

# 卒業論文

タイトル未定 No Name

富山県立大学 工学部 電子・情報工学科

1915015 大森 一輝

指導教員 Antonio Oliveira Nzinga Rene 講師

提出年月: 令和5年(2023年)2月



# 目 次

図一覧	ii
表一覧	iii
記号一覧	iv
<b>第1章 はじめに</b>	<b>1</b>
§ 1.1 本研究の背景	1
§ 1.2 本研究の目的	2
§ 1.3 本論文の概要	3
<b>第2章 運動学習における脳の学習とインピーダンスの関連</b>	<b>4</b>
§ 2.1 内部モデルの作成と獲得	4
§ 2.2 インピーダンス推定	7
§ 2.3 内部モデルの信頼度	12
<b>第3章 足裏圧センサデバイス</b>	<b>18</b>
§ 3.1 足裏センサの研究	18
§ 3.2 ショッカクシューズと自作センサデバイス	19
§ 3.3 自作センサデバイスの有意性	19
<b>第4章 提案手法</b>	<b>20</b>
§ 4.1 識別のための機械学習	20
§ 4.2 内部モデルの信頼度を考慮した人間制御者の数学モデル	20
§ 4.3 内部モデルを考慮したインピーダンス推定	20
<b>第5章 実験結果ならびに考察</b>	<b>21</b>
§ 5.1 実験概要および結果	21
§ 5.2 考察	21
<b>第6章 おわりに</b>	<b>22</b>
<b>謝辞</b>	<b>23</b>
<b>参考文献</b>	<b>24</b>

# 図一覧

2.1	PsychoPy の実験作成画面	5
2.2	星形のなぞり運動	5
2.3	試行に要した時間	7
2.4	なぞり運動の軌跡	7
2.5	平均速度の推移	7
2.6	平均加速度の推移	7
2.7	インピーダンス制御	9
2.8	慣性行列の平均値推移	12
2.9	粘性行列の平均値推移	12
2.10	剛性行列の平均値推移	12
2.11	内部モデルの仕組み	14
2.12	誤差の合計	17
2.13	内部モデルの信頼度の評価値	17
3.1	3 軸力センサチップ	19
3.2	センサデバイス	19

# 表一覽

# 記号一覧

以下に本論文において用いられる用語と記号の対応表を示す。

用語	記号	用語	記号
状態ベクトル	$\mathbf{x}_k$	確率変数	$\xi$
状態遷移行列	$\mathbf{F}, \mathbf{F}_k$	共分散行列	$D_t$
制御行列	$\mathbf{B}_k$	平均	$\mu_t$
入力ベクトル	$\mathbf{u}_k$	$d_t$ の観測誤差の分散	$\sigma_d^2$
雑音モデルの行列	$\mathbf{G}, \mathbf{G}_k$	単位行列	$\mathbf{I}$
$k$ 時点の外乱ベクトル	$\mathbf{w}_k$	状態推定値	$\hat{\mathbf{z}}$
$k$ 時点の観測ノイズ	$\mathbf{v}_k$	観測誤差	$\mathbf{e}$
$\mathbf{x}_k$ の推定値	$\mathbf{x}_k^*, \widehat{\mathbf{x}}_k$	観測誤差の共分散	$\mathbf{S}$
観測ベクトル	$\mathbf{y}_k$	最適カルマンゲイン	$\mathbf{K}$
観測行列	$\mathbf{H}, \mathbf{H}_k, \mathbf{C}$	データの取得間隔時間	$\Delta$
$k$ 回目の観測値	$Y_k$	$k$ の時点での $x$ の座標	$x_k$
$\widehat{\mathbf{x}}_k$ の分散	$\mathbf{P}_k$	$k$ の時点での $y$ の座標	$y_k$
$\mathbf{x}_k^*$ の共分散行列	$\mathbf{\Gamma}$	$k$ の時点での $x$ の速度	$\dot{x}_k$
慣性行列	$\mathbf{M}(\theta)$	$k$ の時点での $y$ の速度	$\dot{y}_k$
コリオリ力と遠心力	$\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta})$	$k$ の時点での $x$ の加速度	$\ddot{x}_k$
重力トルク	$\mathbf{g}(\theta)$	$k$ の時点での $y$ の加速度	$\ddot{y}_k$
関節角度	$\theta$	零行列	$\mathbf{0}$
関節トルク	$\boldsymbol{\tau}$	$M_d^{-1}$ の成分	$c1, c2$
ヤコビ行列	$\mathbf{J}(\theta)$	$M_d^{-1}B_d$ の成分	$b1, b2, b3, b4$
転置を表す	$(\cdot)', (\cdot)^T$	$M_d^{-1}K_d$ の成分	$c1, c2, c3, c4$
マニピュレータの手先位置	$\mathbf{X}$	手先位置	$x$
対象物の平衡点の位置	$\mathbf{X}_e$	目標位置	$x_d$
制御入力	$\mathbf{F}_{act}$	回帰分析で得られた切片	$s_x, s_y$
目標慣性行列	$\mathbf{M}_d$	モデル式で予測される加速度	$\ddot{x}_f, \ddot{y}_f$
目標粘性行列	$\mathbf{B}_d$	身体の移動量	$d, d_t$
目標剛性行列	$\mathbf{K}_d$	運動指令	$m, m_t$
目標起動	$\mathbf{X}_d$	データ数	$n$
目標手先力	$\mathbf{F}_d$		
内部モデルの信頼度	$\beta$		
時刻	$k, t$		
身体の位置	$\mathbf{p}, \mathbf{p}_t$		

## はじめに

### § 1.1 本研究の背景

歩行は生活に欠かせない重要な人間の行動の一種である。身体活動・運動が不足している状態では消費エネルギーが少ないために、肥満、特に内臓脂肪肥満が起きやすくなる。それにより、高血圧や糖尿病、脂質異常症などの生活習慣病の発症リスクが高くなる。その予防のために人間は運動をしなければならない。保健指導の中で運動習慣を提案するのはハードルが高く、さらに場所や時間、必要な用具を考えるところから始めなければならない。それに比較すると歩行は特別な準備がいらず動きやすい服装と靴があればいつでもできるという点で非常に優れている運動である。

また、歩行はストレス解消にも役立ち、気分を明るくする作用もある。一定のリズムで体の筋肉を動かす有酸素運動は、脳の神経伝達物質のひとつである「セロトニン」が活性化することが分かっている。セロトニンが増えると気分が落ち着き、集中力も高まるといわれている[1]。歩行による健康が注目されている今日、Apple Watchなどのウェアラブル端末によって歩行時の生体データを解析することにより健康管理を行えるようになった。

しかし、高齢者の筋力の低下や精神疾患者の不安な感情などから歩行に関して難しさを感じている人が一定数存在する。前者について、原因の一つは運動器事態の疾患である変形性関節症、脊柱管狭窄症、骨粗しょう症などであり、ロコモの三大疾患といわれるものである。もう一つは、年を取ることによって自然に起こる、筋力やバランス感覚の低下などによる運動器機能不全、廃用性萎縮、サルコペニアが原因といえる[2]。このことから、転倒の危険性が高まりけがのリスクが高くなる。高齢者の場合、小さなけがでも大きな合併症につながる恐れがあるので気をつける必要がある。

また後者について、うつ病や統合失調症の患者は不安に感じることがよくあるため、歩行が困難なケースがある。例えば土壌が不安定で歩きにくい場所では、その歩きにくさから大きな不安を感じ心のバランスが乱れ精神バランスが崩れてしまい歩くことができなくなってしまう。

上記について様々な研究がなされており、その一つに足裏圧がある。足裏圧を測定することで、様々なシチュエーションにおける歩行にどのような特徴があるかを見出している。しかし、高額なセンサデバイスを用いている点などから一般人が容易に用いるには難しいといった問題があるため実用化には至っていない。そのため、比較的安価なセンサデバイスで歩行実験を行い、歩行支援を工学的な観点から行うことができれば実用化に大きく近づくとされる。

