

報 文

直交配列を用いた実験計画における要因割りつけの
コンピュータ・アルゴリズムについて

須 田 健 二*, 宮 崎 晴 夫**

直交配列を用いた実験計画は広く応用され、その効果を上げている。しかし、ある程度以上の大きさの規模の実験に対してこの直交配列を利用する場合には、因子やその交互作用を直交配列表のいずれの行（あるいは列）に割りつけられべきかを決定することはきわめて手数がかかるという問題に遭遇する。このため小規模実験に対しては有力な方法として認められている直交配列法も、規模の大きい実験に対しては難解な問題を包含している。本論では直交配列における t -独立集合の考え方を導入し、有限射影空間上の直線と index number を利用して割りつけができることに着目して、必要な主効果と 2 因子交互作用のすべてをコンピュータ・アルゴリズムによって自動的に割りつける方法を与え、複雑な割りつけでも簡単に短時間でできる方法を提案している。

An Algorithm Which Corresponds the Multi-Factors
to Orthogonal Array in the Design of
Orthogonal Experiments

Kenji SUDA* and Haruo MIYAZAKI**

The use of fractional factorial designs has now become widely accepted as an efficient way to carry out experiments in the many fields of industrial management. However, one of the main difficulties with the large size fractional factorial designs involving many different factors is how to correspond these factors to orthogonal array which can be used to estimate various effects without confoundings. In such situations, we develop an algorithm which corresponds the multifactors to orthogonal array in the design of orthogonal experiments, and provide a practical application using this computer aided method of corresponding many factors and interactions to orthogonal array.

1. 問題の所在および研究の目的

工場実験、実験室における実験、あるいは大規模なシミュレーションなどにおいてより少ない実験回数で必要な情報を得るために直交計画がよく用いられている。このような場合、与えられた要因およびそれらの間にいくつかの想定される交互作用の効果をすべて分離推定し、有意な要因に対する検定を行うことができるような直交実験を計画することが肝要である。しかし、要因数が大きくかつ水準数も多い大規模な実験に対しては、たとえ直交表とその点線図が示されていたとしても、実験の所期の目的にかなうようにすべての主効果や交互作用を分離推定可能な要因の割りつけを決定することは簡単にいくとは限らない。

要因数、水準数が共に小規模の場合の実験に対しては困難も感じさせることなく、有力な方法として活用されてきている直交計画法も、上記のように規模の大きい実験を取り扱う場合にはかなり複雑かつ面倒な方法であり、それを使いこなすにはかなりの熟練を要するという問題に直面する。したがって、こうした特別な熟練に依らず一定のアルゴリズムによって必要な直交実験の計画を自動的にかつ統一的に割りつけ構成できれば応用上きわめて有効である。実際には種々の条件を満足するような実験を計画せねばならないが、ここでは多くの実験計画問題について考えたとき最も基本的かつ応用上重要であると思われる点を考慮し、一部実施要因計画の場合、実験回数が与えられたとき要因数をできるだけ多くとれる直交実験を構成することができること、主効果はどの 2 因子交互作用とも交絡しないという条件の下で、できるかぎり多くの主効果、2 因子交互作用が分離推定可能な直交実験の要因割りつけを行うためのコンピュータ・アルゴリズムを求めることが目的である。なお、このアルゴリズムに

* 群馬工業高等専門学校 (Gunma Technical College)

** 群馬大学 (Gunma University)

昭和 54 年度秋季研究発表会にて発表

受付：昭和 60 年 12 月 17 日、再受付（2 回）

受理：昭和 61 年 12 月 12 日

よって要因の割りつけを行っていくうえで、次の二つの基本条件の下で上記問題の考察をすすめていくことにする。

- (1) 要因の水準数はすべて同一水準である。
- (2) 実験の回数はできるかぎり少なくするように工夫することである〔2〕～〔5〕。

2. 直交実験の構成と直交配列について

ここでは、直交実験の計画において、統一的なアルゴリズムによって、要因を割りつけていくために必要な直交配列のモデルと要因の割りつけを求める基本原則について述べる。

2.1 直交配列と t -線形独立集合について

一部実施要因計画における直交実験において、 m 個の因子を

$$F_1, F_2, \dots, F_m \quad (1)$$

とし、各因子の水準の集合を

$$\{S_1, S_2, \dots, S_m\} \quad (2)$$

とする。ここで、水準の集合の大きさ、すなわち水準数は

$$|S_i|=s, \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

であり、 s は一定とする。また任意の 2 因子交互作用を

$$F_{i_1} \times F_{i'_1}, F_{i_2} \times F_{i'_2}, \dots, F_{i_w} \times F_{i'_w} \quad (4)$$

