Original Paper

J Jpn Ind Manage Assoc 67, 295−302, 2017

Interactive Decision Making for Multiobjective Fuzzy Random Simple Recourse Programming Problems and Its Application

Hitoshi YANO [†1]

Abstract

In this paper, the author formulates a multiobjective simple recourse programming problem in which equality constraints with fuzzy random variables are involved. In the proposed method, equality constraints with fuzzy random variables are defined applying a possiblity measure. For a given permissible level γ specified by the decision maker, a γ-Pareto optimality concept is introduced. An interactive decision making method is proposed to obtain a satisfactory solution from among the γ-Pareto optimal solution set. The proposed method is applied to a farm planning problem in the Philippines, in which it is assumed that the amount of water supplied during the dry season is represented as a fuzzy random variable.

Key words: multiobjective programming, simple recourse programming, possibility measure, fuzzy random variables, satisfactory solution

[†1] Department of Social Sciences, Graduate School of Humanities and Social Sciences, Nagoya City University
Received: November 18, 2015
Accepted: August 8, 2016

原著論文

多目的ファジィランダム単純リコース問題に対する対話型意思決定とその応用

矢　野　　均 †1

本論文では，ファジィランダム変数係数を等式制約式に含む多目的単純リコース問題について考察する．多目的ファジィランダム単純リコース問題に含まれるファジィランダム変数係数を取り扱うために，可能性測度に対する可能性レベル γ の概念を導入する．可能性レベル γ をパラメータとする多目的ファジィランダム単純リコース問題に対して，パレート最適解の概念を導入し，パレート最適解集合の中から意思決定者の満足解を導出するための対話型意思決定手法を提案し，フィリピンの天水農業問題に適用する．この農業問題問題では，乾季における水資源供給量の不確実性をファジィランダム変数係数で表現し，確率的不確実性と主観的あいまい性を同時に考慮した各種作物の最適割当面積を決定する．

キーワード： 多目的計画問題, 単純リコース計画問題, 可能性測度, ファジィランダム変数, 満足解

1 は じ め に

確率変数係数を含む数理計画問題を取り扱うための確率計画法は，2 段階計画アプローチと機会制約アプローチに分類することができる [1]〜[9]．2 段階計画アプローチでは，制約条件を満たさない量（不足量と超過量）の期待値に対するペナルティを考慮した目的関数を最適化する [4],[5],[8],[9]．近年，不確実状況下における水資源計画問題に対処するために，区間係数やファジィ係数および確率変数係数を含む水資源計画モデルに対する 2 段階計画アプローチに基づく手法が盛んに研究されてきている [10],[11]．本論文では，2 段階計画アプローチの中で最も取り扱いやすい単純リコース問題に焦点を当てて，ファジィランダム変数係数 [12] を等式制約式に含む多目的ファジィランダム計画問題を定式化し，可能性測度 [13] に基づく γ-パレート最適解の概念を導入する．任意の γ-パレート最適解は対応する凸計画問題を解くことにより求められることを示す．γ-パレート最適解の集合の中から，ファジィランダム変数係数の主観的曖昧さと確率的不確実性を考慮した満足解を導出するための対話型アルゴリズムを提案する．提案手法を，仮想的な意思決定者の下でフィリピンの天水農業問題 [14] に適用して，提案手法の有効性を検討する．ここでは，乾季に作付を行う 6 品目の作物の水資源供給量がファジィランダム変数係数で表されると仮定して，年間総収益と年間総労働時間のバランスのみならず水供給量の不確実性をも考慮した，雨季に作付けするイネを含めた 7 品目の作物の最適作付面積を求める．

†1 名古屋市立大学・人文社会学部・現代社会学科
受付：2015 年 11 月 18 日，再受付（1 回）
受理：2016 年 8 月 8 日

2 多目的ファジィランダム単純リコース問題

本論文では，等式制約式右辺がファジィランダム変数係数 [12] で表される多目的ファジィランダム計画問題 [15]〜[17] について考察する．

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\ (\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{c}_k\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

subject to

$$A\boldsymbol{x}=\tilde{\bar{\boldsymbol{d}}} \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{c}_\ell=(c_{\ell 1},\cdots,c_{\ell n}),\ell=1,\cdots,k$ は n 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\geq\boldsymbol{0}$ は非負条件を満たす n 次元決定変数ベクトル，X は決定変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する線形制約集合を表す．また，制約式左辺の A は $(m\times n)$ 行列，制約式右辺はファジィランダム変数ベクトル $\tilde{\bar{\boldsymbol{d}}}=(\tilde{\bar{d}}_1,\cdots,\tilde{\bar{d}}_m)^T$，各要素 $\tilde{\bar{d}}_i,i=1,\cdots,m$ はファジィランダム変数係数を表す．ファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{d}}_i,i=1,\cdots,m$ を取り扱うために，Katagiri ら [15],[16] は，ファジィランダム変数係数の特殊な形式としてみなすことができる LR 型ファジィランダム変数を定義した．LR 型ファジィランダム変数 $\tilde{\bar{d}}_i$ とは，事象 ω が生起したときの実現値が以下のメンバシップ関数で定義される LR ファジィ数 [13] であるようなファジィランダム変数である．

$$\mu_{\tilde{d}_i(\omega)}(s)=\begin{cases} L\left(\frac{\bar{b}_i(\omega)-s}{\alpha_i}\right), & s\leq\bar{b}_i(\omega)\\ R\left(\frac{s-\bar{b}_i(\omega)}{\beta_i}\right), & s>\bar{b}_i(\omega)\end{cases} \tag{3}$$