## § 1.2 本研究の目的

背景にも記載したが、足裏センサを用いた歩行研究は様々な方向で行われてはいるが実用化には至っていない。足裏圧について、高額なセンサデバイスを用いた研究は広く行われているがそれは一般の人が用いるには難しい。比較的安価なセンサデバイスで、歩行支援をすることが求められるが、高価なセンサはデータを高精度かつ高性能なものを測ることができるので安価なセンサデバイスにするためにはセンサ数の削減やセンサそのものを安いものにするといった費用削減をしなければならない。それだけでなく、一般の人が用いるためにはハードウェアの小型化も欠かせず、なおかつ防水、防塵機能も必要となる。大きい装置であれば歩行に影響が出てしまい、歩行支援にならずデバイスの意味がなくなってしまうことに加え、防水、防塵機能がなければ雨や砂によって故障してしまう。

そこで、本研究はタッチエンス株式会社のショッカクシューズを高額なセンサデバイスとして用い、自作デバイスと比較することで安価なデバイスでも十分にデータ解析ができる事を示すと同時に、高齢者や障害者の歩行支援及び危険予測を行うシステムの提案を行う。また、ハードウェアの小型化も取り入れ、足に装着しても違和感のない設計も行う。これは、一般の人が足につける違和感を軽減させるためでもあるが、精神疾患者が足にデバイスをつけることによって不安や動搖、心労などのストレスになってしまうことを防ぐためである。本研究は福祉支援を目的としているのでユニバーサルデザインに注目し、誰もが使いやすいシステム設計を目指す。

ユニバーサルデザインとは、「年齢や能力、状況などにかかわらず、できるだけ多くの人が使いやすいように、製品や建物・環境をデザインする」という考え方で、誰でも同じように利用できる「公平性」、使い方を選べる「自由度」、簡単に使える「単純性」、欲しい情報がすぐに分かる「明確さ」、ミスや危険につながらない「安全性」、無理なく使える「体への負担の少なさ」、使いやすい広さや大きさの「空間性」の7つを総称して「ユニバーサルデザイン7原則」という[3]。本研究では特に「公平性」、「単純性」、「明確さ」、「安全性」、「体への負担の少なさ」に着目しデバイスを作成する。

本研究は農場で働く精神疾患を持つ方に協力していただき実験を行う。土壌は不安定なため、バランスを崩して転倒してしまう恐れがあるので、作業中の様々なデータと作業中の様子を比較して、転倒しそうなとき、安定しない土壌でふらつきながら作業しているとき、通常通りの様子などを観察する。普段通り作業をしていただき、足裏データを分析することでどのような特徴量があるかを調べる。また、健常者と比較することで障害者との相違点を示す。障害者が何について不安に感じ、歩行などの作業に影響が出るのかが工学的な視点からわかれれば、そこについて支援、改善を促すシステムを開発することができるのではないかと考える。

タッチエンス株式会社は独自センサの開発から製品の設計・開発までを行う会社で、主にオリジナルの触覚センサを開発している。例えば、触覚キューブは今までにはない「やわらかい」触覚センサで三次元方向の変位を計測することができる。スポンジ自体がセンサになっているため「やわらかい」感覚をそのまま計測することができ、さらに物に埋め込んでも安全で自然な手触りのままインターフェイスとすることができます。このタッチエンス株式会社のショッカクシューズには世界最小の6軸センサが入っており3軸方向の力とモーメントを計測することができる[4]。

### § 1.3 本論文の概要

本論文は次のように構成される。

**第1章** 本研究の背景と目的について説明する。背景では歩行に関する一般論と高齢者や障害者の歩行問題、先行研究の方向性、実用化に向けた課題について述べる。目的では高齢者や障害者に向けて安価なセンサや仕組みで歩行支援を行えるシステムデバイスを提案する。

**第2章** 運動学習における脳の習熟とインピーダンスの関連について先行研究を紹介する。この研究で用いられている内部モデルの作成、インピーダンスパラメータの算出、カルマンフィルタで計算する内部モデルの信頼度について述べる。

**第3章** 足裏圧に関する先行研究を紹介し、ショッカクシューズと自作デバイスを比較し、自作デバイスの有意性を述べる。

**第4章**

**第5章**

**第6章**



## 第2章

# 運動学習における脳の学習とインピーダンスの関連

### § 2.1 内部モデルの作成と獲得

先行研究は、なぞり運動における運動学習は脳にどのようにして学習されるかを、インピーダンスを関連させて示した[5]。その実験データの分析法および結果を以下に示す。

#### 運動学習

運動学習とは、熟練した行動を作り出す能力における比較的永続した変化へと続く練習もしくは経験に関連する一連の過程、と定義されており3つの段階からなるとされている。まず、どのように体を動かすかということについての知識を得ることから始まる。すなわち、第一段階では脳に視覚や聴覚で得た情報を記憶し理解する。次に、練習を行うことにより、断片的な記憶を滑らかに繋げる。このとき、部分的に理解していた知識が一連の連続した動きで明確に記憶されていくためミスが減る。最後に、より練習を重ねることにより自分の動きに注意する必要がなくなる。これまで意識的に動作を頭で認識し、1つ1つの動きを確認しながら動作を実行したが、積み重ねられた訓練により無意識にできるようになる。これらの段階は順に認知、連合、自律とよばれる。運動学習では、どのように関節を動かせば効率よく運動ができるかなどといった知識を得ただけでは運動スキルを習得することはできなく、実際に効率の良い運動を実行しない限り運動学習を習得したとはいえない。

#### 内部モデル

内部モデルとは、外界の仕組みを脳の内部でシミュレーション・模倣する神経機構のことであり、この内部モデルにより人間は運動する際にシミュレーションを行い予測する。そのため、内部モデルの精度を高めていくことで運動学習を効率よく行うことができ、予測精度も高めることができる。

#### PsychoPy

PsychoPyは、PCを用いて心理実験を行うための実験作成ツールで、画像刺激や音声刺激の提示、反応時間の計測、刺激提示順序を自動的に制御することができる。名前のPyとはプログラミング言語Pythonのことでありソフトウェアの根本はPythonで記述されている。PsychoPyはプログラミングができない人でも簡単に実験を作成できるように刺激提示や時間計測などの様々な種類のアイコンを用意しているため、それを任意に並べれば簡単に実験を作成することができる。

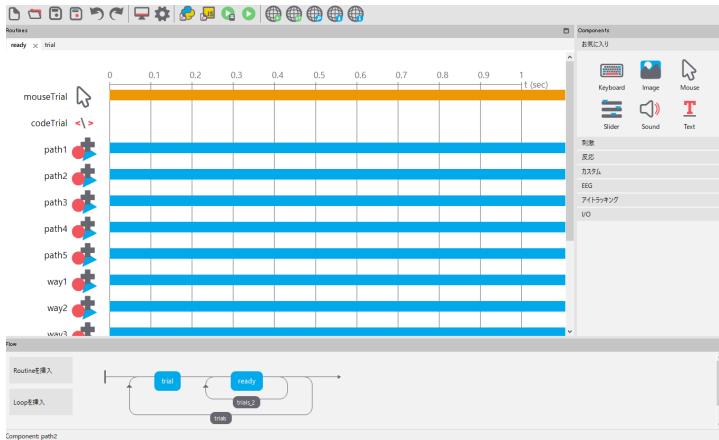


図 2.1: PsychoPy の実験作成画面

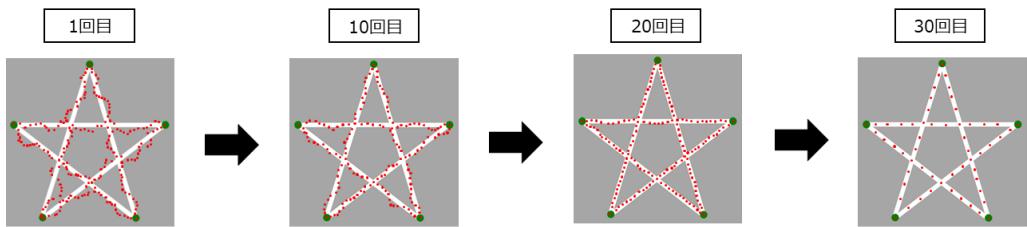


図 2.2: 星形のなぞり運動

図 2.1 は PsychoPy の実験作成画面である。ここからアイコンを用いて心理実験を作成する。図 2.2 は今回の試行のイメージ図である。この星型を被験者には一筆書きで書いてもらう。