などと表わすことにする。また、

$$M=\{1, 2, \dots, m\}$$

$$I=\{\{i_1, i'_1\}, \{i_2, i'_2\}, \dots, \{i_w, i'_w\}\}$$

$$\subseteq M^2 \quad (6)$$

とし、 M は因子の番号 (インデックス) の集合 (index set), I は交互作用の考えられる二つの因子の番号の対 (pair) のインデックス集合である。

次に直交配列の性質についてみると、直交配列を用いて所期のすべての要因効果を分離推定するためには、以下に示す三つの条件が満たされていなければならない〔1〕,〔2〕,〔10〕。

- (1) 直交配列の任意の第 i 列, 第 j 列なる 2 列に対して、すべての水準の対 (pair) $(a, b) \in S_i \times S_j$ が同じ回数ずつ出現していなければならない。
- (2) 任意の $k \in M$ に対し、 $\{i, j\} \in I (k \neq i, k \neq j)$ なる条件の下で、直交配列の任意の第 i , 第 j , 第 k 列に対して、水準のすべての三つの組 (triples) $(a, b, c) \in S_i \times S_j \times S_k$ が同じ回数ずつ出現していなければならない。
- (3) 任意の $\{i, j\}$ に対し、 $\{i', j'\} \in I (i \neq i', i \neq j', j \neq i', j \neq j')$ なる条件のもとで、直交配列の任意の第 i , 第 j , 第 i' , 第 j' 列に対して、水準のすべ

ての四つの組 (quadruples) $(a, b, c, d) \in S_i \times S_j \times S_{i'} \times S_{j'}$ が同じ回数ずつ出現しなければならない。

通常の直交配列は上記の条件をみたすように作られている。とくに (3) 式に示した水準数 s が素数のときには、直交配列はガロア体 $GF(s)$ 上の幾何学の方法によって構成される〔1〕。一般に利用されている直交配列は s が素数の場合であり、本論でもこの立場で論旨を進めることにする。

以上より、上記 (1), (2), (3) の性質をみたす直交配列は、次のような性質をみたす $GF(s)$ 上の $m \times n$ 行列 G によって (7) 式のように構成される〔1〕。すなわち、

(1') G の任意の 2 行は互いに一次独立である。

(2') 任意の k に対して $\{i, j\} \in I (k \neq i, k \neq j)$ の条件の下で、 G の i, j, k 行は互いに一次独立である。

(3') 任意の $\{i, j\}$ に対して、 $\{i', j'\} \in I (i \neq i', i \neq j', j \neq i', j \neq j')$ となる条件の下で、直交配列 G の i, j, i', j' 行は互いに一次独立である。

なる (1'), (2'), (3') を満足する行列 G の列ベクトルによって張られる $GF(s)^m$ 空間の部分空間 (subspace)

$$V_G = \{\nu = G\theta; \theta \in GF(s)^n\} \quad (7)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(1) \\ \vdots \\ \xi(m) \end{bmatrix} \quad (8)$$

が直交配列であり、 $\nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m]^t$ に対して水準組合せ $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ を対応させる実験が直交実験である。すなわち補助変数 θ を用いて直交配列は G から構成されることを意味し、 ν は直交配列の水準番号のベクトルである θ を $GF(s)^n$ 上を走査 (scanning) することにより s^n 通りの ν が作られる。したがって直交配列 V_G 行列は $m \times s^n$ 行列となる。このとき実験の大きさ (回数) は $N = s^n$ となる。さて、以上のような直交配列 V_G に要因を割りつけるために、 G における t -線形独立集合 (t -独立集合) の定義を次に示す〔1〕,〔6〕。この t -独立集合を用いて要因割りつけのアルゴリズムを展開する。

〔定義〕 直交配列を構成するある $GF(s)$ 上での行列 G の任意の t 行をとり、その各行を一つのベクトルとみなしたとき、これら t 個の行ベクトルが互いに一次独立であるとき、このような t 個の互いに一次独立のベクトルの集合のことを、 t -線形独立集合という。