ここで，$\tilde{\bar{d}}_i(\omega)$ は事象 ω が生起したときのファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{d}}_i$ の実現値を表す．LR ファジィ数を構成

する関数 $L(t)$ は $[0,l]$ から $[0,1]$ への連続な狭義単調減少関数で，$L(0)=1, L(l)=0$，$R(t)$ は $[0,r]$ から $[0,1]$ への連続な狭義単調減少関数で，$R(0)=1, R(r)=0$ とする（ただし，$l,r>0$）．また，$\alpha_i>0$ と $\beta_i>0$ は左右に広がりのパラメータを表す [13]. LR ファジィ数の平均（メンバシップ関数が 1 になる値）を表すパラメータ $\bar{b}_i$ は確率変数で，その確率密度関数を $f_i(\cdot)$，分布関数を $F_i(\cdot)$ で表す．各確率変数 $\bar{b}_i, i=1,\cdots,m$ は互いに独立であると仮定する．

多目的ファジィランダム計画問題 (1) は等式制約式右辺にファジィランダム変数係数を含むため，そのままでは取り扱うことができない．そこで，等式制約式 (2) 右辺の LR 型ファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{d}}_i$ の実現値 $\tilde{\bar{d}}_i(\omega)$ における等号関係を，可能性測度 [13] を用いて定義し，意思決定者が可能性測度に対する可能性レベル $\gamma(0<\gamma\le 1)$ を設定して，

$$\mathrm{Pos}(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}=\tilde{\bar{\boldsymbol{d}}}_i(\omega))\ge\gamma, i=1,\cdots,m \quad (4)$$

ならば，等号関係が成立していると仮定する．ここで，

$$\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},\cdots,a_{in}), i=1,\cdots,m \quad (5)$$

は，行列 A の第 i 行の n 次元行ベクトルを表す．このとき，多目的ファジィランダム計画問題 (1) は，次の多目的確率計画問題に変換できる．

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\ (\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{c}_k\boldsymbol{x}) \quad (6)$$

subject to

$$\mathrm{Pos}(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}=\tilde{\bar{\boldsymbol{d}}}_i(\omega))\ge\gamma, i=1,\cdots,m \quad (7)$$

制約式 (7) の i 番目の不等式は，LR ファジィ数の性質から等価的に次の不等式に変換できる．

$$\bar{b}_i(\omega)-L^{-1}(\gamma)\alpha_i\le\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}\le\bar{b}_i(\omega)+R^{-1}(\gamma)\beta_i \quad (8)$$

ここで，$(y_i^+, y_i^-)\ge\mathbf{0}, i=1,\cdots,m$ を 2 種類の不等式制約式 (8) に対する不足量と超過量

$$\boldsymbol{y}^+=(y_1^+,\cdots,y_m^+)^T, \boldsymbol{y}^-=(y_1^-,\cdots,y_m^-)^T$$

とすれば，多目的確率計画問題 (6) に対応する単純リコース問題は，以下の多目的計画問題に帰着する（以下，多目的ファジィランダム単純リコース問題と呼ぶ）．

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\min_{\boldsymbol{x}\in X}\ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}+E\left[\min_{\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-}\ \left(\boldsymbol{q}_1^+\boldsymbol{y}^++\boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{y}^-\right)\right]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \displaystyle\min_{\boldsymbol{x}\in X}\ \boldsymbol{c}_k\boldsymbol{x}+E\left[\min_{\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-}\ \left(\boldsymbol{q}_k^+\boldsymbol{y}^++\boldsymbol{q}_k^-\boldsymbol{y}^-\right)\right]\end{array}\right\} \quad (9)$$

subject to

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}+y_i^+-y_i^-\ge\bar{b}_i-L^{-1}(\gamma)\alpha_i,$$
$$i=1,\cdots,m \quad (10)$$
$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}+y_i^+-y_i^-\le\bar{b}_i+R^{-1}(\gamma)\beta_i,$$
$$i=1,\cdots,m \quad (11)$$
$$\boldsymbol{x}\ge\mathbf{0},\boldsymbol{y}^+\ge\mathbf{0},\boldsymbol{y}^-\ge\mathbf{0} \quad (12)$$

ここで，

$$\boldsymbol{q}_\ell^+=(q_{\ell 1}^+,\cdots,q_{\ell m}^+), \boldsymbol{q}_\ell^-=(q_{\ell 1}^-,\cdots,q_{\ell m}^-),$$
$$\ell=1,\cdots,k \quad (13)$$

は制約式 (8) の不足量 $\boldsymbol{y}^+$ と超過量 $\boldsymbol{y}^-$ に対する ℓ 番目の目的関数の重み係数ベクトルを表す．