## カルマンフィルタ

カルマンフィルタとは、状態空間モデルにおいて内部の見えない「状態」を効率的に推定するための計算手法のことである。カルマンフィルタは複数の不確実な情報から、より正確な情報を推定することを目的として用いられ、位置推定やトラッキング制御などに使用される。現代ではカーナビゲーションで機器内臓の加速度計や人工衛星からの誤差のある情報を結合して、常に変動する自動車の位置を推定することに応用されている。目標物の時間変化を支配する法則を活用して目標物の位置を現在(フィルター)、未来(予測)、過去(内挿あるいは平滑化)に推定することができる。状態空間モデルの具体的な例で観測した魚の数のデータから、釣れる魚の数を予測するモデルがある。釣れた魚の数を「観測値」と呼ぶ。観測値は魚の数を予測するうえで重要な情報であるが、釣れる魚の数はその日の気象やえさの種類などの違い、つまり観測誤差によって変動する。また、実際にいる魚の数も変動するので釣れる魚の数に影響が出る要因となりうる。しかし、実際の魚の数は目に見えるものではないため観測できない。そこで、実際にいる魚の数といった「状態」の動きを予測してそこから観測値を推定するのが状態空間モデルである。状態空間モデルでは、内部に状態の変化を表す状態方程式と状態から得られた観測値を表す観測方程式の2つの方程式をもち、それらをどのように定義するかによって挙動を大きく変えることができる。

状態方程式は

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

観測方程式は

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.2)$$

ここで,  $\mathbf{x}_k \in \Re^{n \times 1}$  は状態ベクトル,  $\mathbf{y}_k \in \Re^{p \times 1}$  は観測ベクトル,  $\mathbf{u}_k \in \Re^{m \times 1}$  は入力ベクトルである. また,  $\mathbf{F}_k \in \Re^{p \times p}$  は状態遷移行列,  $\mathbf{B}_k \in \Re^{p \times o}$  は制御行列,  $\mathbf{H}_k \in \Re^{n \times p}$  は観測行列を表している. 添字の  $k$  は時刻を表す.  $\mathbf{w}_k \in \Re^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{v}_k \in \Re^{p \times 1}$  は雑音を表しており両方ともガウス分布に従い,  $\mathbf{G}_k \in \Re^{n \times m}$  は雑音モデルの行列を表している. これら 2 つの方程式を用いて, カルマンフィルタに適用する. 予測のステップを

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{z}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \quad (2.4)$$

更新のステップを

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \quad (2.6)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad (2.7)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k} = \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{e}_k \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (2.9)$$

とする. このとき,  $\mathbf{e}_k \in \Re^{n \times m}$  は観測残差,  $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \in \Re^{p \times 1}$  は  $k$  の時刻の状態推定値,  $\mathbf{S}_k \in \Re^{n \times n}$  は観測誤差の共分散,  $\mathbf{I} \in \Re^{n \times n}$  は単位行列,  $\mathbf{P}_{k|k-1} \in \Re^{p \times p}$  は  $k$  の時刻の予測誤差行列,  $\mathbf{K}_k \in \Re^{p \times n}$  は最適カルマンゲイン,  $\hat{\mathbf{z}}_{k|k} \in \Re^{p \times m}$  は更新された状態の推定値,  $\mathbf{P}_{k|k} \in \Re^{p \times p}$  は更新された誤差の共分散を表す. 予測のステップでは, 前の時刻の推定状態から現在の時刻の状態推定を行う. 更新のステップでは, 現在時刻の観測を用いて推定値を補正し, より正確な状態を推定する.

実験手順をここに記す. 被験者には実験の前にまず実験の目的, 実験方法の説明, 注意点を説明する. 実験の目的は, 運動学習をデータサイエンスすることを伝える. 実験方法の説明は, まず被験者が実験を行うか否かを判断する始まる. 今回の実験は人体実験であるため, 実験を行うのは被験者の任意によるためである. 次に実験の方法について説明する. 実験は心理実験ツールである PsychoPy を用いて行う. PC 上に出現する星形図形を PC のマウスパッドを用いて 30 回なぞる. このとき, 途中で休むことや間を置くことはできない. 星形の枠をはみ出さないように注意しながら行い, 実験のスピードは被験者の任意によるものとする. 実験を行う場合は文字を書く際の利き手で行う. 実験の前に練習を 3 回行う. まず, PsychoPy の使い方を覚るために正方形のなぞり書き 2 周を行う. 次に, 実験で行う上下反転する動き方を 1 度経験するために正方形のなぞり書きを上下反転でカーソルが動く設定で 2 周行う. 最後に, 星形のなぞりについて書き順を覚るために星形のなぞり書きを 2 周行う. このとき, 上下反転の設定にはせずに普通の動き方で行う.

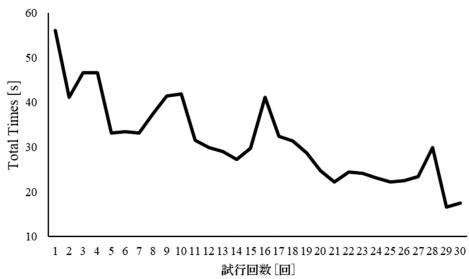


図 2.3: 試行に要した時間

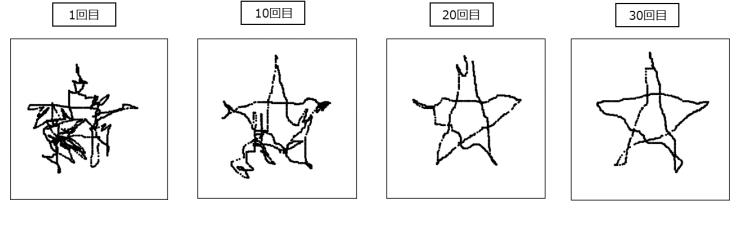


図 2.4: なぞり運動の軌跡

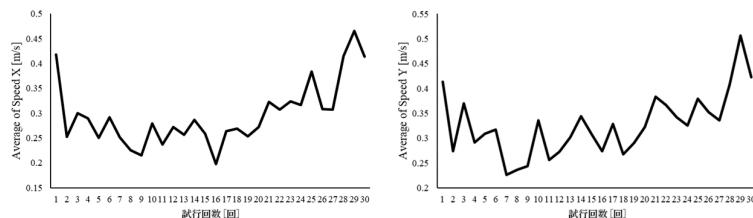


図 2.5: 平均速度の推移

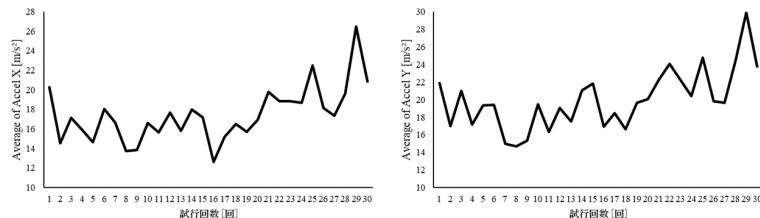


図 2.6: 平均加速度の推移

今回、20代女性に実験を行っていただき、そのデータをもとに解析を行った。PsychoPyで取得できるデータを図に示す。図2.3は星形をなぞる1回の試行にかかった時間の推移をグラフ化したもので、試行回数が増えると時間は減少傾向にある。図2.4は被験者がなぞった星形の軌跡を散布図で表した図である。図2.5と図2.6は1回の試行における平均の速度と加速度を算出しそれをグラフ化したものである。

1回目は、ほぼ原形をとどめないほどにそれが激しく誤差が大きい。最初の運動のため、初めて動かすシステムに慣れていないため、大きくミスをしてしまう。それが10回目では少しずつ星形になっていき、20回目から30回目で形になっており誤差が減っている。また、図2.5と図2.6から試行回数が増すごとに平均速度と平均加速度が上昇傾向にある。その事実は、運動に慣れることで動きを大きくしていく人間の特徴を表しており、何度も同じ運動を繰り返すことで手先運動を学習している様子がわかる。すなわち30回の試行を進める中で脳が運動を覚えて動き方を理解していくため、試行回数が増して誤差が減少ていき、速度と加速度が上昇することは運動学習が進んだといえる。

