勾配情報にもとづく局所探索を組み込んだハイブリッド粒子群最適化

山本　聖也　　富山県立大学工学部電子・情報工学科情報基盤工学講座

要約

Swarm Intelligence（群知能）は，鳥や魚，アリのコロニーなどのグループの行動に基づく最適化手法である． この技術の一つである粒子群最適化が開発され，様々な研究に応用されている．しかし，粒子群最適化の収束は根拠がない． 本論文では，より良い最適解を求めるための群知能とニューラルネットワークダイナミックスの新しいハイブリッド動的システムを提案した．

キーワード：粒子群最適化，勾配情報，局所探索

1 はじめに

粒子群最適化(**Particle Swarm Optimization: PSO**)は，群の中の固体（粒子）が持つ最良の情報とそのグループの最適値から過去の探索から考慮した確率的最適化手法であり，ケネディ**[1]**が社会的行動に基づいて開発した並列進化計算技術である． 社会的方法と計算方法の両方を扱う**PSO**に関する標準的な研究は，**[2]**である．

近年，コンピュータサイエンスの発展は，ハードウェアとソフトウェアの有効性が顕著に表れている.特に，進化法は盛んに行われ，シミュレーションベースを用いてアプリケーションの容易さから開発，適用されている**[3]**． 例として，**PSO**と**Simplex**のハイブリッド法が提案されている**[4]**． また，**PSO**と遺伝的アルゴリズムの方法が提案されている**[3]**． 大規模問題の最適化工学の重要性はますます高まっている． ソーシャルネットワークサービスの登場により，ログやパスの問題も大規模になっている.最新のコンピュータでこれらの問題を解決するには時間がかかってしまう．

2 PSOの概要

2.1 PSOアルゴリズムと安定解析

PSOは群を成して移動する生物の行動を模範したアルゴリズムである． 群をなす生物を粒子としてモデル化し，粒子は最適化問題における候補解を示している．**PSO**は群の中の粒子がもつ最良の情報(**pbest**)とその集団の最適値(**gbest**)から過去の探索を考慮し，さらにその集団の各粒子の位置および速度を更新することによって計算される．以下に**PSO**の解説を示す

PSOの安定性

Particle i に注目すると速度ベクトルv^{k+1}は以下の式のように変形できる
ステップ幅 ϕ は二つの一様乱数を足し合わせたものであり，
最小値0，最大値C_1+C_2，平均$\frac{C_1+C_2}{2}$の分布に従う．

$$\boldsymbol{v}^{k+1} = w\cdot\boldsymbol{v}^{k} + \phi\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{x}^{k})$$

ここで，$\boldsymbol{P} = \dfrac{\phi_1\cdot \boldsymbol{pbest}^{k} + \phi_2\cdot \boldsymbol{gbest}^{k}}{\phi_1+\phi_2}$

$$\phi=\phi_1+\phi_2,\ \phi_1 = C_1\cdot \mathrm{rand},\ \phi_2 = C_2\cdot \mathrm{rand}$$

さらに$y^k = p - x^k$とおくと，以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & \phi \\ -w & 1-\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^{k} \\ \boldsymbol{y}^{k} \end{bmatrix}$$

また$\phi=(C_1+C_2)/2$ と見なすと固有値λは

$$\lambda = \frac{w+1-\phi\pm\sqrt{(w+1-\phi)^2-4w}}{2}$$

となる．よってλが1を境にシステムの特性が安定・不安定（収束・発散）に変化することが分かる．

図2 **PSO**の安定性

2.2 連続型PSOアルゴリズム

ベクトルyと$\mathrm{sgn}(y)$の要素によって与えられる対角要素を持つ対角行列を $\mathrm{diag}[y]$ とする． yのσ関数を表す． として$\mathrm{sgn}(y)=1$ **if** $y>0$の場合は,$\mathrm{sgn}(y)=-1$ **if** $y<0$.