多目的ファジィランダム単純リコース問題 (9) に対して，以下のパレート最適解を定義することができる．

定義 1

多目的ファジィランダム単純リコース問題 (9) において，$\boldsymbol{c}_\ell\boldsymbol{x}+E\left[\min_{\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-}\left(\boldsymbol{q}_\ell^+\boldsymbol{y}^++\boldsymbol{q}_\ell^-\boldsymbol{y}^-\right)\right]\le\boldsymbol{c}_\ell\boldsymbol{x}^*+E\left[\min_{\boldsymbol{y}^{*+},\boldsymbol{y}^{*-}}\left(\boldsymbol{q}_\ell^+\boldsymbol{y}^{*+}+\boldsymbol{q}_\ell^-\boldsymbol{y}^{*-}\right)\right], \ell=1,\cdots,k$（少なくとも一つは狭義の不等号が成立）なる $\boldsymbol{x}\in X$，$\boldsymbol{y}^+\ge\mathbf{0}$，$\boldsymbol{y}^-\ge\mathbf{0}$ が存在しなければ，$\boldsymbol{x}^*\in X$，$\boldsymbol{y}^{*+}\ge\mathbf{0}$，$\boldsymbol{y}^{*-}\ge\mathbf{0}$ を (9) の γ-パレート最適解という．

多目的ファジィランダム単純リコース問題 (9) の γ-パレート最適解と重み係数ベクトル $\boldsymbol{q}_\ell^+,\boldsymbol{q}_\ell^-, \ell=1,\cdots,k$ の間には次の定理が成立する．

定理 1

$q_{\ell i}^++q_{\ell i}^-\ge 0, i=1,\cdots,m, \ell=1,\cdots,k$ とする．ただし，少なくとも一つの $\ell\in\{1,\cdots,k\}$ に対して，$q_{\ell i}^++q_{\ell i}^->0, i=1,\cdots,m$ とする．このとき，$\boldsymbol{x}^*\in X, \boldsymbol{y}^{+*}\ge\mathbf{0}, \boldsymbol{y}^{-*}\ge\mathbf{0}$ を多目的ファジィランダム単純リコース問題 (9) の γ-パレート最適解とすると，$y_i^{+*}\cdot y_i^{-*}=0, i=1,\cdots,m$ が成立する．

（証明）

多目的ファジィランダム単純リコース問題 (9) の γ-パレート最適解 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^{+*},\boldsymbol{y}^{-*})$ において，$y_i^{+*}\cdot y_i^{-*}>0$ なる $i\in\{1,\cdots,m\}$ が存在すると仮定する．このとき，一般性を失うことなく，$y_i^{+*}\ge y_i^{-*}>0$ とする．ここで，$y_i^{+'}\leftarrow y_i^{+*}-y_i^{-*}\ge 0$，$y_i^{-'}\leftarrow y_i^{-*}-y_i^{-*}=0$ とすると，$(y_i^{+'},y_i^{-'}), i=1,\cdots,m$ は制約式 (10),(11),(12) を満たす．一方，(9) の各目的関数の第二項において，$q_{\ell i}^+y_i^{+'}+q_{\ell i}^-y_i^{-'}=q_{\ell i}^+y_i^{+*}+q_{\ell i}^-y_i^{-*}-(q_{\ell i}^++q_{\ell i}^-)\cdot y_i^{-*}<q_{\ell i}^+y_i^{+*}+q_{\ell i}^-y_i^{-*}$ となる．ここで，ベクトル $(\boldsymbol{y}^{+*},\boldsymbol{y}^{-*})$ の第 i 番目の要素のみを $y_i^{+'},y_i^{-'}$ に入れ替えたベクトルを $(\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-)$ とすれば，$\boldsymbol{q}_\ell^+\boldsymbol{y}^++\boldsymbol{q}_\ell^-\boldsymbol{y}^-\le\boldsymbol{q}_\ell^+\boldsymbol{y}^{+*}+\boldsymbol{q}_\ell^-\boldsymbol{y}^{-*}, \ell=1,\cdots,k$ が

成立する（狭義の不等号が少なくとも一つ成立）．これは，$\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}^{+*} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}^{-*} \geq \boldsymbol{0}$ が γ-パレート最適解であることに反する．

以下では，多目的ファジィランダム単純リコース問題 (9) において，$q_{\ell i}^+ + q_{\ell i}^- \geq 0, i=1,\cdots,m, \ell=1,\cdots,k$（ただし，少なくとも一つの $\ell \in \{1,\cdots,k\}$ に対して，$q_{\ell i}^+ + q_{\ell i}^- > 0, i=1,\cdots,m$）の場合について考察する．このとき，定理 1 より，多目的ファジィランダム単純リコース問題 (9) の γ-パレート最適解において，$(\boldsymbol{y}^+, \boldsymbol{y}^-)$ は次式を必ず満たす [18].

(1) $\bar{b}_i(\omega) - L^{-1}(\gamma)\alpha_i > \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}$ のとき，$y_i^+ = \bar{b}_i(\omega) - L^{-1}(\gamma)\alpha_i - \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} > 0, y_i^- = 0$.

(2) $\bar{b}_i(\omega) + R^{-1}(\gamma)\beta_i < \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}$ のとき，$y_i^+ = 0, y_i^- = \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} - (\bar{b}_i(\omega) + R^{-1}(\gamma)\beta_i) > 0$.

(3) $\bar{b}_i(\omega) - L^{-1}(\gamma)\alpha_i \leq \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} \leq \bar{b}_i(\omega) + R^{-1}(\gamma)\beta_i$ のとき，$y_i^+ = 0, y_i^- = 0$.