この定義を用いて、 t -独立集合と直交配列との関係について必要な主効果や 2 因子交互作用をすべて推定可能にするように要因を直交配列に割りつけるという

観点にたつて(1'), (2'), (3')の条件を整理すると次のようになる。

- a) 直交配列 V_G に割りつけられた因子に対し、その主効果がすべて推定可能（2因子交互作用は存在しないと仮定される場合）であるための必要十分条件は、行列 G が少なくとも2-独立集合でなければならない。
- b) 直交配列 V_G に割りつけられたすべての因子が、それらの因子間のすべての2因子交互作用と交絡しないで分離推定可能であるための必要十分条件は、行列 G が3-独立集合になっていなければならない。
- c) 直交配列 V_G に割りつけられたすべての因子とそれらの因子間のすべての2因子交互作用が分離推定可能になるための必要十分条件は、行列 G が4-独立集合になっていなければならない。

このように t -独立集合の性質をみたす行列 G を利用し、割りつけのアルゴリズムを与えることが本論の主旨である。

2.2 t -独立集合と行列 G の生成について

t -独立集合になっている G を求めることにより、所望する直交配列 V_G が(7)式によって得られることから、本節では行列 G を求める方法について述べる。まず、この t -独立集合を求めるのに $(n-1)$ 次元有限射影空間 $PG(n-1, s)$ を用いる (s は(3)式で示した水準数)。有限射影空間において、 t -独立集合を求める問題は、 $PG(n-1, s)$ 上、 t 個の点が一の $(t-2)$ -flat ($(t-2)$ 次元超平面) 上にない点の集合を求める問題と同等である。また、 $PG(n-1, s)$ 上の t -独立集合の任意の $(t+1)$ 個の点から t -flat を生成するとき、この $(t+1)$ 個の点から t -flat を生成するとき、この $(t+1)$ 個の点は生成された t -flat によって t -cover されるという[6]。

次に、 $PG(n-1, s)$ 上の特定の点がこのような t -flat で何回 t -cover されているか、すなわちある特定の点は何通りの t -flat で覆われ (cover) ているか、その t -flat の枚数のことを、その点の index number といい、一定のアルゴリズムによって直交表に要因を自動的に割りつけることの着想はこの index number を利用するところにあり、本アルゴリズムの構成において基本的な役割を果たす。

さて、有限射影空間 $PG(n-1, s)$ から t -独立集合は次のように求める。まず、 n 個の単位ベクトル (基底) をとり、これから任意に $(t-1)$ 点を選び、 $(t-2)$ -flat を生成する。この flat の生成法は文献[1]による。次に、index number が0の点を選び、この点と

すでに選ばれている t -独立集合とで生成されるすべての $(t-2)$ -flat を求める。この操作を index number が0の点なくなるまで繰り返す。割りつけのアルゴリズムが簡潔かつ計算時間が膨大になるか否かは、この index number 0の点の選定の方法にあるが、従来この選定法は十分工夫されておらず、index number 0のなかからランダムにとるなどの対処をしてきていた。本論ではこの index number 0の選定法に新たに工夫を加え一定のルールを与えより簡潔で短時間で割りつけ可能な方法を与えているところに特徴がある。

以上のことを考慮して前節1)を満足する行列 G を次のようにして生成する。すなわち $t=2$ の場合についてみると、 $PG(n-1, s)$ の各点 (すなわち 0-flat 全体) の集合が2-独立集合となっているので、この点を G 行列の行ベクトルとして列挙する。とくに、 $PG(n-1, s)$ 上の $v=(s^n-1)/(s-1)$ 個の点すべてを G 行列の行ベクトルとしてとったとき、(7)式により得られる直交配列が通常の直交表である。

すなわち、 $PG(n-1, s)$ の点 $\xi(i)$ を n 次元のベクトルの要素として表現し、それを s 進 n 桁の数とみて、小さい順に並べることにより G 行列が作られる。

$t=3, 4$ の場合には、行列 G を求める一般的解法はいまだ未解決である。したがって、この場合はコンピュータ・サーチによる数え上げによって求める[6]。この結果前節 b), c) 項の条件も満足する行列 G が求められる。次章では以上の性質をもつ G の生成および割りつけのアルゴリズムを述べる。