## § 2.2 インピーダンス推定

インピーダンスを用いる考え方にはインピーダンス制御がある。これは、機械的なインピーダンス(慣性・粘性・剛性)をアームの手先の柔らかさとして実現しようとするものである。これを用いれば、ロボットが人間に近い動作機能を持つことができる。対象物に接触して作業を行う場合、対象物からの拘束に従って位置だけでなく力の制御が必要となる。したがってインピーダンス制御は、対象物からみたマニピュレータの手先の動特性であるインピーダンスパラメータを望ましい値に設定しようとするもので、位置と力の制御を必要とする接触作業に有効である。作業内容や目的、対象物の特性に応じて適切なインピーダンスパラメー

タを設定する必要がある。そこで、インピーダンスパラメータすべてを調節することができ、自由運動と拘束運動をともに取り扱うことが可能な手先インピーダンス調整法がある。

インピーダンスパラメータは慣性行列、粘性行列、剛性行列である。物体の運動は  $xyz$  空間における三次元空間で表されるため、これらは一般的に三次元行列で算出する。この研究においては PsychoPy は  $xy$  平面上での運動を記録するため、算出されるインピーダンスパラメータは二次元となる。

剛体の任意の回転運動は慣性行列で記述することができる。トルク（角運動量）は慣性モーメントと角加速度の比例関係にあり、トルクや角加速度は正負の値を取りながら変動するが、慣性行列は常に正の値で定数化される。物体は滑る運動をする際に必ず摩擦力が生じる。なのでその力に抗うための力積が必要となる。単位平方メートルあたりの抵抗力である力積を示したものが粘性行列である。この粘性行列の対角成分は正の値しかとらない。すなわち曲げやすさを示す定数である。剛性行列も同様に対角成分は正の値しかとらない。

一般に対象物に接触しているマニピュレーターの運動方程式は、

$$\mathbf{M}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{g}(\theta) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\theta) \mathbf{F}_{int} \quad (2.10)$$

と表される。

このとき、 $\mathbf{M}(\theta) \in \Re^{n \times n}$  は慣性行列、 $\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) \in \Re^{n \times 1}$  はコリオリ力・遠心力、 $\mathbf{g}(\theta) \in \Re^{n \times 1}$  は重力トルク、 $\theta$  は関節角度、 $\boldsymbol{\tau} \in \Re^{n \times 1}$  は関節トルク、 $\mathbf{J}(\theta) \in \Re^{m \times n}$  はヤコビ行列、 $\mathbf{F}_{int} \in \Re^{n \times 1}$  はマニピュレータの手先に作用する力、 $(\cdot)^T$  は転置行列を表す。

$\mathbf{F}_{int}$  は次のようにモデル化できる。

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_e (\mathbf{X} - \mathbf{X}_e) \quad (2.11)$$

このとき、 $\mathbf{M}_e \in \Re^{m \times m}$  は慣性、 $\mathbf{B}_e \in \Re^{m \times m}$  は粘性、 $\mathbf{K}_e \in \Re^{m \times m}$  は剛性を表し、 $\mathbf{X} \in \Re^{m \times 1}$  はマニピュレータの手先位置、 $\mathbf{X}_e \in \Re^{m \times 1}$  は対象物の平衡点の位置を表す。

式 2.10 に対して、

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{g}(\theta) + \mathbf{J}^T(\theta) \mathbf{F}_{int} + \mathbf{M}(\theta) \mathbf{J}^{-1}(\theta) [\mathbf{F}_{act} - \mathbf{J}(\theta) \dot{\theta}] \quad (2.12)$$

のような非線形補償を行うとマニピュレーターのダイナミクスは

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{act} \quad (2.13)$$

ようすに単純化される。

このとき、 $\mathbf{F}_{act} \in \Re^{m \times 1}$  は作業空間で表現した制御入力である。また、マニピュレーターの目標手先インピーダンスは、作業空間上で

$$\mathbf{M}_d d\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}_d d\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_d d\mathbf{X} = \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_{int} \quad (2.14)$$

と記述できるものとする。

このとき、 $\mathbf{M}_d \in \Re^{m \times m}$  は目標慣性行列、 $\mathbf{B}_d \in \Re^{m \times m}$  は目標粘性行列、 $\mathbf{K}_d \in \Re^{m \times m}$  は目標剛性行列を表しており、 $d\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_d$  とし、 $\mathbf{X}_d \in \Re^{m \times 1}$  は目標軌道、 $\mathbf{F}_d \in \Re^{m \times 1}$  は目標手先力を表す。

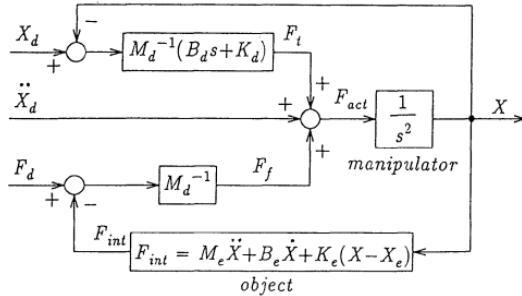


図 2.7: インピーダンス制御

このとき、目標インピーダンスを実現する制御入力  $\mathbf{F}_{act}$  は、以下の式 2.15 となる。

$$\mathbf{F}_{act} = -\mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{B}_d d\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_d d\mathbf{X}) + \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{F}_d - \mathbf{F}_{int}) + \ddot{\mathbf{X}}_d \quad (2.15)$$

図 2.7 はインピーダンス制御のブロック線図である。マニピュレータが対象物と接触していない自由運動では、 $\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_{int} = 0$  となり、図中の力制御ループは働かずに位置・速度制御のみが機能する。一方、対象物と接触している場合は力制御が同時に行われるため、位置と力の制御を統一的に扱うことが可能となる。すなわち自由運動時の手先の追従特性と拘束運動時の力制御特性は、インピーダンスパラメータ ( $\mathbf{M}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{K}_d$ ) によって決定できる。

今回用いる速度、加速度の式を記述する。時間変化を  $\Delta t$  として

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \quad (2.16)$$

と表せる。このとき  $n$  はデータ数とする。したがって、速度と加速度の式は

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t_n} \quad (2.17)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{n+1} = \frac{\dot{\mathbf{x}}_{n+1} - \dot{\mathbf{x}}_n}{\Delta t_n} \quad (2.18)$$

と書ける。インピーダンスパラメータを算出する際は式 2.17 および 2.18 を用いる。

作業に適したインピーダンスを実現する制御入力は式 2.15 より、

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{F}_x - \mathbf{K}_d d\mathbf{x} - \mathbf{B}_d d\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{F}_x) - \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{K}_d d\mathbf{x} + \mathbf{B}_d d\dot{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。ただし、 $\mathbf{U} = \mathbf{F}_{act}$ ,  $d\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$  で、このとき、 $\mathbf{x}_d$  は目標位置、 $\mathbf{x}$  は現在位置である。その結果  $\mathbf{U} = \ddot{\mathbf{x}}$  と単純化でき、この処理を施すと式 2.16 は以下のように変形できる。

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{F}_x) - \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{K}_d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) - \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{B}_d(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d) \quad (2.20)$$

式 2.17 の処理を  $y$  座標にも施し、変換すると以下の式になる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \ddot{\mathbf{y}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{K}_d & -\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{B}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_n \\ \dot{\mathbf{x}}_n \\ \dot{\mathbf{y}}_n \\ \ddot{\mathbf{x}}_n \\ \ddot{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{K}_d & \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{B}_d & \mathbf{I} & \mathbf{M}_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{y}_d \\ \dot{\mathbf{x}}_d \\ \dot{\mathbf{y}}_d \\ \ddot{\mathbf{x}}_d \\ \ddot{\mathbf{y}}_d \\ \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

式 2.17 式に速度とインピーダンスパラメータを考慮した場合、以下のように変形できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{y}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{y}}_{n+1} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \ddot{\mathbf{y}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Delta & \frac{\Delta^2}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \Delta \\ -\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{K}_d & -\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{B}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_n \\ \dot{\mathbf{x}}_n \\ \dot{\mathbf{y}}_n \\ \ddot{\mathbf{x}}_n \\ \ddot{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{K}_d & \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{B}_d & \mathbf{I} & \mathbf{M}_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{y}_d \\ \dot{\mathbf{x}}_d \\ \dot{\mathbf{y}}_d \\ \ddot{\mathbf{x}}_d \\ \ddot{\mathbf{y}}_d \\ \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