以上より，多目的ファジィランダム単純リコース問題 (9) を次式のように書き直すことができる．

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} \ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} + E\left[\min\limits_{\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-} \left(\boldsymbol{q}_1^+\boldsymbol{y}^+ + \boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{y}^-\right)\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \min\limits_{\boldsymbol{x}\in X} \ \boldsymbol{c}_k\boldsymbol{x} + E\left[\min\limits_{\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-} \left(\boldsymbol{q}_k^+\boldsymbol{y}^+ + \boldsymbol{q}_k^-\boldsymbol{y}^-\right)\right] \end{array}\right\} \tag{14}$$

subject to

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} + y_i^+ \geq \bar{b}_i(\omega) - L^{-1}(\gamma)\alpha_i, i=1,\cdots,m \\ &\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} - y_i^- \leq \bar{b}_i(\omega) + R^{-1}(\gamma)\beta_i, i=1,\cdots,m \\ &\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y}^+ \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}^- \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ℓ 番目の目的関数の第二項は，次式のように変形することができる [18].

$$\begin{aligned} &E\left[\min_{\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-} \left(\boldsymbol{q}_\ell^+\boldsymbol{y}^+ + \boldsymbol{q}_\ell^-\boldsymbol{y}^-\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^m q_{\ell i}^+ \Big(E[\bar{b}_i] - \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} - L^{-1}(\gamma)\alpha_i\Big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m q_{\ell i}^+ \Big\{(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} + L^{-1}(\gamma)\alpha_i)F_i(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} \\ &\quad + L^{-1}(\gamma)\alpha_i) - \int_{-\infty}^{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}+L^{-1}(\gamma)\alpha_i} b_i f_i(b_i)db_i\Big\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^m q_{\ell i}^- \Big\{(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} - R^{-1}(\gamma)\beta_i)F_i(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} \\ &\quad - R^{-1}(\gamma)\beta_i) - \int_{-\infty}^{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}-R^{-1}(\gamma)\beta_i} b_i f_i(b_i)db_i\Big\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} d_\ell(\boldsymbol{x},\gamma) \end{aligned} \tag{15}$$

以下において，

$$z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{c}_\ell\boldsymbol{x} + d_\ell(\boldsymbol{x},\gamma), \ell=1,\cdots,k \tag{16}$$

とおくと，多目的ファジィランダム単純リコース問題 (14) は，形式的には可能性レベル γ をパラメータとする多目的計画問題に帰着する．

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} \ (z_1(\boldsymbol{x},\gamma),\cdots,z_k(\boldsymbol{x},\gamma)) \tag{17}$$

多目的計画問題 (17) に対して，不足量と超過量のベクトル $(\boldsymbol{y}+, \boldsymbol{y}-)$ を含まない γ-パレート最適解を再定義することができる．

定義 2

多目的計画問題 (17) において，$z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma) \leq z_\ell(\boldsymbol{x}^*,\gamma), \ell=1,\cdots,k$ なる $\boldsymbol{x} \in X$ が存在しなければ，$\boldsymbol{x}^* \in X$ を (17) の γ-パレート最適解という．

本節では，意思決定者が多目的計画問題 (17) の目的関数 $z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma), \ell = 2,\cdots,k$ に対する目的レベル $\hat{z}_\ell, \ell=2,\cdots,k$ を主観的に設定して，以下の制約問題 [19] を解くことにより対応する γ-パレート最適解を求めるものとする．

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} z_1(\boldsymbol{x},\gamma) \tag{18}$$

$$\text{s.t.} \quad z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma) \leq \hat{z}_\ell, \ell=2,\cdots,k \tag{19}$$

制約問題の最適解と γ-パレート最適解の間には次の関係が成立する [19].

定理 2

(1) 制約問題 (18) の一意な最適解 $\boldsymbol{x}^* \in X$ は多目的計画問題 (17) に対する γ-パレート最適解である．

(2) $\boldsymbol{x}^* \in X$ が多目的計画問題 (17) に対する γ-パレート最適解ならば，$\boldsymbol{x}^* \in X$ が制約問題 (18) の最適解となるような目的レベル $\hat{z}_\ell, \ell=2,\cdots,k$ が存在する．

一方，多目的計画問題 (17) の各目的関数 $z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma), \ell=1,\cdots,k$ に対する決定変数 $x_s, s=1,\cdots,n$ に関する 1 回微分は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma)}{\partial x_s} &= c_s - \sum_{i=1}^m q_{\ell i}^+ a_{is} \\ &\quad + \sum_{i=1}^m q_{\ell i}^+ a_{is} F_i(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} + L^{-1}(\gamma)\alpha_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m q_{\ell i}^- a_{is} F_i(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} - R^{-1}(\gamma)\beta_i) \end{aligned}$$

同様に，多目的計画問題 (17) の各目的関数 $z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma), \ell=1,\cdots,k$ に対する決定変数 $x_s, s=1,\cdots,n$ と $x_t, t=1,\cdots,n$ に関する 2 回微分は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma)}{\partial x_s \partial x_t}\\
&= \sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{+} a_{is} a_{it} f_i(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} + L^{-1}(\gamma)\alpha_i)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{-} a_{is} a_{it} f_i(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} - R^{-1}(\gamma)\beta_i) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

よって，$z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma), \ell = 1,\cdots,k$ のヘッセ行列は次式で表される．

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2 z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma)\\
&= \sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{+} f_i(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} + L^{-1}(\gamma)\alpha_i) \cdot A_i\\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{-} f_i(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} - R^{-1}(\gamma)\beta_i) \cdot A_i \qquad (21)
\end{aligned}
$$

ここで，$A_i, i = 1,\cdots,m$ は次式で定義される $(n \times n)$ 行列である．

$$
A_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^2 & \cdots & a_{i1}a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in}a_{i1} & \cdots & a_{in}^2 \end{pmatrix}, i = 1,\cdots,m \quad (22)
$$