3. 有限射影空間を用いた割りつけのアルゴリズム

さて一般には因子とその水準数、および2因子交互作用の組が与えられるのが通常であり、以下この条件のもとでアルゴリズムを与える。

3.1 割りつけの原則と基本アルゴリズム

m 個の要素 F_1, F_2, \dots, F_m とその水準数 s および w 個の2因子交互作用の組 $F_i \times F_j$ の集合

$$I = \{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \dots, \{i_w, j_w\}\}$$

が与えられたとき、まず要因の割りつけが可能となる有限射影空間 $(n-1, s)$ の次元 n の最小値は(9)より求める。

$$\frac{s^n - 1}{s - 1} \geq m + (s - 1)w \quad (9)$$

この式における左辺は $PG(n-1, s)$ 上の点の数であり、これは通常の直交表の列の数を示す。この列に要因の主効果の数 m と2因子交互作用の組の数を割りつけることになる。ここで、割りつけの原則は次のよ

うになる。

- (1) 各因子 $F_i (i=1, 2, \dots, m)$ を $PG(n-1, s)$ 上の異なる点 $\xi(i)$ に割りつける。
- (2) $F_i \rightarrow \xi(i), F_j \rightarrow \xi(j)$ と割りつけたとき、因子 $F_k (k \neq i, j)$ は $\xi(i)$ と $\xi(j)$ を結ぶ直線 $\overline{\xi(i)\xi(j)}$ 上に割りつけてはならない。
- (3) $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$ ならば $F_i \rightarrow \xi(i), F_j \rightarrow \xi(j), F_k \rightarrow \xi(k), F_l \rightarrow \xi(l)$ と割りつけたときに、直線 $\overline{\xi(i)\xi(j)}$ と $\overline{\xi(k)\xi(l)}$ とが交わってはならない。

上記の(1)は求める G 行列が 2-独立集合であること、(2)は因子 F_i と F_j の 2 因子交互作用 $F_i \times F_j$ と因子 F_k は交絡していないこと、(3)は 2 因子交互作用 $F_i \times F_j$ と $F_k \times F_l$ は互いに交絡していないことをあらわす。このようにして 2 因子交互作用を含む場合の直交配列への因子の割りつけの計画が、 $PG(n-1, s)$ 上の直線を用いることによって自由に取り扱えることができることに着目して割りつけを行う。さて、上記(1)、(2)、(3)に対して、すでに因子を割りつけた点や $PG(n-1, s)$ 上の点の index number を記憶しておく。すなわち

- (1) $PG(n-1, s)$ 上の v 個の点に対して、 v 個の要素からなる index number を記憶させる配列 $INO(i)$ を用意しその初期値は $INO(i)=0, (i=1, 2, \dots, v)$ とおく。
- (2) F_i に $\xi(i)$ を割りつけたとき、 $INO(\xi(i))=INO(\xi(i))+1$ とする。
- (3) すでに割りつけた $F_j \rightarrow \xi(j)$ に対して、 $\{i, j\} \in I$ ならば $\overline{\xi(i)\xi(j)}$ 上の他の点 $\xi(k), \xi(l), \dots$ についてそれらの点の index number に 1 を加える。

これにより以下の基本アルゴリズムで必要な G 行列が求められる。

- ① index number $INO(i)$ が 0 なる点を捜し、 F_i を割りつける。
- ② すでに割りつけた F_i, F_j について、 $\{i, j\} \in I$ のとき、 $\overline{\xi(i)\xi(j)}$ 上の他の点の index number が 0 ならば、上記①②をくり返す。これによって 2.2 で述べた行列 G は求められることになる。

3.2 Index number 0 の点の選び方と直線計算アルゴリズム

要因を割りつけるアルゴリズムを求めるには前節で述べた直線を求めることが必要であるが、直線計算のアルゴリズムを求めるには以下に示す二つの事項(1)、(2)が考慮されなければならない。

- (1) 上記アルゴリズムにおいて、index number

が 0 の点集合の内からどのように 1 点を選ぶかが問題である[7]。この点の選び方によって G 行列を求め、割りつけを行うために必要な計算時間が大幅に影響を受ける。従来 index number 0 の選び方に対して、本論では次の(i)、(ii)の 2 つの点に着目し、工夫を加えアルゴリズムの統一性をはかっている。

