 肇，ラプラス作用素とネットワーク，第 7 章，裳華房，1996.
- [12] 砂田利一，“離散スペクトル幾何学”，*数学のたのしみ*，上野健爾，志賀浩二，砂田利一編，no.12, pp.67–80, 日本評論社，1999.
- [13] Y. Hayashi, “A Laplacian suitable for diffusion or delivery on heterogeneous structures,” *Proc. ISITA/NOLTA*, pp.351–354, 2002.
- [14] 浦川 肇，変分法と調和写像，pp.68–72, 裳華房，1990.

付 録

付録 1. では，従来の Levi-Civita 接続の代わりに情報幾何学の双対接続を用いたラプラシアン \mathcal{L} [13] と，その計量の偏微分 $\partial_i g^{ii}(x)$ を辺 e_i の両端点 u, v における重みの差分 $\Delta g^{ii}(u)$ に対応付けた離散ラプラシ

ン (7) に対して, 定理 1 を証明する ($\partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial/\partial x^i$).
更に付録 2. では定理 2 を証明する.

1. 定理 1 の証明

コンパクト Riemann 多様体 M 上の C^∞ 関数 $f(x)$ と, 以下の作用素 \mathcal{L} を考える.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(x) = & - \sum_{ij} g^{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \\ & - \sum_{ik} \partial_i g^{ik}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}.\end{aligned}\quad (\text{A}\cdot 1)$$

ここで, $[g^{ij}]$ は Riemann 計量 $[g_{ij}]$ の逆行列, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ である.

まず, 式 (A-1) に対する定理 1 の連続版を証明する. コンパクトな多様体 M 上の C^∞ 関数 f_1, f_2 を考える (連続版についてのみ, 以下の議論は $i \neq k, g^{ij} \neq 0$ の場合でも成立するので一般形で書く).

式 (A-1) が,

$$\mathcal{L}f = - \sum_{i,j} \left(g^{ij} \partial_i \partial_j f + \partial_i g^{ij} \partial_j f \right),$$

であることと, 余境界作用素 (またはこう配と呼ばれる) df の内積の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \partial_i (g^{ij} \partial_j f_1 f_2) &= \sum_{i,j} \{ \partial_i g^{ij} \partial_j f_1 f_2 \\ &\quad + g^{ij} \partial_i \partial_j f_1 f_2 \\ &\quad + g^{ij} \partial_j f_1 \partial_i f_2 \}, \\ &= -(\mathcal{L}f_1 f_2 - (df_1, df_2)_G),\end{aligned}$$

となる. 通常の体積に関する測度 $\sqrt{\det(g_{ij})}dx$ に固執せず, $\int_M dx$ を両辺に施すと, M がコンパクトであることから左辺は 0 になる. なぜなら, M はコンパクトなので, その細分として局所有限開被覆がとれ, その座標近傍系 $\{(U_a, a); a \in \mathcal{A}\}$ に対して,

- (1) $0 \leq \varphi_a(x) \leq 1, x \in M, a \in \mathcal{A}$,
- (2) 各 $a \in \mathcal{A}$ に対し $\{x \in M; \varphi_a(x) \neq 0\}$ の閉包 $\text{supp}(\varphi)$ が U_a に含まれる,

(3) 各点 $x \in M$ で, $\sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_a(x) = 1$,
を満たす 1 の分割 $\{\varphi_a; a \in \mathcal{A}\}$ が存在し, コンパクトな台 $\text{supp}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M; f(x) \neq 0\}$ の閉包がコンパクトである M 上の関数 $f(x)$ の積分 $\int_M f(x)dx$ を,

$$\int_M \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_a(x) f(x) dx = \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_{U_a} \varphi_a(x) f(x) dx,$$

と定義することができる [14]. ゆえに, 上記の左辺に相当する $\int_M \partial_i (g^{ij} \partial_j f_1 f_2) dx$ は U_a の境界での値を代入したものとなるが, U_a 上のコンパクトな台の閉包は U_a に含まれるので, これは 0 になる.

同様に,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \{ \partial_i (g^{ij} \partial_j f_1 f_2) - \partial_j (g^{ij} f_1 \partial_i f_2) \} \\ = -(\mathcal{L}f_1 f_2 - f_1 \mathcal{L}f_2),\end{aligned}$$

に対して両辺の積分 $\int_M dx$ をとると, 左辺は 0 になる. よって, 式 (11) が成り立つ.

次に離散版について考える. 式 (7) と式 (9) の対応付けから, 式 (14) の右辺は,

$$\begin{aligned}\sum_u \mathcal{L}f_1(u) f_2(u) m_V(u) \\ = \sum_u \sum_{v \sim u} (f_1(u) - f_1(v)) f_2(u) m_E(e_i).\end{aligned}$$

一方, (13) の右辺において, e_i と \bar{e}_i で辺を二重に考えていることから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{e_i, \bar{e}_i} df_1(e_i) df_2(e_i) m_E(e_i) \\ = \frac{1}{2} \sum_{e_i, \bar{e}_i} (f_1(u) - f_1(v)) (f_2(u) - f_2(v)) m_E(e_i) \\ = \sum_u \sum_{v \sim u} (f_1(u) - f_1(v)) f_2(u) m_E(e_i).\end{aligned}$$

ゆえに, グラフ上の作用素式 (7) について, グリーンの公式 (12) が成立する. f_1 と f_2 を左右入れ換えても同様である [QED].

2. 定理 2 の証明

V 中で $f(u)$ が最大値と仮定する (最小値でも以下同様). また, この頂点 u の隣接点 $v \sim u$ における最大値を $f(v')$ とし, $w(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} g^{ii}(v)$ と表記する.

\mathcal{L} -調和関数は, $w(u, v) > 0, \forall u \in V$ に対して,

$$-\sum_{v \sim u} w(u, v) (f(v) - f(u)) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$f(u) = \frac{1}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} \sum_{v \sim u} w(u, v) f(v),$$

を満たすものであることから,

$$f(u) = \frac{1}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} \sum_{v \sim u} w(u, v) f(v)$$

$$\leq \frac{\sum_{v \sim u} w(u, v)}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} f(v') = f(v'),$$

となり, $f(u)$ の最大値性の仮定により $f(u) = f(v')$ となる (不等号の場合は仮定に矛盾).

一方, $f(u)$ の最大値性と $w(u, v) > 0$ により,

$$\mathcal{L}f(u) = - \sum_{v \sim u} w(u, v)(f(v) - f(u))$$

$$= \sum_{v \sim v'} w(v, v')(f(v') - f(v)) \geq 0,$$

における和の各項が非負となるので, $f(u)$ が \mathcal{L} -調和であるには, $\forall v \sim u$ に対して, $f(u) = f(v) = f(v')$ でなければならない. グラフは連結なので隣接するすべての頂点でこれが成り立つ. ゆえに, $f(u)$ は定数となる [QED].

(平成 15 年 4 月 8 日受付, 6 月 3 日最終原稿受付)