制約問題 (18) に関して，以下の定理が成立する．

定理３

制約問題 (18) は凸計画問題である．

（証明）

式 (5) の定義より，$A_i = \boldsymbol{a}_i^T \cdot \boldsymbol{a}_i$ が成立している．よって，任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n$ に対して以下の関係が成立する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^T A_i \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}^T \cdot (\boldsymbol{a}_i^T \cdot \boldsymbol{a}_i) \cdot \boldsymbol{y}\\
&= (\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{a}_i^T) \cdot (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{y})\\
&= (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{y})^T \cdot (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{y}) \geq 0
\end{aligned}
$$

即ち，$A_i, i = 1,\cdots,m$ は半正定行列である．よって，確率密度関数 $f_i(\cdot) \geq 0, i = 1,\cdots,m$，$q_{\ell i}^{+} \geq 0, q_{\ell i}^{-} \geq 0, \ell = 1,\cdots,k, i = 1,\cdots,m$ であることから，ヘッセ行列 $\nabla^2 z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma), \ell = 1,\cdots,k$ に対して次式が成立する．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}^T \nabla^2 z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma) \boldsymbol{y}\\
&= \sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{+} f_i(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} + L^{-1}(\gamma)\alpha_i) \cdot \boldsymbol{y}^T A_i \boldsymbol{y}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{-} f_i(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} - R^{-1}(\gamma)\beta_i) \cdot \boldsymbol{y}^T A_i \boldsymbol{y} \geq 0
\end{aligned}
$$

よって，$z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma), \ell = 1,\cdots,k$ は凸関数となり，制約問題 (18) は凸計画問題である．

一方，可能性レベル γ と目的関数 $z_\ell(\boldsymbol{x}^*,\gamma)$ の間には次の定理が成立する．

定理４

多目的計画問題 (17) の最適解 $\boldsymbol{x}^* \in X$ において，目的関数 $z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma), \ell = 1,\cdots,k$ と可能性レベル $\gamma(0 < \gamma \leq 1)$ の間には次の関係が成立する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z_\ell(\boldsymbol{x}^*,\gamma)}{\partial \gamma}\\
&= -\sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{+} \frac{\partial L^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} \alpha_i\\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{+} \frac{\partial L^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} \alpha_i F_i(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x}^* + L^{-1}(\gamma)\alpha_i)\\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} q_{\ell i}^{-} \frac{\partial R^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} \beta_i F_i(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x}^* - R^{-1}(\gamma)\beta_i)
\end{aligned} \qquad (23)
$$

以上より，パレート最適解集合の中から意思決定者の満足解を導出するための対話型アルゴリズムを以下のように構成することができる．従来の多目的ファジィランダム計画問題に対する対話型アルゴリズム [15],[16],[20] では機会制約法に基づく満足解を導出するのに対して，本論文で提案する対話型アルゴリズムは二段階計画法に基づく満足解を導出する点に特徴がある．

[対話型アルゴリズム]

ステップ 1:　意思決定者が，多目的ファジィランダム計画問題 (1) に対して，各目的関数の重み係数 $\boldsymbol{q}_\ell^{+} = (q_{\ell 1}^{+},\cdots,q_{\ell m}^{+}) \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{q}_\ell^{-} = (q_{\ell 1}^{-},\cdots,q_{\ell m}^{-}) \geq \boldsymbol{0}, \ell = 1,\cdots,k$ を設定する．

ステップ 2:　可能性レベル $\gamma = 1$ とし，意思決定者が，初期目的レベル $\hat{z}_\ell, \ell = 2,\cdots,k$ を設定する．

ステップ 3:　設定された可能性レベル γ と目的レベル $\hat{z}_\ell, \ell = 2,\cdots,k$ に対して制約問題 (18) を解き，対応する γ-パレート最適解 $\boldsymbol{x}^* \in X$ を求める．

ステップ 4:　得られた γ-パレート最適解 $z_\ell(\boldsymbol{x}^*,\gamma), \ell = 1,\cdots,k$ に満足であれば終了する．そうでなければ，目的レベル $\hat{z}_\ell, \ell = 2,\cdots,k$ を更新するか，目的関数 $z_\ell(\boldsymbol{x},\gamma)$ の感度情報 (23) を考慮して可能性レベル γ を更新してステップ 3 にもどる．

3　フィリピンの天水農業への応用

この節では，フィリピンにおける天水農業の作付計画問題を多目的ファジィランダム単純リコース問題として定式化し，仮想的意思決定者のもとで対話型アルゴリズムを適用して，パラメータを種々変更することにより，対応する γ-パレート最適解がどのように変化するかを検討する．

以下のデータは文献 [14] のデータに基づいているが，

乾季における水資源供給量を修正して使用している．対象とする農家では家族労働力が 2 人で，1 ヘクタールの土地を雨季（5 月から 10 月）にはイネ (x_1) を，乾季（11 月から 4 月）にはタバコ (x_2)，トマト (x_3)，ニンニク (x_4)，緑豆 (x_5)，トウモロコシ (x_6)，ピーマン (x_7) の作付を行うものとする．ここで，x_j は j 番目の作物の作付面積（単位 : 1 ヘクタール）を表す．この農家では，年間総収益の最大化と年間労働時間の最小化を望んでおり，これらの適切なバランスを実現する 7 種類の作物の作付問題を定式化する．まず，各作物の利益係数（単位 : 1000 ペソ/1 ヘクタール）は，過去 5 年間のデータ [14] に基づき $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = (4.38, 25.82, 27.04, 37.46, 6.46, 2.58, 20.28)$ と設定する．本論文では，各利益係数間の共分散は考慮しないものと仮定する．このとき，第 1 の目的関数は，年間総収益にマイナスを付した以下の線形関数として表される．

$$\min\ z_1(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{j=1}^{7} c_j x_j$$