このとき、 $\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{K}_d$ ,  $\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{B}_d$ ,  $\mathbf{M}_d^{-1}$  をそれぞれ

$$\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix} \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} b1 & b2 \\ b3 & b4 \end{bmatrix} \mathbf{M}_d^{-1} = \begin{bmatrix} c1 & 0 \\ 0 & c2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

と表し、式 2.18 を展開すると

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \ddot{\mathbf{y}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_d - \mathbf{y}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b1 & b2 \\ b3 & b4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}_n \\ \dot{\mathbf{y}}_d - \dot{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_d \\ \ddot{\mathbf{y}}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c1 & 0 \\ 0 & c4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

となる。このとき、 $\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d$  は手先の目標位置なので、 $\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}$  と表す。 $\dot{\mathbf{x}}_d, \dot{\mathbf{y}}_d$  と  $\ddot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{y}}_d$  はそれぞれ目標速度、目標加速度である。目標速度は 1 つ前の運動であれば速度が一定であることがいえるので  $\dot{\mathbf{x}}_{t-1}, \dot{\mathbf{y}}_{t-1}$ 、目標加速度は力がかかっていないことが理想なため 0 と設定する。 $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y$  は力を表しており、1 もしくは -1 で表現する。正負の判別は  $\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}$  および  $\ddot{\mathbf{y}}_{n+1}$  の正負の合わせて決定する。それは加速度の正負によって力の向きが決まるためである。

このとき式 2.23 は

$$\begin{bmatrix} \pm \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \pm \ddot{\mathbf{y}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b1 & b2 \\ b3 & b4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{n-1} - \dot{\mathbf{x}}_n \\ \dot{\mathbf{y}}_{n-1} - \dot{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c1 & 0 \\ 0 & c2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

となる。このとき正負は複合同順である。

ここで、

$$\ddot{\mathbf{x}}_{n+1} = a1(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) + a2(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) + b1(\dot{\mathbf{x}}_{n-1} - \dot{\mathbf{x}}_n) + b2(\dot{\mathbf{y}}_{n-1} - \dot{\mathbf{y}}_n) \quad (2.26)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_{n+1} = a3(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) + a4(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) + b3(\dot{\mathbf{x}}_{n-1} - \dot{\mathbf{x}}_n) + b4(\dot{\mathbf{y}}_{n-1} - \dot{\mathbf{y}}_n) \quad (2.27)$$

を回帰分析にかける。

このとき、目的変数を  $\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}, \ddot{\mathbf{y}}_{n+1}$ 、説明変数を  $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n, \dot{\mathbf{x}}_{n-1} - \dot{\mathbf{x}}_n, \dot{\mathbf{y}}_{n-1} - \dot{\mathbf{y}}_n$  とし、偏回帰係数である  $a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4$  を求める。回帰分析は実験の試行回数だけ繰り返す。このとき取得できる偏回帰係数である  $a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4$  を用いて  $c1, c2$  を求める。また、取得したモデル式で予測される加速度をそれぞれ式 2.25 の方は  $\ddot{\mathbf{x}}_f$ 、式 2.26 の方は  $\ddot{\mathbf{y}}_f$  と表す。取得した  $a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4$  はそれぞれの試行で固定されているが、 $c1, c2$  はそれぞれの試行のデータの数だけ存在する。そのため、 $c1, c2$  は  $\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}, \ddot{\mathbf{y}}_{n+1}$  から  $\ddot{\mathbf{x}}_f, \ddot{\mathbf{y}}_f$  を引いたものとして扱う。

$$\pm c1 = \pm \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{x}}_f \quad (2.28)$$

$$\pm c2 = \pm \ddot{\mathbf{y}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{y}}_f \quad (2.29)$$

また、取得した  $a1, a2, a3, a4$  は  $\mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{K}_d$  の成分、 $b1, b2, b3, b4$  は  $\mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{B}_d$  の成分となっているように両方ともに  $\mathbf{M}_d^{-1}$  が付いている。そのため、両方ともに  $\mathbf{M}_d$  をかけることで  $\mathbf{K}_d, \mathbf{B}_d$  を取得する。算出した  $\mathbf{M}_d, \mathbf{K}_d, \mathbf{B}_d$  をそれぞれ以下の行列で表す。

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_y \end{bmatrix} \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} \\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_{yy} \end{bmatrix} \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xx} & \mathbf{B}_{xy} \\ \mathbf{B}_{yx} & \mathbf{B}_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

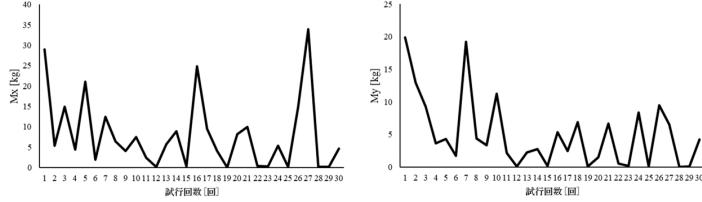


図 2.8: 慣性行列の平均値推移

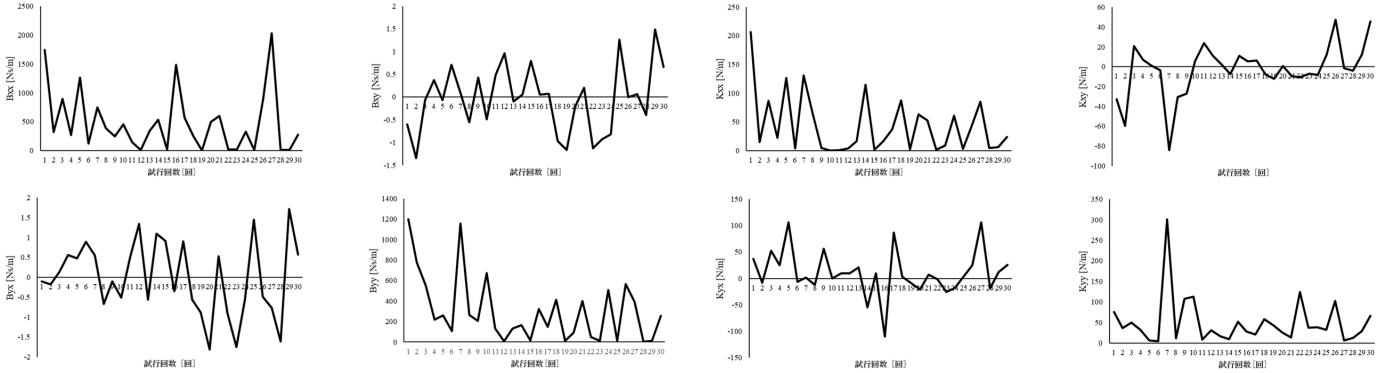


図 2.9: 粘性行列の平均値推移

図 2.10: 剛性行列の平均値推移

実験データからそれぞれのインピーダンスパラメータを計算した際, 1回の試行におけるインピーダンスパラメータの平均値をそれぞれ算出する. それを試行回数である30回行い, 試行を重ねるごとの平均値の推移をグラフに表す. そのインピーダンスパラメータの解析結果を図2.8, 図2.9, 図2.10に示す.

図2.8と図2.9, 図2.10の対角成分から, 各インピーダンスパラメータについて, 試行回数を重ねるごとに数値がだんだんと小さくなっている傾向にある. またどのグラフも, 1回目に数値が高く出ており力をかけてなぞり運動をしていることがわかる. これは初めて行う動作に対し, まずはゆっくりとなぞることで動き方を理解しているためと考える. 2回目には数値が急激に下がっているので動き方を理解してスムーズに運動できていることがうかがえる. そこからは強弱の波を繰り返しながら運動を進めている. すなわち実験を繰り返す中で, 1回目は認知のために特別に力をかけてまずは運動を覚えるための訓練を行い, 2回目以降は連合に入り断片的に記憶した1回目の運動を繋ぎ合わせるための訓練を行っている. 先行研究では試行回数を30回でなぞり運動を行ったが回数をもっと増やせば連合の時間が増えるため, より正確な習熟に近づき力もからなくなってくると予想できる. しかし, 1度に連續して何十回も試行を繰り返すと集中力が途切れてくるため, だんだん雑さが増していくことも推測できる. 実際, 30回でも人によって最後まで集中して実験を行えた人もいれば, 途中から集中力が途切れて後半にミスが多くなり雑さが目立った人もいる. なので, 15回や20回の比較的少ない試行回数を時間において複数セット行うことで認知, 連合を完了し自律に促すことができると考える.