- (i) $PG(n-1, s)$ 上の点を原始元のべきによって $\{0, 1, \dots, v-1\}$ と表現したとき、割りつけ可能な点に対して番号の小さい順に割りつける。
- (ii) 割りつけ可能な点に対して、次の標値値を計算し、その合計の値が最小の点を選ぶ。ここで標値値とは次のようなものである。 F_i を割りつけた時点で、 $F_j (j=1, \dots, i-1)$ に対し、
 - ① $\{i, j\} \in I$ ならば $\overline{\xi(i)\xi(j)}$ 上の点のすべてに 2 を加える。
 - ② $\{i, j\} \notin I$ ならば $\overline{\xi(i)\xi(j)}$ 上の点のすべてに 1 を加える。

すなわち、最後の因子までバックトラック（上記アルゴリズムによって割りつけを行って行く途中、因子の割りつけが不可能と判断された場合、一つ前のステップにもどって因子の割りつけをやり直すこと）を行わずに割りつけが完了する場合は問題ないが、バックトラックに入り、多くの因子の割りつけをやり直すような場合、割りつけ時間が膨大になる点はさらに工夫を加える必要があり、今後の課題とさせていただきます。

(2) なお、因子の割りつけは F_1 から F_2, \dots, F_m の順に行うので、与えられた因子とその間の 2 因子交互作用の組を考慮して、因子に F_1, \dots, F_m などと番号をつける必要がある。この番号のつけ方も割りつけを求める計算時間に影響するが、ここでは次の方法をとる。

- (i) 他の因子と交互作用を多くもつものを優先する。
- (ii) (1) で選んだ因子と交互作用のある因子に次に優先する。

さて、上記(1)、(2)の要点も条件にして文献[8]の直線計算法を用いて直線を求めると次のようになる。 $PG(n-1, s)$ 上の v 個の点は $GF(s)$ 上の原始既約多項式の根 α に対応することから次のように表現できる。

$$\{\alpha^0=1, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{v-1}\}$$

これをべき表現して

$$\{0, 1, 2, \dots, v-1\}$$

とすると、 $PG(n-1, s)$ 上のすべての直線はいくつかの初期直線上各点に 1 を加え（すなわち $+1(\text{mod } v)$ ）していくことによって巡回的に表現できる。すなわ

ち、 $PG(n-1, s)$ の直線全体は $(s^n-1)(s^{n-1}-1)/((s^2-1)(s-1))$ 本であり、これらを求めるのにいくつかの必要な初期直線だけを求めておけばよく、 n が奇数のときは、 $(s^n-1)/(s^2-1)$ 本の初期直線から周期 v で、 n が偶数のときは、 $s(s^{n-2}-1)/(s^2-1)$ 本の初期直線から周期 v で、また1本の初期直線から周期 $v/(s+1)$ で構成できる。たとえば、 $PG(3, 2)$ において初期直線は $014(\bmod 15)$, $028(\bmod 15)$, $058(\bmod 5)$ の3本である。したがって、全直線はこの初期直線の各要素に1を加えることをくり返し行い、表1として求められる。また差集合の性質から任意の2点 x, y が与えられたとき、それら2点を含む直線が属する初期直線とサイクルが一意に定まるから、差 $(x-y)$ が $v/2$ より小さいすべての異なる2点について、

$D_d^1; (x, y)$ を含む直線の属する初期直線の番号

$$D_d^2 = \begin{cases} a_2; a_1 - a_2 = x - y, a_1, a_2 \text{ は } D_d^1 \text{ 番の初期直線上の点} \\ -1; D_d^1 \text{ の初期直線が短サイクルのとき} \end{cases}$$

$$d = x - y (\bmod v) \quad 1 \leq d \leq v/2$$

$$0 \leq x, y \leq v$$

なる表(D -table)を作っておく。

いま、 $PG(n-1, s)$ 上の2点 y_1, y_2 が与えられたとき、直線 $\overline{y_1 y_2}$ は D -tableを用いて次のように計算できる。

(1) $v/2$ より小さい方の差を計算する。ここで

$$d = y_1 - y_2 (\bmod v)$$

(2) D -tableから D_d^1 番の初期値を求める。

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{s+1}\}$$

(3) y_1, y_2 を含む直線は

表1 直線計算の1例

	0	1	4	0	2	8	0	5	8
各	1	2	5	1	3	9	1	6	9
要	2	3	6	2	4	10	2	7	10
素	3	4	7	3	5	11	3	8	11
に	4	5	8	4	6	12	4	9	12
+1	5	6	9	5	7	13			
を	6	7	10	6	8	14			
次	7	8	11	7	9	0			
々	8	9	12	8	10	1			
加	9	10	13	9	11	2			
え	10	11	14	10	12	3			
て	11	12	0	11	13	4			
い	12	13	1	12	14	5			
く	13	14	2	13	0	6			
	14	0	3	14	1	7			
小計	15本			15本			5本		