したがって，正の定数であると仮定すると，最小化のためにXの進化を近似することが提案される． また**CPSO**の安定性解析も議論されている**[5]**．

状態変数X，V，X_{db}はベクトルではなく，以前に定義された適切な次元の行列であるため、上記の表記法は標準状態空間表記法ではない． この説明は，明瞭さを失うことなく提供する単純さとコンパクトさに動機付けられている． また以下に**CPSO**の位置と速度の更新式と，アルゴリズムについて示す(図**4:** 参照).

CPSOの更新式

問題解決の実行可能領域を考え，
行列による連続時間PSO動力学を示す

$$\dot{X}=V$$
$$\dot{V}=-\alpha V+\beta(X_{db}-X)+\gamma(X_{gb}T-X)$$
$$\dot{X_{db}} = a(X-X_{db})[I_n+\mathrm{diag}[\mathrm{sgn}(F(X_{gb}-F(X))]]$$
$$\dot{X_{gb}} = X_{db}Q_j \quad \text{where } j=\arg\inf_{0<i\le n}(f(x_{db_i}))$$

CPSOアルゴリズム

1 : X,V,X_μとパラメータα,β,γ,δ_1,δ_2とaの初期値を設定する

2 : X_{db},X_{gb}の初期値を導出する

3 : $\dot{V}$を計算して，Vを更新する

4 : Xを更新してX_{db},X_{gb}を評価する

5: 収束すると仮定した場合は終了しそれ以外の場合は3から繰り返す

図4 **CPSO**の解説

2.3 PSOの探索能力の向上

従来法である[]ではオリジナルの**PSO**アルゴリズムに含まれる恣意性を少なくし，より効率的かつ高精度な探索を実現するために勾配法による速度評価を導入する．運動性素子が自分の置かれた近くの環境を知覚してより適合度の高い空間座標を獲得するために，以下のようなセンサリング・アルゴリズムを搭載する．

勾配によるスケーリングパラメータの導入を行う．素子が投入された探索空間 (ξ，η) には問題に応じた 目的関数Qが定義されており，素子はその最大値か最小値を探索するものとする．現時間ステップkにおける素子の位置座標を (ξ k，η k) とし，その座標における目的関数の値をQ_kとして，素子の移動に伴う目的関数の変化に注目すると次のような目的関数の離散的な勾配αが得られる(図**5:** 参照).

勾配法の利点

以下の式は素子が感じている目的関数の変化率，

$$\alpha^k = \frac{Q^k - Q^{k-1}}{\sqrt{(\xi^k-\xi^{k-1})^2+(\eta^k-\eta^{k-1})^2}} \quad \alpha^{k-1} = \frac{Q^{k-1} - Q^{k-2}}{\sqrt{(\xi^{k-1}-\xi^{k-2})^2+(\eta^{k-1}-\eta^{k-2})^2}}$$

この2個の勾配量を以下の式のように用いる，ことでランドスケープに合わせた調整が可能となる

$$\boldsymbol{v}_i^{k+1} = \beta^k \boldsymbol{v}_i^k\ ,\quad \beta^k = \alpha^{k-1}/\alpha^k$$

最適点が遠いと思うなら早く，近いと感じるなら遅く移動することで座標のオリジナルPSOより精密な探索が実施できる

図5 勾配法の利点

3 勾配を用いたPSOの提案手法

3.1 提案手法

本節では提案手法であるハイブリッド**PSO**について解説する（図**6:**参照）．**PSO**の応用法である**CPSO**の応用法であり，X,Yの二つの行列に加えてZを加えかつ，いくつかのパラメータを与えて再急降下法を用いる．$\alpha,\beta,\gamma,\delta$などの実数は，**PSO**とニューラルネットワークを調整するために重み付けするパラメータである． X_μはニューラルネットワークのダイナミクスに由来する新しい行列である． X_μは以下のダイナミクス**[6]**と定義する．(図**7:**参照)