### § 2.3 内部モデルの信頼度

内部モデルについて阪口らの研究で内部モデルの信頼度に基づく運動計画のアルゴリズムを提唱し、それをなぞり運動に用いた[7].

予測の確実性を扱うには、内部モデルの「値」だけでなくその「確かさ」を同時に表せるようなモデルの記述が必要であり、そのような記述法として確率モデルを用いる.

具体的に、身体が位置  $\mathbf{p}$  にあるとき運動指令  $m$  を発した結果生じる身体の移動量  $d$  を、適当な基底関数  $f_j(\mathbf{x}, m)$  の線形和で表すモデル

$$d(\mathbf{p}, m; \xi) = \xi \cdot \mathbf{f}(\mathbf{p}, m) = \sum_{j=1}^J \xi_j f_j(\mathbf{p}, m) \quad (2.31)$$

を用いる.

式 2.35 のモデルにおいて、線形和の荷重を与えるパラメータベクトル  $\xi$  が確率変数であり、その確率分布  $\pi(\xi)$  が内部モデルの実体となる. 確率モデルを用いたとき、内部モデルの「確かさ」はパラメータ分布の広がりとして表されるので、「確かさ」を表す指標として内部モデルの分散の逆数を用い、これを「内部モデルの信頼度」と呼ぶ.

式 2.35 の設定であれば内部モデルの適応はパラメータの推定に相当する. そこで、この推定にベイズ推定の考え方を用いる. すなわち、パラメータに関する先驗分布  $\pi_{t-1}(\xi)$ （脳の中にあらかじめ保持されている分布）を実際に得られた運動結果を用いて更新し、事後分布  $\pi_t(\xi)$  を得るとする. 身体が位置  $\mathbf{p}_t$  にある状況で運動指令  $m_t$  を発したとき、身体が  $d_t$  だけ動いた場合、パラメータベクトルの分布を式 2.36 に従い更新する.

$$\begin{aligned} \pi_t(\xi) &= \frac{P(d_t|\xi)\pi_{t-1}(\xi)}{P(d_t)} \\ &= \frac{P(d_t|\xi; \mathbf{p}_t, m_t)}{\int P(d_t|\xi'; \mathbf{p}_t, m_t)\pi_{t-1}(\xi') d\xi'} \pi_{t-1}(\xi) \end{aligned} \quad (2.32)$$

特に、パラメータベクトルや観測誤差が正規分布に従う場合は、平均  $\mu_t$  と共分散行列  $D_t$  に関する漸化式を用いて式 2.37、式 2.38 のように分布を更新する. このとき、 $\sigma_d^2$  は  $d_t$  の観測誤差の分散を示す.

$$D_t = \left[ D_{t-1}^{-1} + \frac{1}{\sigma_d^2} \mathbf{f}(\mathbf{p}, m) \mathbf{f}^T(\mathbf{p}, m) \right]^{-1} \quad (2.33)$$

$$\mu_t = D_t \left[ D_{t-1}^{-1} \mu_t + \frac{d_t}{\sigma_d^2} \mathbf{f}(\mathbf{p}, m) \right] \quad (2.34)$$

これらを用い、内部モデルを更新していくと、式 2.37、式 2.38 からわかるように、内部モデルの分散は一様に減少し、信頼度は向上していく. しかし、対象の真の特性が基底関数の組によって完全に記述できない場合は、分散が過度に小さくなると、真の特性が内部モデルの広がりから逸脱する危険性がある. そこで運動結果に観測値が内部モデルから予測される範囲からはずれた場合、信頼度が過大になったと判断し、分散を増加させる作用を施す.

人間は目標行動に慣れるに従い身体の動きを大きくしていく. このように、慣れに応じて適切な運動指令を生成するためには、内部モデルの適応の進み具合を評価しなければならぬ

内部モデルの予測範囲内のとき

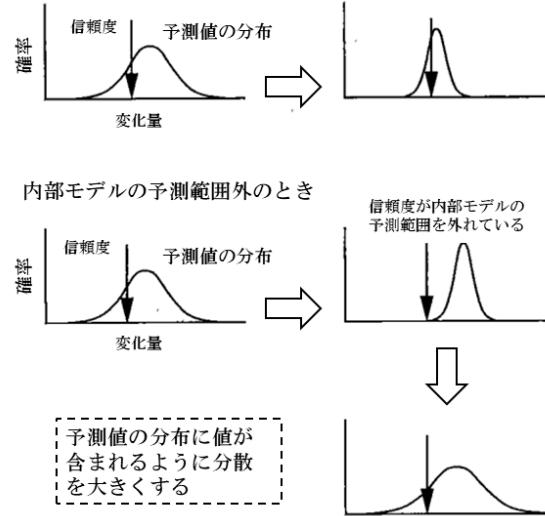


図 2.11: 内部モデルの仕組み

い. この評価量として, 内部モデルの信頼度を用いる. 信頼度が低い間は, 誤りをおかさないよう小さな運動を選択し, 適応が進み信頼度が向上すれば予測を活かした効率的な運動を行うことで, 慣れに応じた運動計画を実行できる.

条件付き確率密度関数は

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{xy})}{\int p(\mathbf{xy})dx} \quad (2.35)$$

と書ける.  $\mathbf{x} \in \Re^{n \times 1}$  は状態ベクトル,  $\mathbf{y} \in \Re^{l \times 1}$  は観測ベクトルを表す. 式 2.39 について

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{M}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right\} \quad (2.36)$$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{W}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - (\mathbf{Cx} + \bar{\mathbf{w}}))^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - (\mathbf{Cx} + \bar{\mathbf{w}})) \right\} \quad (2.37)$$

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{W} + \mathbf{CMC}^T|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{W} + \mathbf{CMC}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \right\} \quad (2.38)$$

と表せる.

このとき,  $\bar{\mathbf{x}} \in \Re^{n \times 1}$  は  $\mathbf{x}$  の予測値,  $\bar{\mathbf{y}} \in \Re^{l \times 1}$  は  $\mathbf{y}$  の予測値,  $\bar{\mathbf{w}} \in \Re^{p \times 1}$  は観測ノイズ,  $\mathbf{W} \in \Re^{n \times n}$  は共分散,  $\mathbf{C} \in \Re^{n \times p}$  は観測行列,  $\mathbf{M} \in \Re^{m \times m}$  は共分散行列を表す.

式 2.39 に内部モデルの信頼度 ( $= \beta$ ) を考慮するため以下のように書き換える.

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y})^\beta = \frac{p(\mathbf{xy})^\beta}{\int p(\mathbf{xy})^\beta dx} = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})^\beta p(\mathbf{x})^\beta}{\int p(\mathbf{xy})^\beta dx} \quad (2.39)$$

このとき,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x})^\beta = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\beta m} |\mathbf{W}|^\beta}} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (\mathbf{y} - (\mathbf{Cx} + \bar{\mathbf{w}}))^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - (\mathbf{Cx} + \bar{\mathbf{w}})) \right\} \quad (2.40)$$

$$p(\mathbf{x})^\beta = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\beta n} |\mathbf{M}|^\beta}} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right\} \quad (2.41)$$

と表すことができ、式 2.39 の分子部分は以下となる。

$$p(\mathbf{x}\mathbf{y})^\beta = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\beta m}|\mathbf{W}|^\beta}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\beta n}|\mathbf{M}|^\beta}} \times \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \left\{ (\mathbf{y} - (\mathbf{C}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{w}}))^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - (\mathbf{C}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{w}})) + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right\} \right] \quad (2.42)$$

ここで、式 2.46 の指數部分に着目する。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{y} - (\mathbf{C}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{w}}))^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - (\mathbf{C}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{w}})) + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\ &= ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{C}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))^T \mathbf{W}^{-1} ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{C}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})) + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1} \\ &\quad + \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - 2(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{P}^{-1}$  を下記のようにおく。