$\{a_1 + r, a_2 + r, \dots, a_{s+1} + r\} (\bmod v)$
ただし、 $D_d^2 = -1$ のとき、 $r = y_2 (\bmod v/s + 1)$

4. 割りつけの自動計画プログラムの概要とその実行例

上で述べたアルゴリズムをもとに、直交実験計画を自動構成するプログラムを作成する。以下述べるプログラムは実用的に重要と思われる $L_8(2^7)$, $L_{16}(2^{15})$, $L_{32}(2^{31})$, $L_{64}(2^{63})$, $L_{27}(3^{13})$, $L_{81}(3^{40})$, $L_{243}(3^{120})$ 計画に対して適用可能であることが検討済みであるが、以下そのなかの一つを用いた割りつけの例を示す。

4.1 自動割りつけプログラムの概要

プログラム全体の流れ図を図1に示す。まず、(1)題名、水準数、因子数を入力した後、(2)2因子交互作用の組を入力する。(3)次に入力が入正しく行われたかのチェックの後、(4)(9)式を満たす $PG(n-1, s)$ の次元 n を求め、直線計算の前処理として初期直線を利用して D -tableを作成する。(5)変数の初期化を行ったあと、割りつけに入るが、ここでAUTOかMANUALのどちらで割りつけるのかの指示をする。(6)MANUALはコンピュータと対話形式で割りつけるが、割りつけに際してindex numberや標価値の表などを利用でき、特別な点への割りつけ

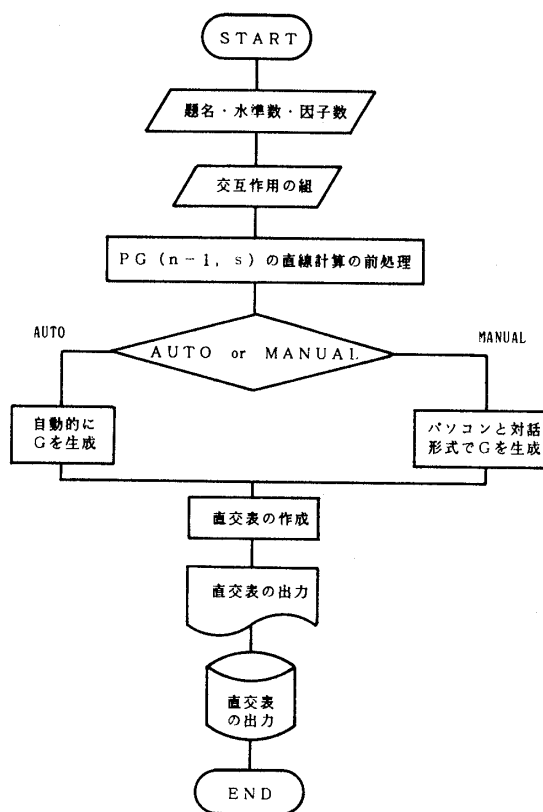


図1 プログラム全体の流れ図

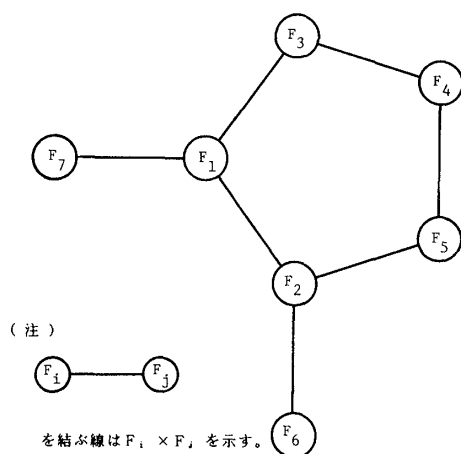


図2 2因子交互作用のパターン

水準数 3 因子数 7

***** 交互作用の組 *****

$F1 \times F2$
 $F1 \times F3$
 $F1 \times F7$
 $F2 \times F5$
 $F2 \times F6$
 $F3 \times F4$
 $F4 \times F5$

***** PG(3, 3) に割り付け *****

point 0...	F1
point 1...	F2
point 2...	F3
point 3...	F4
point 4... $F1 \times F2$
point 5...
point 6... $F3 \times F4$
point 7...	F6
point 8...	F7
point 9...
point 10...	F5
point 11...
point 12... $F2 \times F6$
point 13... $F1 \times F2$
point 14... $F1 \times F7$
point 15... $F3 \times F4$
point 16...
point 17... $F1 \times F3$
point 18...
point 19... $F1 \times F7$
point 20...