次に，第 2 の目的関数として年間労働時間を取り上げる．まず，1 年間を 10 日間単位（1 期間）で区切り，各期間の中で作業にあたる 27 期間（270 日間）に対して，各期間 $\ell = 1, \cdots, 27$ に対する各作物 $j = 1, \cdots, 7$ の単位面積あたりの必要労働時間 $L_{\ell j}$ を表 1 にまとめる [14]．このとき，第 2 の目的関数である年間総労働時間 $z_2(\boldsymbol{x})$ は次式で表される．

$$\min\ z_2(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^{27} \sum_{j=1}^{7} L_{\ell j} x_j$$

さらに, 制約式について考える．1 日の労働時間の上限を 8 時間とすると，1 期間（10 日間）の労働時間の上限は，8 (時間) × 2 (人) × 10 (日) = 160 (時間) となるので次式が得られる．

$$\sum_{j=1}^{7} L_{\ell j} x_j \le 160,\ \ell = 1, \cdots, 27 \tag{24}$$

土地に関する制約条件として，雨季にはイネ (x_1) を，乾季にはタバコ (x_2)，トマト (x_3)，, ニンニク (x_4)，緑豆 (x_5)，トウモロコシ (x_6)，ピーマン (x_7) の作付を行うことから，以下の土地制約条件を満たさなければならない．

$$x_1 \le 1, \sum_{j=2}^{7} x_j \le 1, x_j \ge 0, j = 1, \cdots, 7 \tag{25}$$

以下において，線形不等式 (24),(25) を満たす解集合を X で表す．さらに，乾季には使用可能な水資源に限り

表 1　各期の必要労働時間 $L_{\ell j}$

期間 : ℓ	$L_{\ell 1}$	$L_{\ell 2}$	$L_{\ell 3}$	$L_{\ell 4}$	$L_{\ell 5}$	$L_{\ell 6}$	$L_{\ell 7}$
2-May : 1	26						
1-Jun : 2	16						
2-Jun : 3	160						
1-Jul : 4	16						
2-Jul : 5	6						
2-Aug : 6	8						
3-Sep : 7	140						
1-Oct : 8	32	8					
3-Oct : 9		46			6		
1-Nov : 10		36		174		8	
2-Nov : 11		100	10	44	12	54	50
3-Nov : 12			22	16	12	8	20
1-Dec : 13		8	38	16	10	16	108
2-Dec : 14		16	94	16			72
3-Dec : 15		8	32	16			24
1-Jan : 16		8	14				64
2-Jan : 17		36	14		12		16
3-Jan : 18		70	6				
1-Feb : 19		70	6	180			48
2-Feb : 20		36	14			60	56
3-Feb : 21		36	6				48
1-Mar : 22			36				56
2-Mar : 23			30		32		
3-Mar : 24			30				
1-Apr : 25			38		56		
2-Apr : 26			30				
3-Apr : 27			26				

があり，乾季の作物 6 種類 ($x_j, j = 2, \cdots, 7$) の 1 ヘクタール当たりの水要求量（単位 : 1000 ガロン）は，

$$\begin{aligned} &(w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) \\ &= (264.6, 232.3, 352.8, 88.2, 44.1, 220.5) \end{aligned}$$

である．本節では水の年間利用可能量を，式 (3) で定義される LR 型ファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{d}}$（単位 : 1000 ガロン）で表す．

$$\mu_{\tilde{\bar{d}}(\omega)}(s) = \begin{cases} L\left(\frac{\bar{b}(\omega)-s}{\alpha}\right), & s \le \bar{b}(\omega) \\ R\left(\frac{s-\bar{b}(\omega)}{\beta}\right), & s > \bar{b}(\omega) \end{cases}$$

ここで，$\bar{b} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$，$\alpha = \beta = 30$，型関数は $L(t) = R(t) = 1 - t, 0 \le t \le 1$ と設定する．このとき，水資源に関する制約式は次式で表される．

$$\sum_{j=2}^{7} w_j x_j \le \tilde{\bar{d}} \tag{26}$$

ファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{d}}$ を含む不等式 (26) は，そのままでは等式制約式 (2) と対応しないが，各目的関数に対応する不足量と超過量の重み係数 (13) を次のよう

に調整することにより対応可能である．本節では，ファジィランダム変数係数を含む等式制約式の不足量 y^+ と超過量 y^- に対応して，年間総収益にマイナスを付した目的関数 $z_1(\boldsymbol{x})$ に対しては $q_{11}^+ = 0, q_{11}^- = 10$ の重み係数を設定したものと仮定する．これは，水資源制約式 (26) の左辺が右辺を超過した場合のみ目的関数 $z_1(\boldsymbol{x})$ にペナルティを課すことを意味している．一方，年間総労働時間 $z_2(\boldsymbol{x})$ に対しては，$q_{21}^+ = q_{21}^- = 0$ とする．このとき，目的レベル $\hat{z}_2$ に対応する γ-パレート最適解は，以下の制約問題を解くことにより得られる．