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} & \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\}^T \mathbf{P}^{-1} \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\} \\ &= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - 2(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\ &\quad + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\ &= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - 2(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\ &\quad + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

逆行列の補助定理を用いると

$$\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} = (\mathbf{W} + \mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{C}^T)^{-1} \quad (2.43)$$

と書けるため

$$\begin{aligned} & \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\}^T \mathbf{P}^{-1} \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\} \\ &\quad - (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\ &= \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\}^T \mathbf{P}^{-1} \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\} \\ &\quad + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1}) (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

また、 $z$  を

$$z = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})$$

とすると

$$(\mathbf{x} - z)^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - z) + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{W} + \mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})$$

ここで,  $|\mathbf{Q}^{-1}| = |\mathbf{Q}|^{-1}$  より

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}| &= |\mathbf{M}||\mathbf{W}| |(\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T)^{-1}| \\ |\mathbf{M}|^\beta |\mathbf{W}|^\beta &= |\mathbf{P}|^\beta |(\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T)|^\beta = |\mathbf{P}|^\beta |(\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T)|^\beta \\ &= \left| \frac{\mathbf{P}}{\beta} \right| \beta |\mathbf{P}|^{(\beta-1)} \left| \frac{\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T}{\beta} \right| \beta |\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T|^{(\beta-1)} \end{aligned}$$

となる.  $p(xy)^\beta$  に着目すると

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}\mathbf{y})^\beta &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\beta m} |\mathbf{W}|^\beta}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\beta n} |\mathbf{M}|^\beta}} \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\beta m} |\mathbf{W}|^\beta}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\beta n} |\mathbf{M}|^\beta}} \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \left( \frac{\mathbf{P}}{\beta} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \left( \frac{\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T}{\beta} \right)^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\beta \sqrt{(2\pi)^{(\beta-1)(n+m)} (|\mathbf{P}| |\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T|)^{(\beta-1)}}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \left| \frac{\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T}{\beta} \right|}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \left| \frac{\mathbf{P}}{\beta} \right|}} \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \left( \frac{\mathbf{P}}{\beta} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \left( \frac{\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T}{\beta} \right)^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \right\} \right] \end{aligned} \tag{2.44}$$

また, 式 2.39 の分母部分に着目すると

$$\begin{aligned} \int p(\mathbf{x}\mathbf{y})^\beta dx &= \frac{1}{\beta \sqrt{(2\pi)^{(\beta-1)(n+m)} (|\mathbf{P}| |\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T|)^{(\beta-1)}}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \left| \frac{\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T}{\beta} \right|}} \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \left( \frac{\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}^T}{\beta} \right)^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \right] \end{aligned} \tag{2.45}$$

よって, 式 2.39 は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|\mathbf{y})^\beta &= \frac{p(\mathbf{x}\mathbf{y})^\beta}{\int p(\mathbf{x}\mathbf{y})^\beta dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \left| \frac{\mathbf{P}}{\beta} \right|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \left( \frac{\mathbf{P}}{\beta} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \right] \end{aligned} \tag{2.46}$$

以上より,  $\beta$  を考慮した場合, 確率密度関数は式 2.50 のように変形することができる. 式 2.50 の  $\frac{P}{\beta}$  の部分はカルマンフィルタにおける式 2.9 の  $P_k$  の部分である. よって,  $\beta$  は下記となる.

$$\beta = \frac{|\mathbf{P}_k|}{|\mathbf{P}|} \tag{2.47}$$

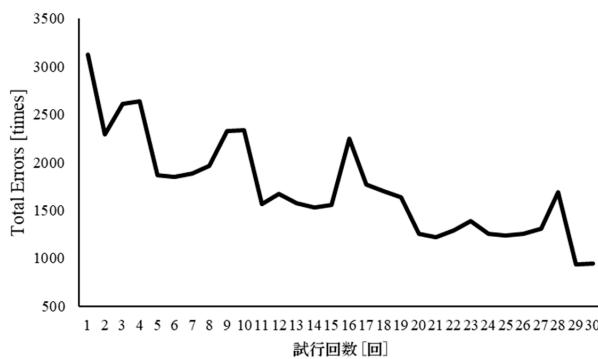


図 2.12: 誤差の合計

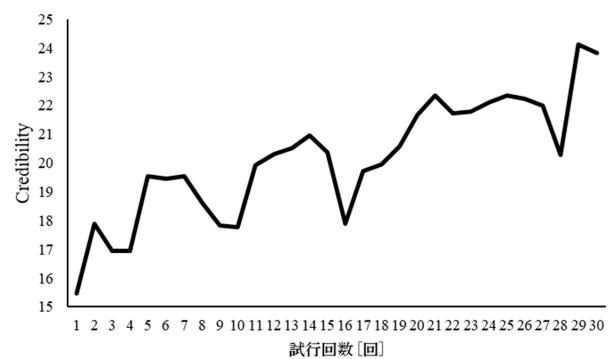


図 2.13: 内部モデルの信頼度の評価値

図 2.12, 図 2.13 はインピーダンスパラメータを算出したときと同様に, 実験に協力していただいた 20 代女性の方のデータを解析した結果である. 図 2.12 は 1 回の試行で星形の枠をはみ出してしまった誤差の回数をグラフ化した. 図 2.13 は内部モデルの信頼度を式 2.51 から算出し, 試行回数に応じて出した値をグラフ化した.

理論上, 内部モデルの信頼度が上昇すれば誤差は減り, 運動にかかる時間も減少する. それは, 脳が運動のシミュレーションを行っていく過程で, 予測精度が向上していくため必然的に運動の誤差は減り, 運動学習の 3 つの段階における認知にかかる時間分が減少するので運動にかかる時間も減少するためである. 図 2.3, 図 2.12 より, 試行回数が増えていくほど誤差が減っており同時に試行に要する時間も減っている. 図 2.5 より星形を一周なぞる平均の速度が上がっていることから, 1 回の試行を速く行えるための運動の方法を脳が学習していることがわかる. さらに図 2.12 から内部モデルの信頼度も上昇傾向にあるので, このことから脳が運動のシミュレーションを高い精度で行えていることを示している.



## 足裏圧センサデバイス

### § 3.1 足裏センサの研究

高齢化が進む日本において、高齢者の健康寿命を延ばすことは極めて重要な課題である。高齢者の歩き方や転倒予防に有効なシステムを開発するにあたり、工学的に人間の歩行を解析する手法が研究されている今日、特に歩行者の足の裏にかかる力を計測するものは国内外で広く実施されている。下山らは小型・薄型の3軸力センサを靴のインソール部に複数埋め込み、計測データを無線で送信するシステムを提案した。これにより、歩行などの運動に影響を与えることなく、なおかつ計測環境に縛られない、足裏部の3軸応力分布計測システムの実証を行った[8]。

MESE(*Micro Electro Mechanical Systems*)技術を用いて試作された2mm角のセンサチップを柔らかいシリコンゴムに埋め込んだ3軸力センサを使用する。図3.1に示すのは今回用いる3軸力センサである。うち、(a)で示すものは取り付けセンサのイメージで(b)で示すものはセンサチップである。3軸力センサのシリコンゴムの表面に加わる力は、面に垂直な方向の力  $\mathbf{F}_z$  と、互いに直交しシリコンゴムの表面と平行な方向の2軸のせん断力  $\mathbf{F}_x$  および  $\mathbf{F}_y$  に分解が可能である。 $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$ ,  $\mathbf{F}_z$  をセンサ表面の面積で割り、求めた応力  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\sigma_z$  と、アンプ回路で増幅された電圧変化  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  の間には、センサの特性行列を介して式3.1の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \\ \mathbf{V}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

実験的に係数  $k_{ij}$ (ただし  $i, j = 1, 2, 3$ )を求ることで、その逆行列を計算して式3.2を用いれば、センサに加わった応力  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\sigma_z$  を算出することができる。

$$\begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \\ \mathbf{V}_z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