や教育用などに利用できるようになっている。(7)一方, AUTO は文字通りコンピュータが自動的に割りつけてくれるもので, (3.2)節で述べたように2通りの方法で割りつけができるようになっている。また,途中で割りつけが不可能になった場合, バックトラックをかけて1つ前の因子の割りつけをやり直すようになっている。この方法ではすべての因子をすべての点についてチェックすることになっている。したがって割りつけが可能なものは必ず確実に割りつけが完了するが, 計算時間は膨大になる場合がある。(8)割りつけが完了したとき, 射影空間 $PG(n-1, s)$ 上の点に因子や交互作用がどのように割りつけられたかを示すリストを出力し, 原始既約多項式の係数から, $PG(n-1, s)$ の点をベクトル表現して G 行列を作成し出力する。そして, (7)式により直交表を作成し出力する。

point 21...
point 22...
point 23...
point 24... $F1 \times F3$
point 25...
point 26... $F4 \times F5$
point 27...
point 28... $F4 \times F5$
point 29...
point 30...
point 31...
point 32...
point 33... $F2 \times F6$
point 34...
point 35...
point 36...
point 37... $F2 \times F5$
point 38... $F2 \times F5$
point 39...

図3 太陽電池の効率を調べる実験

(注) point は $PG(3, 3)$ 上の点 i を示す

**** 割り付けを行ったときの PG (3,3) 上の点の index number ****

point 0 ... 3	point 1 ... 3	point 2 ... 2	point 3 ... 2
point 4 ... 1	point 5 ... 0	point 6 ... 1	point 7 ... 1
point 8 ... 1	point 9 ... 0	point 10 ... 2	point 11 ... 0
point 12 ... 1	point 13 ... 1	point 14 ... 1	point 15 ... 1
point 16 ... 0	point 17 ... 1	point 18 ... 0	point 19 ... 1
point 20 ... 0	point 21 ... 0	point 22 ... 0	point 23 ... 0
point 24 ... 1	point 25 ... 0	point 26 ... 1	point 27 ... 0
point 28 ... 1	point 29 ... 0	point 30 ... 0	point 31 ... 0
point 32 ... 0	point 33 ... 1	point 34 ... 0	point 35 ... 0
point 36 ... 0	point 37 ... 1	point 38 ... 1	point 39 ... 0

**** G行列 ****

ξ (1)	0	1	0	0	0
ξ (2)	1	0	1	0	0
ξ (3)	2	0	0	1	0
ξ (4)	3	0	0	0	1
ξ (5)	10	1	1	1	2
ξ (6)	7	1	1	0	1
ξ (7)	8	1	2	1	0

図4 本実験の index number と G 行列

4.2 本アルゴリズムを利用した場合の効果

本論の 3.2 節で新たに工夫した(1), (2)の 2 点を考慮したアルゴリズムの良さについては, 応用上の観点から重要と思われる $2^7, 2^{15}, 2^{31}, 3^{13}, 3^{40}$ 系の割り付けに使う点線図[5]を取り, これらのすべてについて本アルゴリズムによって割り付けを実行させた. この結果, 多くの割り付け(文献[2]~[5]等の大多数の割り付け例)についてみるとほとんど 1~2 分 (NEC PC-9801 コンピュータ利用) の短い時間で実行可能であり, 応用上有効であると考えられる.

4.3 プログラムの実行例

ここでは, 新製品(太陽電池)開発におけるその製品の品質の特性値に影響を及ぼすと思われる要因と, それらの間の 2 因子交互作用を見いだすための実験の割り付けの応用例である. 実験の目的は, 太陽電池の効率(太陽電池が太陽エネルギーを受け取って, それをどれだけ効率よく利用しているか)を以下の 7 要因について調べようとするものである. 与えられた実験の条件は次の通りである.