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} z_1(\boldsymbol{x}) + d(\boldsymbol{x},\gamma) \tag{27}$$
$$\text{s.t. } z_2(\boldsymbol{x}) \le \hat{z}_2$$

ここで，$d(\boldsymbol{x},\gamma)$ は，式 (15) により次式で定義される関数である．

$$d(\boldsymbol{x},\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} q_1^- \Bigg\{ \Big(\sum_{j=2}^{7} w_j x_j - R^{-1}(\gamma)\beta\Big) \cdot\Phi\Big(\sum_{j=2}^{7} w_j x_j - R^{-1}(\gamma)\beta\Big) - \int_{-\infty}^{\sum_{j=2}^{7} w_j x_j - R^{-1}(\gamma)\beta} b\phi(b)db \Bigg\}$$

ただし，$\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$ は正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ の確率密度関数と累積分布関数を表す．本例では，Mathematica を用いて制約問題 (27) を解いた．

まず，比較のため，各種パラメータを $\gamma = 0.5, 1$，$\mu = 300, 400$，$\sigma = 5, 20$，$\hat{z}_2 = 600, 700$ と変化させた 8 種類の場合の対応する γ パレート最適解を表 2 と表 3 に示す．これらの表から明らかなように，可能性レベル γ を小さくすると目的関数 $f(\boldsymbol{x},\gamma)$ は改善し各種作物の作付面積が増加する．水資源制約式右辺のファジィランダム変数係数の $\bar{b}$ の平均 μ を大きくすると，水資源を大量に必要とするニンニクの作付面積が大幅に増える一方でトマトの作付面積が減少する．一方，水資源制約式右辺のファジィランダム変数係数の $\bar{b}$ の標準偏差 σ を大きくすると，水資源が大きく変動する不確実性が大きくなるため，水資源が不足することによるペナルティ $d(\boldsymbol{x},\gamma)$ により，水資源を大量に必要とするニンニクの作付面積が大幅に抑制される一方でトマトの作付面積が大幅に増加する．さらに，目的レベル $\hat{z}_2$ を大きくすると（悪化させると）、目的関数 $f(\boldsymbol{x},\gamma)$ は改善する．

次に，$\mu = 300, \sigma = 5$ と設定した問題に対して，仮想的な意思決定者のもとで対話型アルゴリズムを適用した場合の対話過程を表 4 に示す。まず，仮想的な意思決定者は初期可能性レベル $\gamma = 1$，初期目的レベル $\hat{z}_2 = 600$ と設定し（ステップ 2），対応する制約問題 (18) を解き γ-パレート最適解 $\boldsymbol{x}^* \in X$ を求める（ステップ 3，表 4 の 1 回目）．意思決定者は，現在の解における 2 番目の目的関数 $z_2(\boldsymbol{x}^*)$ を改悪しても 1 番目の目的関数 $f(\boldsymbol{x}^*,\gamma)$ を改善しようと考え $\hat{z}_2 = 700$ と更新し（ステップ 4），対応する γ-パレート最適解 $\boldsymbol{x}^* \in X$ を求める（ステップ 3，表 4 の 2 回目）．意思決定者は，可能性レベルを $\gamma = 0.5$ に更新することにより 1 番目の目的関数 $f(\boldsymbol{x}^*,\gamma)$ を改善しようと考え（ステップ 4），対応する γ-パレート最適解 $\boldsymbol{x}^* \in X$ を求める（ステップ 3，表 4 の 3 回目）．さらに，可能性レベルを $\gamma = 0.25$ に更新することにより 1 番目の目的関数 $f(\boldsymbol{x}^*,\gamma)$ を改善しようと考え（ステップ 4），対応する γ-パレート最適解 $\boldsymbol{x}^* \in X$ を求める（ステップ 3，表 4 の 4 回目）．本例では，4 回のイテレーションで満足解に到達している．目的関数 $f(\boldsymbol{x}^*,\gamma)$ の可能性レベル γ に対する感度 (23) はすべて 2.551 である．実際，表 4 の 2 回目から 3 回目の近似的な感度 $\triangle f/\triangle\gamma = 2.552$，3 回目から 4 回目の近似的な感度 $\triangle f/\triangle\gamma = 2.56$ であることから，理論値 2.551 とほぼ一致する．

表 2　計算結果（その 1）

	1	2	3
μ	300	300	300
σ	5	5	5
$\hat{z}_2$	600	700	600
γ	1	1	0.5
$f(\boldsymbol{x}^*,\gamma)$	-33.31	-34.394	-34.586
$z_2(\boldsymbol{x}^*)$	600	700	600
米 (x_1^*)	0.36286	0.61038	0.35793
タバコ (x_2^*)	0.000	0.000	0.000
トマト (x_3^*)	0.5372	0.5372	0.41272
ニンニク (x_4^*)	0.4628	0.4628	0.58728
緑豆 (x_5^*)	0.000	0.000	0.000
トウモロコシ (x_6^*)	0.000	0.000	0.000
ピーマン (x_7^*)	0.000	0.000	0.000

4 お わ り に

本論文では，ファジィランダム変数係数を等式制約式に含む多目的ファジィランダム単純リコース問題を定式化した．定式化した問題に対して，可能性レベル γ に基づく γ-パレート最適解の概念を導入し，γ-パレート最適解集合の中から満足解を導出するための対話型アルゴリズムを提案した．γ-パレート最適解を求めるための制約問題は，積分計算を含む最適化問題となるが，凸計画問題であることを明らかにした．今回の応用例では，Mathematica を用いて γ-パレート最適解を求めたが，大規模な問題では直接解くことが困難と