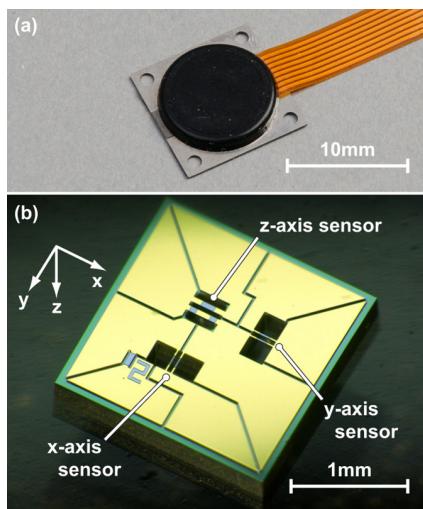


図 3.1: 3 軸力センサチップ

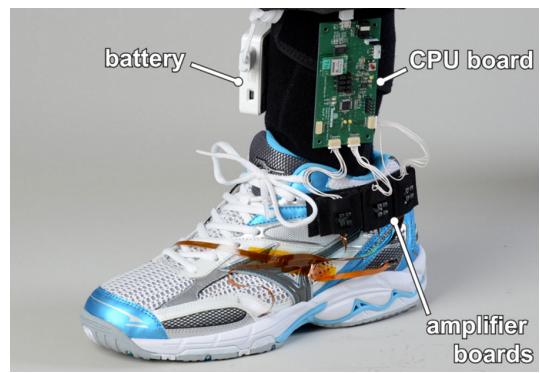


図 3.2: センサデバイス

## § 3.2 ショッカクシューズと自作センサデバイス

### § 3.3 自作センサデバイスの有意性

### 提案手法

§ 4.1 識別のための機械学習

§ 4.2 内部モデルの信頼度を考慮した人間制御者の数学モデル

§ 4.3 内部モデルを考慮したインピーダンス推定

## 実験結果ならびに考察

§ 5.1 実験概要および結果

§ 5.2 考察



## おわりに

本研究では、なぞり運動実験を作成した。なぞり運動実験を作成するにあたり、PsychoPyといわれるツールを用いる。PsychoPyとはPCを使って心理学実験を行うためのツールである。なぞり運動実験とは鏡映描写課題といわれる図形の輪郭をなぞるといった知覚運動学習の1種を模した実験であり、PsychoPyを用いて四角の形をなぞるといった実験を作成し、なぞり運動実験を再現した。作成した実験には、データの取得間隔時間一定や四角の輪郭の線の細さ、繰り返し回数などの設定を追加することで、後のデータを取り扱う段階で処理をしやすくなるようにした。

作成した実験で取得できるデータは時間データや座標の推移データ、なぞれているかなぞれていないかを True, False で判別するものがあり、本研究では、時間データと座標の推移データを使用した。これらのデータを用いて、作成したなぞり運動実験はちゃんと習熟が行われているのかを確認するために本研究での誤差の定義方法を提案し、それを基に、作成したなぞり運動実験で習熟が行われていることを確認できた。また、時間データ、座標の推移データを用いて速度、加速度の算出も行った。

そして、座標の推移、速度、加速度データをカルマンフィルタといわれる、状態空間モデルにおいて、内部の見えない「状態」を効率的に推定するための計算手法に適用し、内部モデルの信頼度 ( $\beta$ ) を算出し、内部モデルの信頼度が試行を重ねていくにつれて上昇していくことを確認した。

また、インピーダンスパラメータである慣性行列、粘性行列、剛性行列を算出し、それぞれのパラメータの変化を確認した。

今後の課題として、なぞり運動実験を行う際にどうやって1回目の試行から最後の試行にかけて丁寧さを欠かさず行うかといった実験の改善、条件などの改善や、本研究では10回という試行だけで習熟の確認をしたが、より多くの試行回数にして実験を行うことも課題になってくる。また、それと同時に被験者の数を増やし、多くのデータを取得することも課題になってくると考える。



# 謝辞

本研究を遂行するにあたり、多大なご指導と終始懇切丁寧なご鞭撻を賜った富山県立大学電子・情報工学科情報基盤工学講座の奥原浩之教授, Antònio Oliveira Nzinga Renè 講師に深甚な謝意を表します。最後になりましたが、多大な協力をして頂いた、奥原研究室の同輩諸氏に感謝致します。

2021年2月

清水 豪士



## 参考文献

- [1] “医療法人社団 平成医会 「歩くことで得られる心身の健康」”, <https://heisei-ikai.or.jp/column/walking/>, 閲覧日 2022, 9, 15
- [2] “今井整形外科医院 講演 「老化は足から、予防して元気で長生きの秘」”, <https://imaiseikei.net/>, 閲覧日 2022, 9, 15
- [3] “ミライロ通信 「ユニバーサルデザインとは? ~7 原則と実現のヒント~」”, <https://www.mirairo.co.jp/blog/post-2021011502>, 閲覧日 2022, 9, 16
- [4] “タッチエンス株式会社”, <http://touchence.jp/>, 閲覧日 2022, 9, 14
- [5] 清水 豪士, “運動学習におけるインピーダンスの習熟と内部モデルの信頼度”, 富山県立大学学位論文, 2021
- [6] “心理学 大学実験レポートまとめ”, <https://sites.google.com/site/hennsatigahikuidaigakusei/liang-ce-xing-zhuan-yi>, 閲覧日 2021, 1, 26.
- [7] “PsychoPy Builder で作る心理学実験”, <http://www.s12600.net/psy/python/ppb/html/index.html>, 閲覧日 2020, 3, 27.
- [8] 明石 一, “人間・機械系における人間の制御特性に関する研究の動向”, 人間工学, Vol. 9, No. 2, pp. 41-48, 1973.
- [9] 長町 三生, 故 正二, 秀衡美代次, 中村 正樹, 田辺 万巳, “カルマンフィルターと人間の推定機能の比較に関する研究”, 人間工学, Vol. 14, No. 3, pp. 133-138, 1978.
- [10] 中沢 信明, 植北 祥充, 池浦 良淳, 猪岡 光, “人間の指関節のインピーダンス特性”, 日本機械学会論文集, 66巻, 641号, pp. 214-219, 2000.
- [11] 楠 泰輔, 館 すすむ, “インピーダンス制御の接触安定性についての一考察”, 日本ロボット学会誌, Vol. 12, No. 3, pp. 489-496, 1994.
- [12] 辻 敏夫, 神字 芳彦, 加藤 莊志, 金子 真, 川村 貞夫, “インピーダンストレーニング：人間の手先インピーダンスを訓練により調節できるのか？”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 35, No. 10, pp. 1300-1306, 1999.
- [13] 辻 敏夫, 後藤 和弘, 伊藤 宏司, 長町 三生, “姿勢維持中の手先インピーダンスの推定”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 30, No. 3, pp. 319-328, 1994.
- [14] 辻 敏夫, 西田 正孝, 伊藤 宏司, “ニューラルネットによるインピーダンスパラメータの繰返し学習”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 28, No. 12, pp. 1461-1468, 1992.
- [15] 川人 光男, “小脳の学習と内部モデル（眼球運動を題材に）”, 日本神経回路学会誌, Vol. 9, No. 2, pp. 132-139, 2002.

- [16] 川人 光男, “小脳内部モデルとモザイクの計算論的神経科学”, 人工知能学会誌, 17巻, 6号, pp. 720-731, 2002.
- [17] 川人 光男, “小脳の内部モデルと運動学習”, 計測と制御, 33巻, 4号, pp. 296-303, 1994.
- [18] 阪口 豊, “内部モデルの信頼度に基づく運動計画のアルゴリズム”, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J79-D-II, No. 2, pp. 248-256, 1996.
- [19] “第1回 カルマンフィルタとは”, <https://www.geolab.jp/column/2020/01/kalman-filter-001.php>, 閲覧日 2021, 1, 27
- [20] 三好 晋太郎, 原 洋輔, 大津 皓平 “カルマンフィルタを用いた最適トラッキング制御に関する研究”, 日本航海学会論文集, 118号, pp. 47-53, 2008.
- [21] “カルマンフィルタの考え方”, <https://logics-of-blue.com/kalman-filter-concept/>, 閲覧日 2021, 1, 28
- [22] “状態空間モデルの意味と4つの分類（線形性、正規性、時変性、連続性）”, <https://mathwords.net/zyotaikukan>, 閲覧日 2021, 1, 28