Taguchi's Orthogonal Arrays Are Classical Designs of Experiments

横井　稜

富山県立大学　情報基盤工学講座

May 28, 2020

はじめに

近年、多くのエンジニアが直交表のカタログを使用している。これらの直交表は、要因計画とラテン方格の拡張として進化しました。しかし、これらの直交表を構築するために使用された方法に関する情報が提供されておらず、情報が不十分である。直交表の構造について説明し、それらの部分的な要因の性質を示している。

表 **1**　直交表 $OA_4(2^3)$

	列番号		
行番号	**1**	**2**	**3**
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

直交表について

直交表は $OA_N(s^m)$ で表される。
N:行数 (実験回数)、s:水準数、m:列数 (要因数)
ある列と任意の他の列を選ぶと数値のペアが同じ回数表示される。

表 1　直交表 $OA_4(2^3)$

	列番号		
行番号	1	2	3
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

表 2　直交表 $OA_8(2^7)$

	列番号						
行番号	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0
8	1	1	0	1	0	0	1

直交表について

直交表は定義から、行と行の置き換え、列と列の置き換え、任意の列の水準の置き換えを行っても、直交表のままとなる。

表 **1**　直交表 $OA_4(2^3)$

	列番号		
行番号	**1**	**2**	**3**
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

$r = 2, 3, 4, 5, 6$ の場合の 2^r 行の 2 水準直交表の作成

今回は、$OA_8(2^7)$ を作成する。

手順 1

列番号 $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^{r-1}$ で指定された r 列に、それぞれ 0 と 1 で表される **2** つのテストレベルを持つ r 因子の完全な要因計画を書き込む。これらの r 列は基本列と呼ばれ、それぞれ $x_1, x_2, \cdots, x_r$ としてマークされる。

表 **3**　基本列 $r = 3$

列番号	1	2	3	4	5	6	7
行番号							
1	0			0			
2	0	0		1			
3	0	1		0			
4	0	1		1			
5	1	0		0			
6	1	0		1			
7	1	1		0			
8	1	1		1			
発生器	x_1	x_2		x_3			

$r = 2, 3, 4, 5, 6$ の場合の 2^r 行の 2 水準直交表の作成

手順 2

表 4 から $a_1, \cdots, a_r$ の値を得て $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r$ という形式の規則に従いほかの列を作成する。

表 4　発生器用の表

列番号	a_1	a_2	a_3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	1	1	0
4	0	0	1
5	1	0	1
6	0	1	1
7	1	1	1

表 5　表 4 から得られるもの

列番号	発生器
1	x_1
2	x_2
3	x_1+x_2
4	x_3
5	x_1+x_3
6	x_2+x_3
7	$x_1+x_2+x_3$

$r = 2, 3, 4, 5, 6$ の場合の 2^r 行の 2 水準直交表の作成

手順 3

表 4 から $a_1, \cdots, a_r$ の値を得て $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r$ という形式の規則に従いほかの列を作成する。R 基本列は、主効果に対応し、残りの列は、交互作用効果に相当します。

表 5　表 4 から得られるもの

列番号	発生器
1	x_1
2	x_2
3	x_1+x_2
4	x_3
5	x_1+x_3
6	x_2+x_3
7	$x_1+x_2+x_3$

表 6　直交表 $OA_8(2^7)$

列番号	1	2	3	4	5	6	7
行番号							
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0
8	1	1	0	1	0	0	1

混合要素直交表

$OA_{18}(2^1 \times 3^7), OA_{32}(2^1 \times 4^9), OA_{50}(2^1 \times 5^{11})$ の作成

これらの直交表は、差分行列、クロネッカー和、飽和直交配列、列置換の４つの概念が含まれる。差分行列は $D_M(s)$ で表される。

表 **7**　差分行列 $D_3(3)$

	列番号		
行番号	**1**	**2**	**3**
1	0	0	0
2	0	1	2
3	0	2	1

混合要素直交表

$OA_{18}(2^1 \times 3^7), OA_{32}(2^1 \times 4^9), OA_{50}(2^1 \times 5^{11})$ の作成

クロネッカー和は差分行列 $D_M(s)$ とベクトル b を用いて図 **1** のように表される。

$$D_M(s) \oplus b = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ 0+1 & 0+1 & 0+1 \\ 0+2 & 0+2 & 0+2 \\ 0+0 & 1+0 & 2+0 \\ 0+1 & 1+1 & 2+1 \\ 0+2 & 1+2 & 2+2 \\ 0+0 & 2+0 & 1+0 \\ 0+1 & 2+1 & 1+1 \\ 0+2 & 2+2 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

図 **1**　クロネッカー和

直交配列は、その列の **1** つが、置換された列の要素と **1** 対 **1** で対応する行を持つ直交配列に置き換えられても、直交配列のままです。

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{そして} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

図 **2**　直交配列の置換

混合要素直交表 $OA_{18}(2^1 \times 3^7)$ の作成

手順 1

差分行列 $D_6(3)$ のクロネッカー和から **6 × 3 = 18 行 6 列**の行列を作成します。

表 **8**　差分行列 $D_6(3)$

	列番号					
行番号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	2	2
3	0	1	0	2	1	2
4	0	2	2	1	1	0
5	0	1	2	0	2	1
6	0	2	1	2	0	1

TOYAMA Prefectural University

混合要素直交表 $OA_{18}(2^1 \times 3^7)$ の作成

手順 2

飽和直交配列 $OA_{18}(6^1 \times 3^6)$ を形成します。

手順 3

6 つの順序付けられたペア（0,0)、（0,1)、（0,2)、（1,0)、（1,1)、および（1,2）を関連付けて、18 行と 2 列の行列を作成します。その直交表を $OA_{18}(6^1 \times 3^6)$ の列 1,2 にすることで $OA_{18}(2^1 \times 3^7)$ が作成できる。

表 8　差分行列 $D_6(3)$

	列番号					
行番号	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	2	2
3	0	1	0	2	1	2
4	0	2	2	1	1	0
5	0	1	2	0	2	1