ハイブリッドPSOの更新式

以下はZを表す式，

$$Z=\beta(X_{db}-X)+\gamma(X_{gb}T-X)$$

右の条件を考慮する，
X_0は初期位置行列である．　$X = X_0 + \int_0^t V(s)ds$

$$\dot{X}=V$$
$$\dot{V}=-\alpha V+Z$$
$$\dot{Z}=\beta(\dot{X_{db}}-\dot{X})+\gamma(\dot{X_{gb}T}-\dot{X})+\delta(\dot{X_\mu})$$

α,β,γ,δは0ではない正の実数
β+γ+δ=1を満たす

ここで，X,V,X_{db},X_{gb},Tの次元は上記のとおり．
簡略化のために時間表記が省略する．

$$\dot{X_{db}} = a(X-X_{db})[I_n+\mathrm{diag}[\mathrm{sgn}(F(X_{gb}-F(X))]]$$
$$\dot{X_{gb}} = X_{db}Q_j \quad where\ j=\arg\inf_{0<i\le n}(f(x_{db_i}))$$

ハイブリッドPSOアルゴリズム

1 : X,V,X_μとパラメータα,β,γ,δ とaの初期値を設定する

2 : X_{db},X_{gb}とZの初期値を導出する

3 : $\dot{Z}$を計算して，Zを更新する

4 : $\dot{V}$を計算して，Vを更新する

5 : Xを更新してX_{db},X_{gb}とZを評価する

6 : X_μを更新する

7: 収束すると仮定した場合は終了し，それ以外の場合は"3"を返す

図6 ハイブリッド**PSO**の解説

離散数式

$$\dot{x}_{\mu i} = -C\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(y_i(t))}{\partial y_i}\frac{\partial\varphi(x(t))}{\partial x_i}(=\dot{z_i}(t))$$
$$\dot{x}_i = -ax_i(t)+z_i(t)$$
$$y_i(t)=\varphi(x_i(t))$$

a,C: パラメータ
φ : シグモイド関数

したがって，z_i^kはZのベクトル，
x_i^kはk番目の反復個体iに関するXのベクトル

Xのダイナミクス

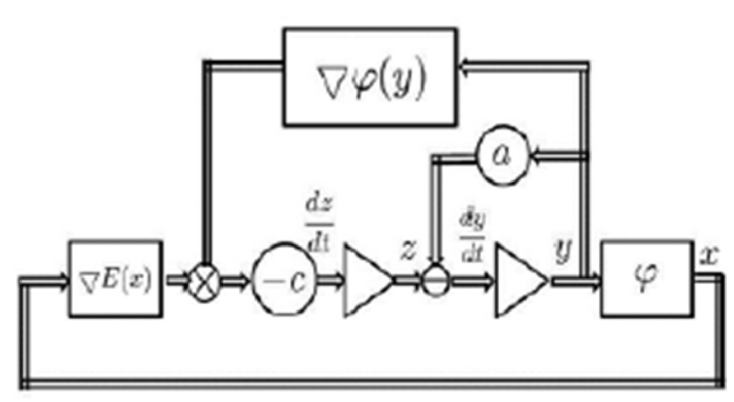

図7 離散数式とハイブリッド理論

4 数値実験ならびに考察

5 おわりに

本論文では，ニューラルネットワークを用いたハイブリッドダイナミクスを提案し，連続時間**PSO**アルゴリズムからニューラルネットワークに等価力学を定式化した． 提案されたハイブリッド法および**PSO**アルゴリズムは，文献からいくつかの困難な連続関数をテストされた． どちらのアルゴリズムも，すべての実行に対してほとんどの手順で収束することに成功しました．

参考文献

[1] J. Kennedy, R.C. Eberhart: Particle swarm optimization, *IEEE Conf. On Neural Networks, IV, Piscataway, NJ.*, **pp. 1942-1948 (1995).**

[2] J. Kennedy, R.C. Eberhart, Y. Shi: "Swarm intelligence, Morgan Kaumann Publishers, San Fran-cisco,CA, "pp. 1942-1948, 2001.

[3] S. F. Shu-Kai, Z. Erwie: A hybrid simplex search and particle swarm optimization for unconstrained optimization, *European Journal of Operational Research.*, **pp. 527-548 (2007).**