① 因子の数は

- F_1 電極間隔 F_5 p 層濃度
 F_2 p 層電力 F_6 N 層濃度
 F_3 p 層厚み F_7 p 層流量
 F_4 i 層厚み

の 7 因子

② 因子の水準はすべて $s=3$ 水準

③ 2 因子交互作用の組は図 2 に示す 7 つ

まず, 割り付けプログラムを実行させる前に 3.2 節で述べたように各要因に番号をつける(図 2 参照).

次にプログラムを実行させ, 題名, 水準数, 因子数を入力し, ついで 2 因子交互作用の組を入力する. AUTO を指定し, 点を小さい順に割り付けた場合の結果を図 3 に示す. また, 最終的な index number と得られた G 行列を図 4 に示す. コンピュータは NEC PC-9801 VM を使用している. 割り付けに要した時間はわずか数秒であり, コンピュータ入力からの時間を入れても数分で出来簡単に割り付けることがわかった.

5. 結論および今後の問題点

(1) 直交配列を用いる実験計画において, 計画にもり込まれるべき因子と必要な 2 因子交互作用をすべて分離推定できるようにするための割り付けを, コンピュータ支援の下で, より簡単に自動的に行うための原則とアルゴリズムを求めている. 本論の特徴は, 従来の要因の割り付けにみられるように, 点線図を見ながら直観的かつ試行錯誤的に割り付けを行うのではなく, 有限射影空間の構造を利用して割り付けをルール化し, それに基づいたアルゴリズムを示したところにある.

これによって一定の手順によって実験計画における要因の割り付けを可能ならしめ, 試行錯誤的な割り付けによる複雑, かつ時間と労力を要するきわめて面倒なやり方からの脱皮をはかっている.

(2) さらに, この応用例に示したように要因が多

、大規模の直交表を用いなければならないとき、ある程度の大きさ以上の直交配列では点線図が必ずしも列挙されておらず〔9〕、従来の割りつけの方法では十分実験の目的に対して適合し得ないこともありうる。しかし、本方法は点線図を見ながらの割りつけ作業は全く不要になり、この部分は上記アルゴリズムによって行うことができ、どの要因を直交配列のどの列に割りつけるかを自動的にコンピュータ上に指示させるので、実際に割りつけを行う場合にとって有効かつ便利である。

次に、今後の問題点としては

(a) すでに述べたように主効果と必要なすべての2因子交互作用を分離推定できる要因の割りつけの計画を与えているが、これを3因子、4因子等の高次の交互作用項の割りつけまでも可能ならしめるような一般的なアルゴリズムを与える方法を求めること。

(b) 分割法、交絡法等多くの割りつけのアルゴリズムにおいて、index number 0の点の選び方の統一したルールを明確にし、アルゴリズムの合理化と開発をはかること。

最後に、本研究に対し貴重な助言をいただいた筑波大学教授高橋馨郎氏ならびに同大学講師藤原良叔氏に感謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 〔1〕 高橋馨郎：「組合せ理論とその応用」，岩波書店 (1979)
- 〔2〕 奥野忠一，芳賀敏郎：「実験計画法」，培風館 (1971)
- 〔3〕 田口玄一：「新版 実験計画法(上)，(下)」，丸善 (1962)
- 〔4〕 田口玄一，横山異子：「実験計画法(経営工学シリーズ・18)」，日本規格協会 (1984)
- 〔5〕 田口玄一，小西省三：「直交表による実験のわりつけ方(QCテキストシリーズ・12)」，日科技連 (1978)
- 〔6〕 高橋馨郎，藤原良叔，杉本英二，須田健二，神保雅一：“直交実験の自動計画と Maximal 3,4-linearly independent set”，京都大学数理解析研究所講究録 285，「デザインの構成法および不存在性」，pp. 13-23 (1976)
- 〔7〕 須田健二：“実験計画のデザイン・解析コンピュータシステム”，京都大学数理解析研究所講究録 404，「実験配置の理論と応用」，pp. 25-35 (1980)
- 〔8〕 R. Fuji-Hara：“On the Automatical Construction for Orthogonal Designs of Experiments,” *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, pp. 13-25, Vol. 25, No. 1 (1978)
- 〔9〕 M. Masuyama：“Linear Graphs for Experimental Designs Associated with OA (16, 15, 2, 2),” *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, pp. 101-116, Vol. 17, No. 2 (1970)
- 〔10〕 H. Miyazaki: An Introduction to the Design of Experiments, Lecture Note in Quality Control, Graduate School of the Faculty of Engineering, Gunma University (1985)