表 3　計算結果（その 2）

4	5	6	7	8
300	300	300	400	400
5	20	20	5	5
700	600	700	600	700
0.5	1	1	1	1
-35.67	-29.841	-30.925	-37.778	-38.863
700	600	700	600	700
0.60545	0.37463	0.62215	0.34614	0.59366
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.41272	0.83428	0.83428	0.11494	0.11494
0.58728	0.16572	0.16572	0.88506	0.88506
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 4　対話過程

	1	2	3	4
$\hat{z}_2$	600	700	700	700
γ	1	1	0.5	0.25
$f(\boldsymbol{x}^*, \gamma)$	-33.31	-34.394	-35.67	-36.31
$z_2(\boldsymbol{x}^*)$	600	700	700	700
$\partial f(\boldsymbol{x}^*, \gamma)/\partial \gamma$	2.551	2.551	2.551	2.551
米 (x_1^*)	0.36286	0.61038	0.60545	0.60299
タバコ (x_2^*)	0.000	0.000	0.000	0.000
トマト (x_3^*)	0.5372	0.5372	0.41272	0.35048
ニンニク (x_4^*)	0.4628	0.4628	0.58728	0.64952
緑豆 (x_5^*)	0.000	0.000	0.000	0.000
トウモロコシ (x_6^*)	0.000	0.000	0.000	0.000
ピーマン (x_7^*)	0.000	0.000	0.000	0.000

なることが予想される．そのような状況に対応するために，今後は確率変数が離散型の場合についても考察する必要がある．また，今回対象とした農業問題では，各種作物の利益係数間の共分散を考慮せず利益係数の平均値を採用したが，利益係数も確率変数として表現される場合に対しても検討したい．

参 考 文 献

[1] Birge, J.R. and Louveaux, F.: Introduction to Stochastic Programming, Springer (1997)

[2] Charnes, A. and Cooper, W.W.: “Chance Constrained Programming”, *Manage. Sci.*, Vol. 6, pp. 73-79 (1959)

[3] Charnes, A. and Cooper, W.W.: “Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance Constraints”, *Oper. Res.*, Vol. 11, pp. 18-39 (1963)

[4] Danzig, G.B.: “Linear Programming under Uncertainty”, *Manage. Sci.*, Vol. 1, pp. 197-206 (1955)

[5] 石井博昭: “多様化時代の数理計画法　第 3 回確率計画法”, オペレーションズ・リサーチ学会誌, Vol. 41, pp. 504-509 (1996)

[6] Kall, P. and Mayer, J.: Stochastic Linear Programming Models, Theory, and Computation, Springer (2005)

[7] Sakawa, M., Yano, H. and Nishizaki, I.: Linear and Multiobjective Programming with Fuzzy Stochastic Extensions, Springer (2013)

[8] Walkup, D.W. and Wets, R.: “Stochastic Programs with Recourse”, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 15, pp. 139-162 (1967)

[9] Wets, R.: “Stochastic Programs with Fixed Recourse: The Equivalent Deterministic Program”, *SIAM Rev.*, Vol. 16, pp. 309-339 (1974)

[10] Sun, W., An, C. Li, G. and Lv, Y.: “Applications of Inexact Programming Methods to Waste Management under Uncertainty: Current Status and Future Directions”, *Environ. Syst. Res.*, Vol. 3, pp. 1-15 (2014)

[11] Wang, R., Li, Y. and Tan, Q.: “ A Review of Inexact Optimization Modeling and Its Application to Integrated Water Resources Management”, *Front. Earth Sci.*, Vol. 9, pp. 51-64 (2015)

[12] Kwakernaak, H.: “Fuzzy Random Variables-I”, *Inf. Sci.*, Vol. 15, pp. 1-29 (1978)

[13] Dubois, D. and Prade, H.: Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications, Academic Press (1980)

[14] 横山繁樹，フランシスコ, S.R.，南石晃明: “リスクを考慮した最適作物選択 : フィリピン水田裏作の場合”, 国際協力研究, Vol. 14, No. 1, pp. 33-42 (1998)

[15] Katagiri, H., Sakawa, M., Kato, K. and Nishizaki, I.: “Interactive Multiobjective Fuzzy Random Linear Programming: Maximization of Possibility and Probability”, *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. 188, pp. 530-539 (2008)

[16] 片桐英樹，坂和正敏，加藤浩介，大崎修嗣: “ファジーランダム多目的線形計画問題に対する可能性測度と必然性測度を用いた満足基準最適化モデルに基づく対話型ファジー満足化手法”, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J87-A, pp. 634-641 (2004)

[17] Sakawa, M., Nishizaki, I. and Katagiri, H.: Fuzzy Stochastic Multiobjective Programming, Springer (2011)

[18] 矢野 均: “ファジィランダム単純リコース問題の定式化”, 知能情報ファジィ学会論文誌, Vol. 27, No. 4, pp. 634-641 (2015)

[19] Sakawa, M.: Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press (1993)

[20] 片桐英樹，坂和正敏: “ファジィランダム多目的線形計画問題に対する満足水準最適化モデルと M-α-パレート最適性に基づく対話型ファジィ満足化手法”, 数理解析研究所講究録, No. 1409, pp. 67-77 (2005)